

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович
(Новосибирск)

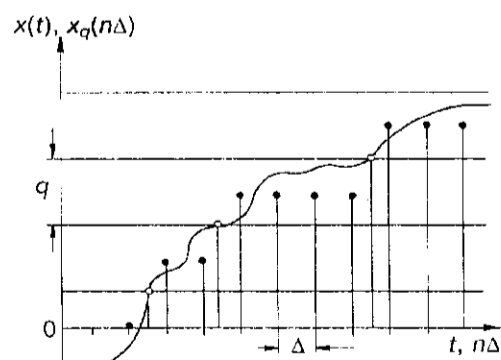
ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ОБРАБОТКИ
ЦИФРОВЫХ ОТСЧЕТОВ СИГНАЛА ПРИ ЕГО ВОССТАНОВЛЕНИИ

Приводятся соотношения для потенциальной точности стационарной линейной обработки последовательности равноотстоящих по времени цифровых отсчетов сигнала при его восстановлении. Показано, что эта точность может быть повышена путем преобразования последовательности равноотстоящих цифровых отсчетов в случайную последовательность пересечений промежуточных уровней и использования нестационарного линейного фильтра.

Одним из известных способов подавления шума квантования при восстановлении аналогового сигнала является использование высокой передискретизации стационарного фильтра нижних частот и соответствующей децимации. Эта процедура не позволяет полностью отфильтровать шум квантования, так как его значения при достаточно малом интервале дискретизации Δ являются коррелированными. При ее использовании на вход фильтра нижних частот поступает последовательность отсчетов $x_q(n\Delta)$ (q — шаг квантования по уровню), представляющая собой ступенчатую аппроксимацию аналогового сигнала внутри каждого кванта аналого-цифрового преобразователя (см. рисунок). Из рисунка следует, что точность аппроксимации сигнала при определенных условиях можно повысить, если использовать информацию о моментах перехода сигнала из одного кванта в другой. При этом восстанавливающий фильтр оказывается нестационарным.

В [1] исследована эффективность сжатия данных при использовании информации о моментах пересечения равноотстоящих уровней гауссовым случайным сигналом с равномерным спектром мощности. В [2] даны результаты моделирования алгоритма восстановления сигнала по моментам пересечения уровней с использованием простых восстанавливающих фильтров.

Ниже приводятся полученные авторами соотношения для минимальной остаточной дисперсии шума квантования при стационарной фильтрации,



оценивается потенциальная точность восстановления сигнала при использовании информации о пересечениях аналоговым сигналом промежуточных уровней. Рассмотрены статистические характеристики шумов, обусловленных неточностью определения моментов пересечения сигналом промежуточных уровней, а также проводится сравнение стационарного и нестационарного алгоритмов обработки цифровых измерений.

1. **Фильтрация шума квантования стационарным фильтром.** Рассмотрим случай, когда образующаяся на выходе идеального квантователя последовательность равноотстоящих отсчетов $x_q(n\Delta)$ поступает на фильтр нижних частот с полосой пропускания $|\omega| < \omega_{\max}$, которую занимает спектр квантуемого сигнала. Представляет интерес получить зависимость остаточной дисперсии шума квантования от шага квантования по уровню q , интервала дискретизации и параметров сигнала. Из [3, 4] следует, что эта остаточная дисперсия

$$\varepsilon_{\xi}^2(\omega_{\max}, \Delta) = \int_{|\omega| < \omega_{\max}} S_{\xi}(\omega, \Delta) d\omega = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_m [F_x((\omega_{\max} - 2\pi m/\Delta)q/2\pi k) - F_x((-\omega_{\max} - 2\pi m/\Delta)q/2\pi k)], \quad (1.1)$$

где $F_x(z) = \int_0^z f_x(x) dx$ — интегральный закон вероятности первой производной сигнала.

Если плотность вероятности первой производной сигнала $f_x(z)$ — невозрастающая функция этой производной, то величина (1.1) отлична от нуля при любом интервале дискретизации и минимальна, когда он равен нулю:

$$\varepsilon_{\xi}^2(\omega_{\max}, 0) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [F_x(\omega_{\max}q/2\pi k) - F_x(-\omega_{\max}q/2\pi k)]. \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) можно упростить, если выполняется условие

$$F_x(\omega_{\max}q/2\pi) \approx \omega_{\max}q f_x(0)/2\pi.$$

Тогда

$$\varepsilon_{\xi}^2(\omega_{\max}, 0) = \frac{\xi(3)}{2\pi^3} q^3 f_x(0) \omega_{\max}, \quad (1.3)$$

где $\xi(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx 1,2$.

Например, для сигнала с гауссовым распределением

$$f_x(0) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma_x$$

и

$$\varepsilon_{\xi}^2(\omega_{\max}, 0) = \frac{\xi(3)}{2\pi^3\sqrt{2\pi}} q^3 \omega_{\max}/\sigma_x, \quad (1.4)$$

где σ_x — среднеквадратичное значение производной сигнала, определяемое известными соотношениями:

$$\sigma_x^2 = \int \omega^2 S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2 \left(-\frac{d^2\rho_x(\tau)}{d\tau^2} \right)_{\tau=0}. \quad (1.5)$$

Здесь $S_x(\omega)$ — спектральная плотность сигнала; $\rho_x(\tau)$ — его нормированная корреляционная функция.

2. Восстановление сигнала по моментам пересечения равноотстоящих уровней. Будем считать, что интервал дискретизации Δ достаточно мал и в течение его может осуществляться переход только в соседний квант. Преобразуем равномерную последовательность цифровых отсчетов в последовательность пересечений промежуточных уровней:

$$x_{0q}(n\Delta) = (x_q((n+1)\Delta) + x_q(n\Delta)) / 2, \quad (2.1)$$

где $1[z] = 1$ при $z > 0$ и 0 при $z < 0$.

Одна из главных характеристик последовательности (2.1) — число пересечений промежуточных уровней в единицу времени. При $\Delta = 0$, используя соотношения из [5] для числа нулей дифференцируемой функции, можно записать формулу для общего числа пересечений в единицу времени равноотстоящих уровней на интервале времени $-0,5T \div 0,5T$:

$$F_0 = \frac{1}{T} \sum_k \int_{-0,5T}^{0,5T} \delta(x(t) - kq - 0,5q) |x(t)| dt, \quad (2.2)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция.

Эта величина является определяющей при восстановлении сигнала. Например, в [6, 7] показано, что для периодической последовательности моментов отсчетов сигнала дисперсия ошибки восстановления (при $\Delta = 0$) равна нулю, если величина

$$F_0 \geq \omega_{\max} / \pi. \quad (2.3)$$

При этом, если период T последовательности моментов отсчетов равен $N\Delta$, то весовые функции этой последовательности определяются соответствующей интерполяционной формулой Лангранжа

$$w_i(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta} (t - t_i)}{\frac{\pi}{N\Delta} (t - t_i)} \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta} (t - t_r)}{\sin \frac{\pi}{N\Delta} (t_r - t_r)} \quad (2.4)$$

и сигнал восстанавливается без ошибок соотношением

$$x^*(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} x(t_s + kN\Delta) w_s(t - t_s - kN\Delta). \quad (2.5)$$

Если функция $x(t)$ со спектром, ограниченным частотой ω_{\max} , — стационарный случайный сигнал, то теоретически ее реставрация также будет безошибочной при среднем числе пересечений уровней в единицу времени:

$$\langle F_0 \rangle = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(kq - 0,5q, \dot{x}) |x| d\dot{x} \approx \langle |\dot{x}| \rangle / q \geq \omega_{\max} / \pi, \quad (2.6)$$

где $\langle |\dot{x}| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\dot{x}) |\dot{x}| d\dot{x}$ — первый абсолютный момент производной; $f(x, \dot{x})$ — совместная плотность сигнала и его производной для одного и того же момента времени.

Рассмотренный выше случай можно интерпретировать как предел для периодической последовательности при неограниченном возрастании величины N . При этом весовая функция (2.4) превращается в бесконечное произведение.

Интересно оценить величины, входящие в (2.6), для конкретного сигнала. Рассмотрим сигнал с гауссовым распределением и корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau) = \sigma_x^2 (\sin(\omega_{\max} \tau / n) / (\omega_{\max} \tau / n))^n, \quad (2.7)$$

т. е. со спектральной плотностью, ограниченной частотой ω_{\max} . Для гауссова сигнала $\langle |\dot{x}| \rangle = \sqrt{2/\pi} \sigma_x$. Для этого примера из соотношения (2.6) следует, что сигнал теоретически может быть восстановлен без ошибки, если отношение $\sigma_x/q \geq \sqrt{3n/2\pi}$. Таким образом, это соотношение оказывается небольшим (при $n=1$ $\sigma_x/q \approx 0,7$). Следует, однако, отметить, что соотношение (2.6) получено после усреднения числа пересечений по множеству реализаций и для его использования реализации сигнала должны отвечать определенным условиям эргодичности.

Выше предполагалось, что интервал дискретизации Δ равен нулю и какие-либо другие шумы при измерении отсутствуют. При интервале Δ , не равном нулю, возникает девиационная ошибка в определении моментов пересечений, что приводит к ошибке при восстановлении сигнала. Отметим, что если даже считать девиационные ошибки независимыми, отфильтровывать этот шум сложно, так как вся его энергия находится в полосе сигнала. Это происходит вследствие того, что спектр весовой функции (2.4) равен нулю при $|\omega| > \omega_{\max}$. По-видимому, единственным способом борьбы с этим шумом является сознательное увеличение среднего числа пересечений $\langle F_0 \rangle$ за счет избыточного увеличения числа уровней и последующая низкочастотная фильтрация. Эти же замечания, вероятно, справедливы для любого независимого аддитивного шума, искажающего отсчеты сигнала.

3. Характеристики шума, обусловленного девиацией моментов пересечения промежуточных уровней. В соответствии с рассматриваемой моделью сигнал из одного кванта идеального квантователя в другой переходит внутри интервала дискретизации Δ , а момент пересечения промежуточного уровня можно считать случайно распределенным внутри него. Если датировать момент пересечения его математическим ожиданием, то дисперсия шума

$$\epsilon_{\Delta}^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x(\omega) \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{f}_t^0(\omega) - \frac{1}{2} \tilde{f}_t^0(-\omega) \right), \quad (3.1)$$

где $\tilde{f}_t^0(\omega)$ — характеристическая функция центрированной флуктуации момента пересечения t внутри интервала Δ .

Если сигнал, по крайней мере, однократно дифференцируем в среднеквадратичном, то

$$\epsilon_{\Delta}^2 \approx \sigma_t^2 \sigma_x^2. \quad (3.2)$$

Девиация t по своей сути — это ошибка квантования момента времени пересечения идеальным квантователем с шагом Δ , и для ее описания целесообразно использовать разложение в тригонометрический ряд [8]:

$$t = \frac{\Delta}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin 2\pi k(t_s + \Theta)/\Delta, \quad (3.3)$$

где Θ — начальная фаза тактового генератора, которую можно считать равномерно распределенной в пределах интервала дискретизации. Тогда после усреднения по начальной фазе корреляция между девиационными ошибками, разделенными m пересечениями,

$$R_t(m) = \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k(t_s + m - t_s)/\Delta. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_t^2 = R_t(0) = \Delta^2/12. \quad (3.5)$$

Оценим далее корреляционную функцию шума ϵ_Δ . Отметим предварительно, что при определенных условиях реализацию сигнала между несколькими пересечениями можно считать близкой к линейной. Тогда

$$R_\Delta(m) \approx \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi kmq/\dot{x}\Delta) \dot{x}^2 f_x(\dot{x}) d\dot{x}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает асимптотическая ($q \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$) оценка для нормированного коэффициента корреляции шума, обусловленного ошибками в определении моментов пересечения промежуточных уровней:

$$r_\Delta(m) \approx \frac{1}{3m^2} \langle \dot{x}^4 \rangle \Delta^2 / \sigma_x^2 q^2, \quad (3.7)$$

где $\langle \dot{x}^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}^4 f_x(\dot{x}) d\dot{x}$ — четвертый момент производной сигнала. Например, для сигнала с нормальным распределением $\langle \dot{x}^4 \rangle = 3\sigma_x^4$ и

$$r_\Delta(m) = \frac{1}{m^2} \sigma_x^2 \Delta^2 / q^2 = \frac{\pi}{2m^2} \Delta^2 / (q/\langle |\dot{x}| \rangle)^2. \quad (3.8)$$

Из (3.8) вытекает, что шум ϵ_Δ можно считать некоррелированным, если выполняется условие

$$q/\langle |\dot{x}| \rangle \gg \Delta, \quad (3.9)$$

т. е. средний интервал между пересечениями уровней содержит несколько интервалов дискретизации Δ .

Отметим, что, по-видимому, соотношение (3.7) является оценкой сверху для коэффициента корреляции, так как вычислено в предположении, что сигнал изменяется линейно в пределах m квантов. Кроме того, в этой формуле учитываются не все реализации сигнала, например, такие, когда сигнал выходит из кванта и снова возвращается в него. Однако относительная доля этих случаев по сравнению с рассмотренными при определенных условиях невелика. Например, для гауссова сигнала эта доля составляет величину $(1/\sqrt{2\pi}) q\sigma_x/\sigma_x^2$. Для сигнала с упомянутой выше корреляционной функцией (2.7) она равна $\frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{5n-2}{15n}\right)^{1/2} q/\sigma_x$. Для реализаций такого типа корреляция убывает значительно быстрее, чем (3.7).

4. Сравнительная оценка алгоритмов обработки цифровых отсчетов. Потенциальная точность обработки цифровых отсчетов стационарным фильтром нижних частот определяется соотношением (1.2). Предельные возможности восстановления сигналов со спектром, ограниченным частотой ω_{\max} , оцениваются формулой (3.2) и средней частотой дискретизации (2.6) после операции децимирования:

$$\epsilon_\Delta^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sigma_x^2 F_{\max} / \langle F_0 \rangle = \frac{\Delta^2}{12\pi} q\sigma_x^2 \omega_{\max} / \langle |\dot{x}| \rangle. \quad (4.1)$$

Сравнивая (4.1) с асимптотическим соотношением (1.4), получим условие, при котором восстановление сигнала по последовательности неравноотстоящих отсчетов оказывается предпочтительнее:

$$\Delta < \frac{q}{\sigma_x} \sqrt{\langle |\dot{x}| \rangle f_x(0)} \sqrt{6\zeta(3)/\pi}. \quad (4.2)$$

Для сигнала с гауссовым распределением из (4.2) вытекает, что

$$\Delta \langle |\dot{x}| \rangle < q\sqrt{3\zeta(3)/\pi}. \quad (4.3)$$

Это соотношение эквивалентно неравенству (3.9): среднее значение модуля приращения сигнала на интервале дискретизации Δ должно быть меньше шага квантования по уровню q .

Отметим, что непосредственное восстановление сигнала по неравномерным отсчетам требует чрезмерного усложнения весовых функций нестационарного восстанавливающего фильтра. Использование КИХ-фильтров с более простой структурой с очевидностью требует не только уменьшения интервала дискретизации, но и дополнительного увеличения числа уровней, пересекаемых сигналом (уменьшения q). Это обусловлено возникновением дополнительных линейных искажений сигнала, вызываемых упрощением структуры восстанавливающего фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mark J. W., Todd T. D. A nonuniform sampling approach to data compression // IEEE Trans. Commun. 1981. COM-29, N 1.
2. Sayiner N., Sorensen H. V., Viswanathan. A level-crossing sampling scheme for A/D conversion // IEEE Trans. on Circ. and Syst.-II. 1996. 43, N 4.
3. Ефимов В. М. Оценка для спектральной плотности шума квантования по уровню // Автометрия. 1970. № 1.
4. Ефимов В. М., Касперович А. Н. Потенциальная точность измерительных схем с предварительным преобразованием сигнала // Автометрия. 1995. № 3.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций: М.: ГИФМЛ, 1960. С. 533.
6. Yen J. L. On nonuniform sampling of bandwidth limited signal // Trans. IRE. 1956. CT-3, N 4. P. 251.
7. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962. С. 117.
8. Bennet W. F. Spectra of quantized signals // Bell Syst. Techn. J. 1948. 27, N 3.

Поступила в редакцию 20 июня 1997 г.