

УДК 621.391 : 535.8

Е. П. Нечаев

(Воложск)

**ВЛИЯНИЕ ОШИБОК КОРРЕКЦИИ
 НАКЛОНОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА
 НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ
 В АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ**

Найдены среднее значение и функция корреляции оптического изображения, формируемого адаптивной оптической системой коррекции случайных наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Исследовано влияние погрешностей фазовой коррекции на характеристики изображения.

Адаптивные оптические системы (АОС) используются для коррекции фазовых искажений сигналов при наблюдениях через турбулентную атмосферу [1]. Для построения алгоритмов обработки формируемого АОС изображения необходимо знать его статистические характеристики, к числу которых относятся среднее значение и функция корреляции интенсивности. Поэтому исследование характеристик изображения в АОС имеет практический интерес.

Электромагнитное поле в точке $\theta = (x, y)$ области апертуры Ω_a (см. рисунок) АОС можно записать в виде [1, 2]

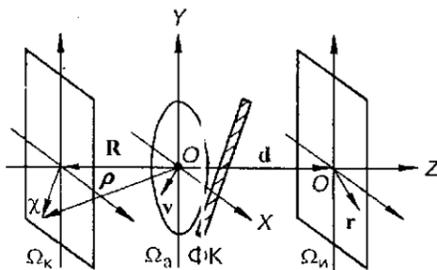
$$\varepsilon(\theta, t) = \text{Re} \{ U(\theta, t) e^{-j\omega_0 t} \},$$

где

$$U(\theta, t) = E(t) \exp\{j[kl\theta - \rho l + \varphi(\theta) + \varphi_0]\}$$

— комплексная огибающая поля; $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны; ω_0 — частота излучения лазера подсветки; ρ — радиус-вектор наблюдаемого объекта в системе координат, связанной с апертурой; $\varphi(\theta)$ — фазовые искажения, вносимые турбулентной атмосферой; $E(t)$ — низкочастотный центрированный гауссовый случайный процесс с дисперсией A_0^2 и коэффициентом корреляции $K(t_1 - t_2)$; φ_0 — начальная фаза излучения.

Рассмотрим схему формирования изображения в АОС, приведенную на рисунке. Здесь χ — координаты наблюдаемого объекта в плоскости Ω_k ; γ —



координаты в плоскости изображения $\Omega_{\text{и}}$; ФК — фазовый корректор, в качестве которого может использоваться поворачивающееся плоское зеркало; \mathbf{R} , \mathbf{d} — векторы между началами координат в области апертуры (собирающей линзы) $\Omega_{\text{а}}$ и плоскостях $\Omega_{\text{к}}$ и $\Omega_{\text{и}}$. При выполнении условий квазимонохроматичности амплитуду поля в плоскости изображения в приближении параксиальных лучей можно записать в виде интеграла суперпозиции [2]:

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{j\lambda d} E(t) \exp\{j[k\chi^2/(2R) + k\tau^2/(2d)]\} \times \\ \times \int_{\Omega_{\text{а}}} \exp\{j[\varphi(\theta) - \varphi_{\text{к}}(\hat{\theta}) - k\chi\theta/R - k\tau\theta/d]\} d\theta, \quad (1)$$

где $R = |\mathbf{R}|$; $d = |\mathbf{d}|$; $\varphi_{\text{к}}(\theta)$ — функция фазовой коррекции.

В выражении (1) опущен постоянный по апертуре набег фазы, не влияющий на распределение интенсивности изображения:

$$I(\mathbf{r}) = \int_0^T |U(\mathbf{r}, t)|^2 dt / (2T). \quad (2)$$

Будем считать, что время регистрации изображения T меньше времени «замороженности» турбулентной атмосферы [1], но значительно больше времени корреляции наблюдаемого поля $\tau_{\text{к}} = 2\pi/\Delta\omega$, $\Delta\omega$ — полоса частот процесса $E(t)$. Такое время регистрации соответствует случаю длинной экспозиции.

Используя достаточное условие эргодичности: $K(t_1 - t_2) \rightarrow 0$ при $(t_1 - t_2) \rightarrow \infty$, заменим усреднение по времени в (2) на усреднение по ансамблю реализаций процесса $E(t)$. В результате чего получаем

$$I(\mathbf{r}) = \frac{I_0^2}{2\lambda^2 d^2} \int_{\Omega_{\text{а}}} \int_{\Omega_{\text{а}}} \exp\{j[\psi(\theta, \theta') - (k\chi/R + k\tau/d)(\theta - \theta')]\} d\theta d\theta', \quad (3)$$

где $\psi(\theta, \theta') = \varphi(\theta) - \varphi_{\text{к}}(\hat{\theta}) - \varphi(\theta') + \varphi_{\text{к}}(\hat{\theta}')$.

Вследствие ошибок фазовой коррекции распределение интенсивности (3) будет случайным. Найдем статистические характеристики интенсивности изображения.

Функцию фазовых искажений при наклонах волнового фронта и функцию фазовой коррекции этих наклонов можно записать в виде

$$\varphi(\theta) = a_2 F_2(\bar{\theta}) + a_3 F_3(\bar{\theta}), \quad \varphi_{\text{к}}(\hat{\theta}) = \hat{a}_2 F_2(\hat{\theta}) + \hat{a}_3 F_3(\hat{\theta}), \quad (4)$$

где $F_2(\theta) = 8x/D$; $F_3(\bar{\theta}) = 8y/D$ — полиномы Цернике второго и третьего порядков [1]; a_2, a_3 — коэффициенты, характеризующие величину наклонов волнового фронта; \hat{a}_2, \hat{a}_3 — оценки величин a_2, a_3 ; D — диаметр апертуры АОС.

Используя приближение малых ошибок фазовой коррекции $\psi(\theta, \theta') \ll 1$, разложим функцию $\exp\{j\psi(\theta, \theta')\}$ из (3) в ряд Тейлора, ограничимся слагаемыми второго порядка малости и проведем усреднение интенсивности по ошибкам фазовой коррекции $\hat{a}_2 - a_2, \hat{a}_3 - a_3$. В результате находим среднее значение

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = I_0 [\gamma_0(\omega) - 8\sigma^2 \gamma_1(\omega)] \quad (5)$$

и функцию корреляции

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 64 I_0^2 \sigma^2 \gamma_2(\omega_1) \gamma_2(\omega_2) \cos(\psi_2 - \psi_1) \quad (6)$$

интенсивности изображения. Здесь $I_0 = \pi^2 A_0^2 D^4 / (32\lambda^2 d^2)$ — интенсивность неискаженного изображения объекта в точке $r = r_0 = -\chi d/R$; $\gamma_0(\omega) = [2J_1(\omega)/\omega]^2$ — функция, описывающая форму изображения при полной (безошибочной) фазовой коррекции;

$$\omega = |\omega|, \quad \omega = D(k\chi/R + k\tau/d)/2;$$

$$\gamma_1(\omega) = 2[(2J_1(\omega)/\omega)(2J_1(\omega)/\omega - 4J_2(\omega)/\omega^2) - (2J_2(\omega)/\omega)^2]$$

— функция, описывающая искажение формы изображения за счет ошибок фазовой коррекции; $J_n(\cdot)$ — функции Бесселя n -го порядка;

$$\gamma_2(\omega) = (2J_1(\omega)/\omega)(2J_2(\omega)/\omega);$$

(ω_i, ψ_i) , $i = 1, 2$, — полярные координаты вектора: $\omega_i = D(k\chi/R + k\tau_i/d)/2$; $\sigma^2 = \langle (\hat{a}_2 - a_2)^2 \rangle = \langle (\hat{a}_3 - a_3)^2 \rangle$ — среднеквадратическая ошибка коррекции наклонов волнового фронта; $\sigma = 4\pi\epsilon/\lambda L^2$;

$$F_i^2 = 4 \int \int_{\Omega_a} F_i^2(\theta) \epsilon \theta / \pi D^2, \quad i = 2, 3,$$

— среднеквадратическое по апертуре значение полинома $F_i(\theta)$ (4); ϵ^2 — среднеквадратическая погрешность перемещения поверхности активного зеркала, которую обычно выражают в долях длины волны излучения: $\epsilon = \alpha \lambda$, α — постоянная безразмерная величина.

Согласно (5), область неискаженного изображения, определяемая главным лепестком функции $\gamma_0(\omega)$, задается условием

$$|r + \chi d/R| \leq 1,22\lambda d/D, \quad (7)$$

а область искаженного изображения, совпадающая с главным лепестком функции $\gamma_1(\omega)$, — условием

$$|r + \chi d/R| \leq 1,635\lambda d/D.$$

Таким образом, радиус области, занимаемой искаженным изображением, в 1,34 раза превосходит радиус области изображения, получаемого при полной коррекции фазовых искажений оптического поля.

При ошибках фазовой коррекции средняя интенсивность в точке r_0 , соответствующей максимуму интенсивности неискаженного изображения, определяется выражением

$$\langle I(r_0) \rangle = I_0 [1 - 8\sigma^2].$$

Значит, уменьшение максимальной интенсивности изображения, вызванное ошибками фазовой коррекции, прямо пропорционально величине среднеквадратической ошибки коррекции наклонов волнового фронта.

Согласно (6), дисперсия флуктуаций интенсивности $D(r) = K(r, r)$ прямо пропорциональна величине среднеквадратической ошибки коррекции наклонов волнового фронта и достигает наибольшего значения в области неискаженного изображения (7). Причем в центре области (7) r_0 дисперсия флуктуаций интенсивности равна нулю. Это объясняется синфазным сложением волн, дифрагировавших на апертуре АОС.

Корреляционная функция (6) существенно отличается от нуля только для точек, лежащих внутри области (7). Если хотя бы одна из точек r_1, r_2 лежит вне области (7), флуктуации интенсивности в этих точках будут практически не коррелированы.

Исследуем статистические характеристики изображения при короткой экспозиции, когда время регистрации значительно меньше времени корре-

лянии наблюдаемого поля τ_k . В этом случае регистрируется мгновенное распределение интенсивности:

$$I(r, t) = |U(r, t)|^2/2. \quad (8)$$

Аналогично (5), (6) проведем усреднение (8) по ансамблю реализаций процесса $E(t)$ (1) и ошибкам фазовой коррекции. В результате получаем, что среднее значение интенсивности (8) совпадает с (5), а пространственно-временная корреляционная функция интенсивности изображения определяется выражением

$$K(r_1, r_2, t_1, t_2) = 2I_0^2 K^2(t_1 - t_2) \gamma_0(\omega_1) \gamma_0(\omega_2). \quad (9)$$

Согласно (9), дисперсия флуктуаций интенсивности $D(r) = K(r, r, t, t) = 2I_0^2 \gamma_0^2(\omega)$ в приближении малых ошибок фазовой коррекции не зависит от величины этих ошибок и вдвое превышает квадрат средней интенсивности неискаженного изображения (5). Наибольшее значение дисперсии наблюдается в области неискаженного изображения (7). В центре области (7) r_0 величина $D(r_0) = 2I_0^2$.

Корреляционная функция (9) так же, как функция (6), существенно отличается от нуля только для точек, лежащих внутри области (7). Однако в отличие от (6) корреляционная функция (9) не зависит от ошибок фазовой коррекции и по порядку величины совпадает с квадратом средней интенсивности (5). В этом случае для регистрируемого изображения будет характерна спекл-структура. Характерный размер пятен определяется радиусом корреляции функции (9), который в соответствии с (7) имеет величину $r_k \approx 1,22\lambda d/D$.

Таким образом, получено статистическое описание изображения, формируемого АОС за время «замороженности» атмосферы в рамках корреляционной теории. Исследовано влияние ошибок фазовой коррекции на характеристики изображения для случаев короткой и длинной экспозиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985.
2. Гудмен Д. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 1 апреля 1996 г.