

СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 519.642

Ю. Е. Воскобойников, Н. П. Кисленко, К. В. Устюжанин

(Новосибирск)

АДАПТИВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Предлагается подход к оцениванию неизвестных параметров алгебраических алгоритмов восстановления изображений по проекционным данным. На примерах матричного и строчного алгоритмов восстановления демонстрируется эффективность этого подхода. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Итерационные алгебраические алгоритмы получили широкое применение при восстановлении изображений по проекционным данным, и им посвящены многочисленные публикации (например, [1, 2]). На наш взгляд, это обусловлено в основном двумя обстоятельствами. Первое заключается в большей по сравнению, скажем, с методами, основанными на интегральных преобразованиях, гибкости, позволяющей модифицировать итерационный алгоритм адекватно решаемой задаче, например, эффективно учесть присутствие областей локальной непрозрачности [3, 4] и имеющуюся в распоряжении исследователя априорную информацию достаточно сложного характера. Второе обстоятельство заключается в том, что итерационные алгоритмы обладают богатыми потенциальными возможностями развития в рамках более общих подходов, разрабатываемых методами линейной алгебры, нелинейной оптимизации и математической статистики.

Существенным недостатком многих итерационных методов (как и других регулирующих алгоритмов восстановления) является наличие параметра (называемого параметром регуляризации), от которого существенно зависит точность решения и который априори неизвестен. Выбор оптимального значения, минимизирующего среднеквадратическую ошибку восстановления, требует большого объема априорной информации, в частности, задания корреляционной матрицы погрешностей регистрации проекционных данных. Ошибка в задании этого параметра может существенно увеличить ошибку восстановления по сравнению с оптимальным значением.

Поэтому в данной публикации предлагается подход к построению итерационных алгоритмов, которые в процессе своей работы уточняют значение неизвестных параметров алгоритма на основе имеющихся проекционных данных, т. е. производится адаптация (настройка) алгоритма восстановления. В результате такой настройки алгоритм имеет ошибку восстановления, несущественно превосходящую минимальную ошибку при оптимальном значении параметра регуляризации.

Итерационные алгебраические алгоритмы восстановления. Математической моделью вычислительной томографии является преобразование Радона вида

$$f(s, \Theta) = \int_{\Omega} \int \varphi(x, y) \delta(x \cos \Theta + y \sin \Theta - s) dx dy, \quad (1)$$

которое определяет проекцию $f(s, \Theta)$, снятую под углом Θ как интеграл функции $\varphi(x, y)$ вдоль прямой с уравнением $x \cos \Theta + y \sin \Theta - s = 0$. Тогда основная задача вычислительной томографии состоит в оценивании функции $\varphi(x, y)$ по набору проекционных данных.

Используя известные методы дискретизации уравнения (1), получаем алгебраическую форму записи преобразования Радона [1, 3]

$$R\varphi = f, \quad (2)$$

где матрица R имеет размеры $N \times M$, вектор φ — размерности M и содержит искомые коэффициенты разложения $\varphi(x, y)$ по принятой системе базисных функций [3]; f — вектор размерности N , составленный из значений проекций $f(s, \Theta)$.

Как правило, матрица R является практически вырожденной (число обусловленности равно 10^6 — 10^8), и поэтому в качестве решения принимаем регуляризованное решение φ_α — вектор, доставляющий минимум обобщенному сглаживающему функционалу:

$$\Phi_\alpha[\varphi, f] = \|f - R\varphi\|_{W_f}^2 + \alpha \|\varphi - m_\varphi\|_{W_\varphi}^2, \quad (3)$$

где α — параметр регуляризации; $\|z\|_{V_z}^2 = \langle z, V_z z \rangle = z^T V_z z$ — «взвешенная» евклидова норма вектора. Определяя α , m_φ , W_f и W_φ из имеющейся априорной информации, можно получить различные регуляризованные решения: детерминированное, статистическое, байесовское (подробнее см. [5]).

Нетрудно показать, что точка φ_α минимума функционала (3) является решением системы уравнений

$$(\alpha W_\varphi + R^T W_f R)\varphi_\alpha = R^T W_f f + \alpha W_\varphi m_\varphi. \quad (4)$$

Эта система имеет единственное решение, если выполнено условие [5]

$$\text{Nul}(W_f^{1/2} R) \cap \text{Nul}(W_\varphi) = \{0\},$$

где $\text{Nul}(K)$ — нуль-пространство матрицы K .

В дальнейшем будем предполагать, что:

а) $W_f = V_\eta^{-1}$, где V_η — диагональная корреляционная матрица погрешностей регистрации вектора f вида

$$V_\eta = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\};$$

б) матрица W_φ определяется требуемым порядком регуляризации (т. е. требуемой гладкостью изображения $\varphi(x, y)$);

в) параметр α априори неизвестен.

Итерационные алгоритмы решения системы (4) можно разделить на две большие группы:

1. Матричные алгоритмы, которые на каждой итерации работают с матричными структурами. Эти алгоритмы используются, когда объем оперативной памяти позволяет обрабатывать полностью всю матрицу R , и к ним относятся такие известные алгоритмы минимизации функционалов, как градиентные, сопряженных градиентов и т. д.

2. Строчные алгоритмы, использующие для обновления искомого решения только одну строку матрицы R . Эти алгоритмы эффективны, когда число элементов R весьма велико (порядка 10^5 — 10^9).

Первоначально рассмотрим матричные алгоритмы и для конкретности возьмем алгоритм, реализующий метод сопряженных градиентов [6], имеющий интересное свойство: при «идеальных» вычислениях точка минимума минимизируемого функционала достигается не более чем за M итераций, где

M — размерность вектора переменных (в нашем случае вектора φ_α). Введем матрицу A_α размером $M \times M$

$$A_\alpha = 2[\alpha W_\varphi + R^T V_\eta^{-1} R] \quad (5)$$

и вектор b_α размерности M

$$b_\alpha = 2[\alpha W_\varphi m_\varphi + R^T V_\eta^{-1} f]. \quad (6)$$

Тогда алгоритм, реализующий метод сопряженных градиентов, можно представить следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} 1) \quad n = 0; \quad g^{(0)} = z^{(0)} = b_\alpha - A_\alpha \varphi_\alpha^{(0)}; \\ 2) \quad s^{(n)} = A_\alpha g^{(n)}; \quad \beta_n = \frac{\langle z^{(n)}, z^{(n)} \rangle}{\langle g^{(n)}, s^{(n)} \rangle}; \\ 3) \quad \varphi_\alpha^{(n+1)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \beta_n g^{(n)}; \\ 4) \quad z^{(n+1)} = b_\alpha - A_\alpha \varphi_\alpha^{(n+1)} = z^{(n)} - \beta_n s^{(n)}; \\ 5) \quad \gamma_n = \langle z^{(n+1)}, z^{(n+1)} \rangle / \langle z^{(n)}, z^{(n)} \rangle; \quad g^{(n+1)} = z^{(n+1)} + \gamma_n g^{(n)}; \\ 6) \quad n = n + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве «стартовой точки» $\varphi_\alpha^{(0)}$ принимается вектор m_φ . Очевидно, что шаги 2—6 повторяются на каждой итерации, пока не прекратится итерационный процесс минимизации функционала (3).

Перейдем к рассмотрению строчного алгоритма. С использованием результатов работы [7] строчной алгоритм минимизации функционала (3) можно записать в следующем виде:

$$1) \quad z^{(0)} \in E^N; \quad \varphi^{(0)} = W_\varphi^{-1} R^T z^{(0)} + m_\varphi; \quad n = 0;$$

$$2) \quad \beta_n(\alpha) = \lambda_n \frac{1}{\alpha \sigma_{i(n+1)}^2 + \langle r_{i(n+1)}, W_\varphi^{-1} r_{i(n+1)} \rangle}; \quad 0 < \lambda_n < 2; \quad (8)$$

$$s_n(\alpha) = f_{i(n+1)} - \langle r_{i(n+1)}, \varphi_\alpha^{(n)} \rangle - \alpha \sigma_{i(n+1)}^2 z_{i(n+1)}^{(n)}; \quad (9)$$

$$3) \quad \varphi_\alpha^{(n+1)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \beta_n(\alpha) s_n(\alpha) W_\varphi^{-1} r_{i(n+1)};$$

$$z_{i(n+1)}^{(n+1)} = z_{i(n+1)}^{(n)} + \beta_n(\alpha) s_n(\alpha);$$

$$4) \quad n = n + 1.$$

Шаги 2—4 повторяются до окончания работы итерационного алгоритма. В приведенных соотношениях r_i означает i -ю строку матрицы R , а z является вектором размерности N . Важная особенность строчных алгоритмов — стратегия выбора текущего номера обрабатываемой строки матрицы R на $(n+1)$ -й итерации. Условно такая связь записывается в виде $i_{(n+1)}$, а запись $z_{i(n+1)}^{(n+1)}$ означает $i_{(n+1)}$ -ю проекцию вектора z на $(n+1)$ -й итерации. Наиболее часто используется периодическое задание, определяемое как

$$i_{(n)} = n(\text{mod} N) + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Возможны и другие стратегии выбора текущего номера [3, 7].

Два записанных алгоритма, как и другие алгоритмы этих классов, имеют существенный недостаток: они включают в себя в той или иной форме неизвестный параметр регуляризации α . Предложенные в литературе алгоритмы выбора α (см., например, [8, 9]) либо не приспособлены для работы в итерационных алгоритмах, либо требуют задания числовых характеристик погрешностей измерения (чаще всего дисперсий), которые сами задаются весьма приближенно. Отклонение параметра α от оптимального значения может существенно повысить ошибку восстановления. Для иллюстрации этого факта на рис. 1 приведены зависимости относительной среднеквадратической ошибки восстановления

$$\Delta_{\text{отн}}^{(n)}(\alpha) = M[\|\varphi_{\alpha}^{(n)} - \varphi\| / \|\varphi\|]$$

($M[*]$ — оператор математического ожидания) от параметра регуляризации в методе сопряженных градиентов при различном числе итераций n (кривая 1 — $n = M/2$, кривая 2 — $n = M$, кривая 3 — $n = 2M$; $M = 225$).

Поэтому перейдем к построению адаптивных итерационных алгоритмов, которые в процессе работы позволяют оценить оптимальное значение параметра регуляризации.

Адаптивные итерационные алгоритмы восстановления. В работе [10] построен адаптивный рекуррентный алгоритм решения вырожденных систем алгебраических уравнений, основанный на свойстве ортогональности оптимальных оценок. Это свойство утверждает: если оценка $\varphi(n)$ доставляет минимум среднеквадратической ошибки восстановления, определяемой функционалом $M[\|\varphi^{(n)} - \varphi\|^2]$, и шум регистрации подчиняется нормальному распределению, то выполняются условия

$$\mu_{nj} = M[\langle e^{(n)}, f^{(j)} \rangle] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где $e^{(n)} = f^{(n+1)} - R\varphi^{(n)}$, $f^{(j)}$ — векторы измерений, по которым строились оценки $\varphi^{(j)}$ (это означает, что вектор невязки $e^{(n)}$ «перпендикулярен» всем векторам измерений $f^{(j)}$, по которым строились предыдущие оценки).

Попытаемся использовать это свойство для адаптации по параметру регуляризации матричного алгоритма восстановления, построенного на основе метода сопряженных градиентов (7). Трудность заключается в том, что имеется только один вектор f проекционных данных. Для преодоления этой трудности из проекций вектора f сформируем два «непересекающихся» вектора $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ размерностей N_1 , N_2 соответственно, причем $N_1 + N_2 \leq N$. Заметим, что этим векторам измерений соответствуют две матрицы $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ размерностью $N_1 \times M$, $N_2 \times M$, составленные из строк, которые вошли в $f^{(1)}$, $f^{(2)}$.

Далее по вектору $f^{(1)}$ строится на основе алгоритма (7) вектор $\varphi_{\alpha}^{(1)}$ (при некотором заданном α) и вычисляется функционал

$$J(\alpha) = [\langle f^{(2)} - R^{(2)}\varphi_{\alpha}^{(1)}, f^{(1)} \rangle]^2. \quad (11)$$

В качестве α берется значение $\hat{\alpha}$, при котором функционал $J(\alpha)$ достигает минимума. Для нахождения $\hat{\alpha}$ можно использовать любой алгоритм одномерной минимизации [6]. После этого при найденном параметре $\hat{\alpha}$ строится регуляризованное решение $\varphi_{\hat{\alpha}}$ по всему вектору f на основе соотношений (7).

В случае строчного алгоритма (8), (9) имеется N измерений и минимизируемый функционал можно записать в виде [10]

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{L} \sum_{l=n-L+1}^n e^{(n)} f_{i(l)}^2, \quad (12)$$

где $e^{(n)} = f_{i(n+1)} - r_{i(n+1)}\varphi^{(n)}$. Физический смысл этого функционала прост: усреднение по ансамблям $e^{(n)}$, $f_{i(n)}$ в функционале (10) заменено усреднением по реализации, так как при заданном α имеется только по одному значению $e^{(n)}$ и $f_{i(n)}$.

Используя соотношения (8), (9), функционал (12) можно записать в виде

$$J_n(\alpha) = F_n^2(y_{n+1} - \beta_{n-1}(\alpha)h_n y_n - g_{n-1}(\alpha)h_n z_{i(n)}^{(n-1)})^2, \quad (13)$$

$$\text{где } F_n^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=n-L+1}^n f_{i(l)}^2, \quad h_n = r_{i(n+1)} W_\varphi^{-1} r_{i(n)}^T, \quad y_n = f_{i(n)} - r_{i(n)} \varphi_\alpha^{(n-1)}; \quad y_{n+1} = f_{i(n+1)} - r_{i(n+1)} \varphi_\alpha^{(n-1)},$$

$$\beta_{n-1}(\alpha) = \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha \sigma_{i(n)}^2 + \langle r_{i(n)}, W_\varphi^{-1} r_{i(n)} \rangle}; \quad g_{n-1}(\alpha) = \frac{\lambda_{n-1} \alpha \sigma_{i(n)}^2}{\alpha \sigma_n^2 + \langle r_{i(n)}, W_\varphi^{-1} r_{i(n)} \rangle}.$$

Следует отметить, что в отличие от работы [10], где минимизируемый функционал являлся квадратичным многочленом относительно искомого параметра, здесь функционал (13) зависит от α нелинейным образом через $\beta_{n-1}(\alpha)$, $g_{n-1}(\alpha)$. Поэтому для нахождения точки минимума $\hat{\alpha}_n$ следует использовать численные методы одномерной минимизации.

Нужно заметить, что выбором α из условия минимума (13) удастся компенсировать также неточность задания дисперсий $\sigma_{i(n)}^2$, так как в выражениях $\beta_{n-1}(\alpha)$, $g_{n-1}(\alpha)$ параметр α присутствует в произведении $\alpha \sigma_{i(n)}^2$.

Работу адаптивного алгоритма можно представить следующими шагами:

Шаг 1 (для $n = 0, 1, 2, \dots, n_s - 1$).

Регуляризованное решение $\varphi_\alpha^{(n)}$ строится при некотором заданном α по соотношениям (8), (9).

Шаг 2 (включение адаптации при $n = n_s$ и далее при $n = n_s + 1, n_s + 2, \dots$):

— вычисляется значение $\hat{\alpha}_n$, доставляющее минимум (13);

— вычисляется решение $\varphi_\alpha^{(n)}$ по формулам (8), (9) при значении $\hat{\alpha}_n$.

Следует отметить, что если дисперсия $\sigma_{i(n)}^2$ не зависит от n , то целесообразно адаптацию выполнять на ограниченном числе итераций (например, 3—5 итераций), а затем построение решений осуществлять с найденным значением параметра. При необходимости через некоторое число итераций можно вновь включить процедуру адаптации. Таким образом, работа адаптивного алгоритма восстановления состоит из интервалов, на которых включена или выключена процедура адаптации параметра регуляризации к изменяющимся условиям эксперимента.

Результаты вычислительного эксперимента. Предложенные алгоритмы адаптации были исследованы на многочисленных вычислительных экспериментах. Остановимся на результатах одного из них.

Изображение $\varphi(x, y)$ задавалось на сетке 15×15 и состояло из гладких и контрастных деталей (такой размер был взят из соображений возможности использования как матричного, так и строчного алгоритма). Проекционные данные снимались для 15 углов, равномерно расположенных в интервале $0 \div 180^\circ$. Число лучей-сумм для каждого угла равно 20. Таким образом, матрица R алгебраического аналога преобразования Радона имела размеры 225×300 . Вычисленные лучи-суммы искажались нормально распределенным шумом с относительным уровнем δ , и эти данные являлись исходными для алгоритмов восстановления.

На рис. 1 приведена зависимость относительной среднеквадратической ошибки восстановления

$$\Delta_{\text{отн}}^{(n)}(\alpha) = (M[\|\varphi_\alpha^{(n)} - \varphi\|])^{1/2} / \|\varphi\| \quad (14)$$

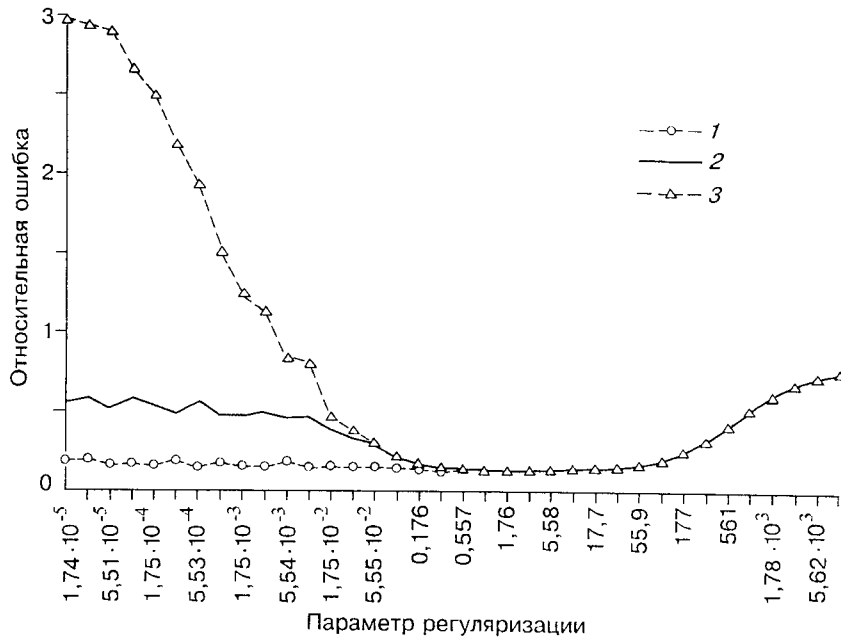


Рис. 1

от параметра α , где операция математического ожидания была заменена усреднением по 50 реализациям, а число итераций равнялось следующему: для графика 1 — $n = 110$, 2 — $n = 225$, 3 — $n = 450$. Из этих графиков видно, во-первых, наличие оптимального значения $\alpha_{\text{опт}} = 1$, доставляющего минимум $\Delta_{\text{отн}}^{(n)}(\alpha)$, во-вторых, то, что неудачное задание α может существенно (на порядок и более) увеличить ошибку восстановления.

Так как ошибка восстановления $e_{\alpha}^{(n)} = \varphi_{\alpha}^{(n)} - \varphi$ является случайной величиной, то, на наш взгляд, наиболее полную информацию о работе того или иного способа выбора параметра алгоритма восстановления даст гистограмма

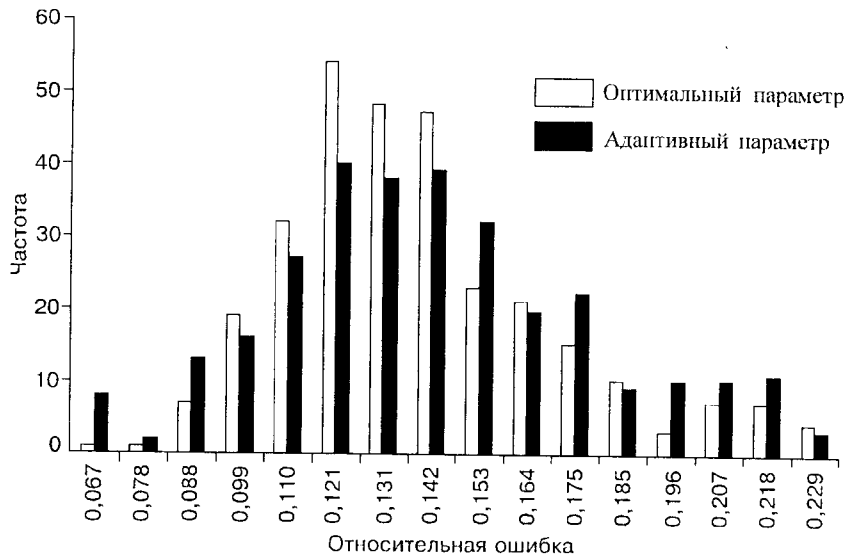


Рис. 2

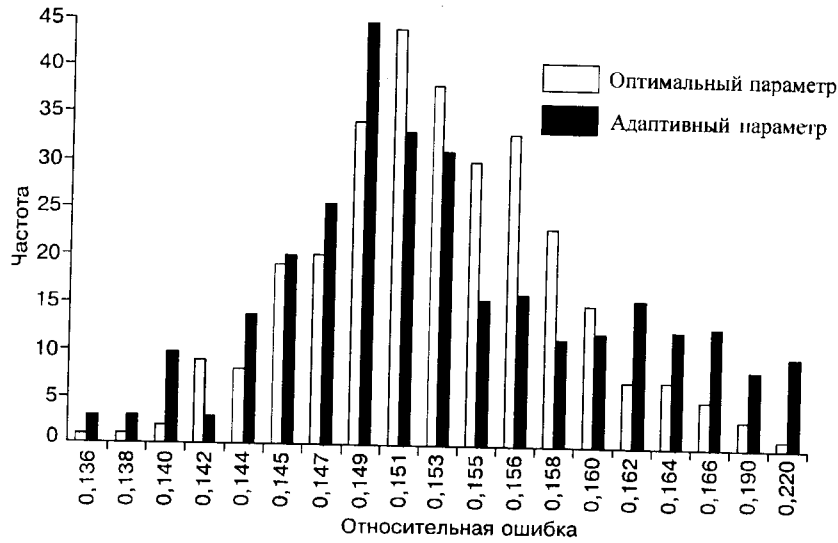


Рис. 3

частот появления того или иного значения ошибки и выборочное среднее этих значений.

Поэтому на рис. 2 приведена гистограмма частот ошибок восстановления алгоритма сопряженных градиентов при $\alpha = \alpha_{\text{опт}} = 1$ и $\alpha = \hat{\alpha}$. Значение $\hat{\alpha}$ находилось из минимума функционала (11) (объем выборки 300, число итераций 110). Видно, что ошибки восстановления распределены в одной области, однако для адаптивного алгоритма наблюдается увеличение частоты для больших ошибок восстановления. Это следует из значений выборочных средних: 0,136 и 0,144 соответственно.

На рис. 3 представлена гистограмма частот ошибок восстановления строчным алгоритмом при $\alpha = \alpha_{\text{опт}} = 15$ и $\alpha = \hat{\alpha}$. Значение $\hat{\alpha}$ оценивалось из минимума функционала (12) (число итераций 200). Наблюдается аналогичная

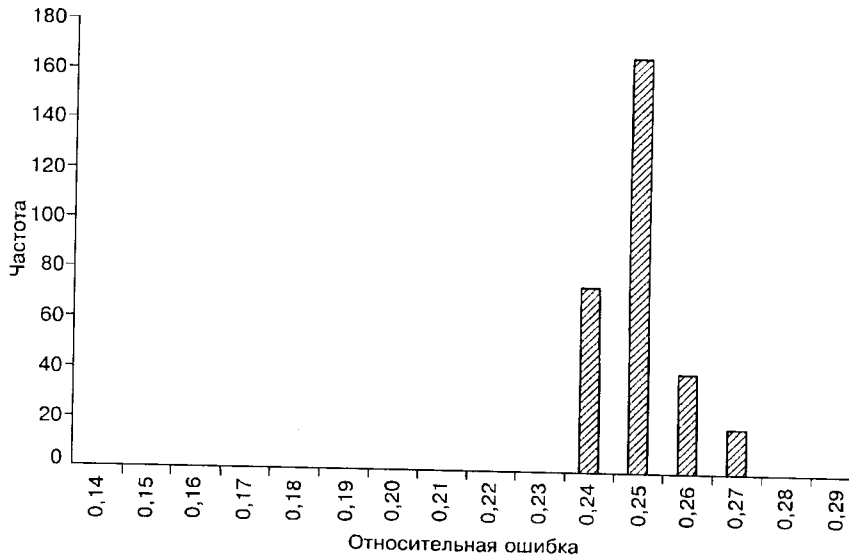
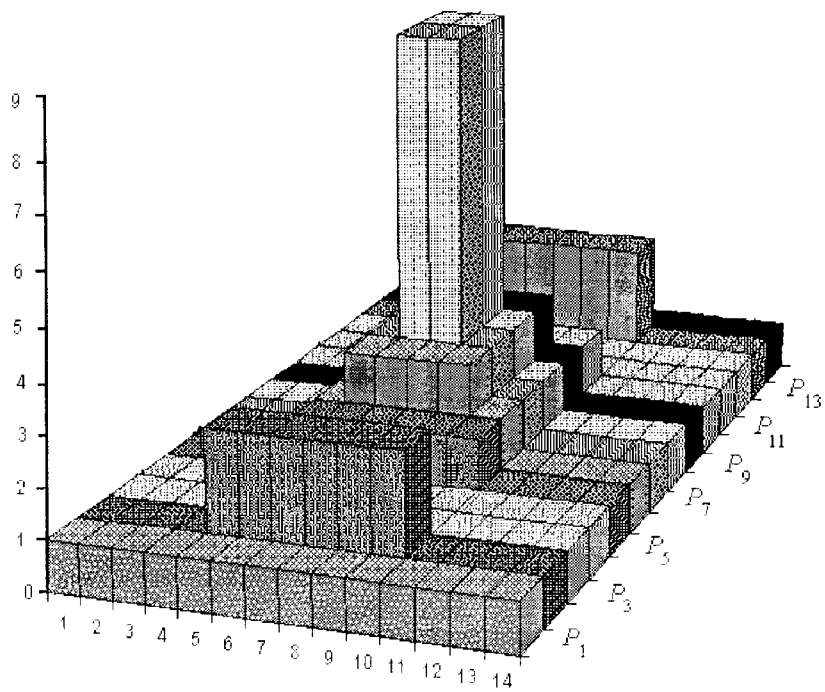
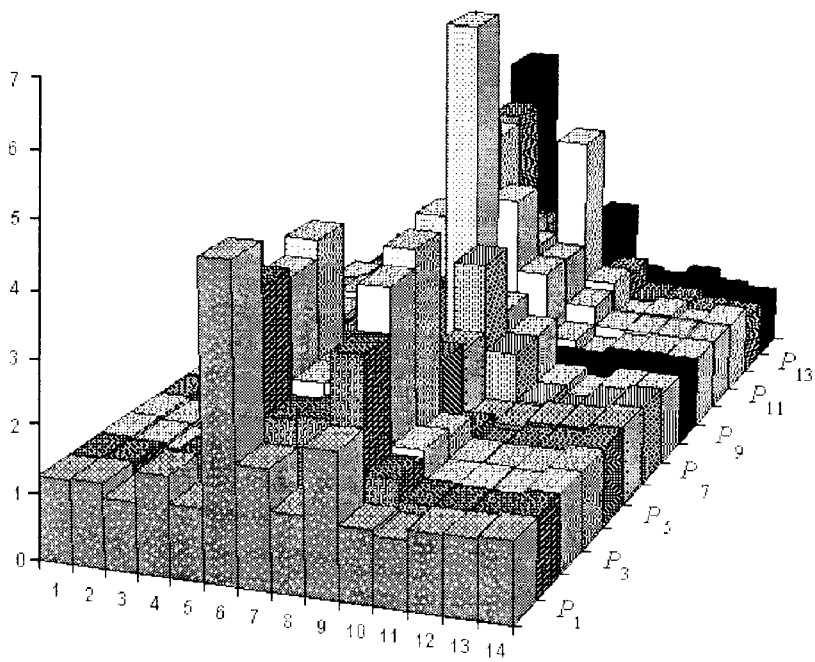


Рис. 4



Puc. 5



Puc. 6

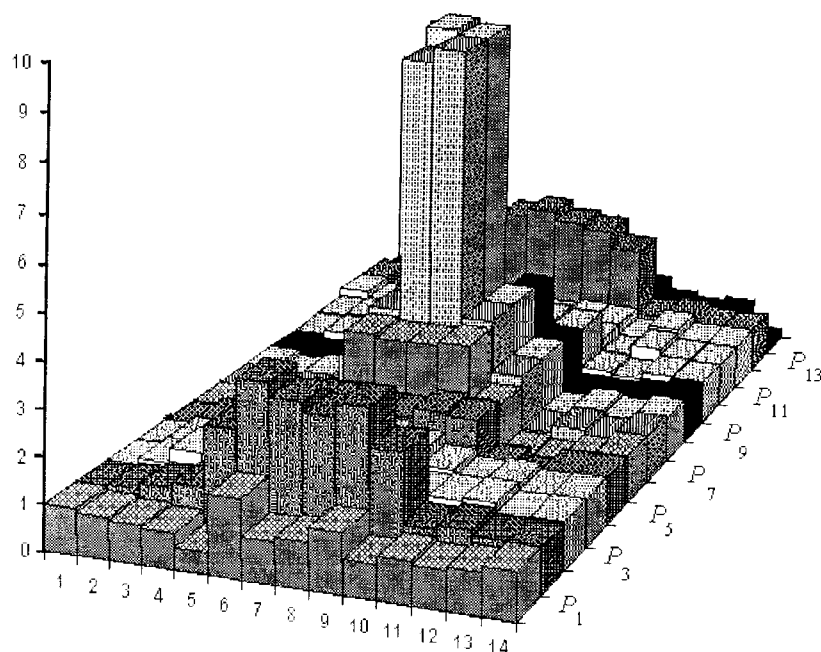


Рис. 7

картина в распределении ошибок восстановления. Значения выборочных средних 0,1506 и 0,1586. Следует отметить, что строчный алгоритм имеет более высокую ошибку восстановления по сравнению с матричным (сравните 0,136 и 0,1506).

На рис. 4 приведена гистограмма частот ошибок восстановления строчным алгоритмом при завышенном значении параметра $\alpha = 10 \cdot \alpha_{\text{опт}} = 150$ (такое завышение часто встречается на практике). Видно существенное смещение ошибок в область больших значений, что иллюстрирует и выборочное среднее, равное 0,2512.

На рис. 5 показан фрагмент изображения размером 14×14 пикселей, содержащий области высокой и низкой интенсивности изменения сигнала. На рис. 6 данное изображение восстановлено базовым матричным алгоритмом при использовании 10 источников, расположенных полукругом, и 10 приемников, расположенных на одной прямой. Видно, что конечность данных обуславливает наличие существенных артефактов в восстановленном изображении. На рис. 7 изображение при тех же условиях восстановлено адаптивным по параметру регуляризации матричным алгоритмом. Данный рисунок демонстрирует высокую эффективность адаптации по параметру регуляризации в условиях априорной неопределенности.

Обобщая результаты этого и других экспериментов, можно сделать вывод, что предложенные в работе адаптивные алгоритмы восстановления позволяют достаточно успешно решить проблему выбора неизвестных параметров алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983.
2. Hanson K. M., Wecksung G. W. Local basis-function approach to computed tomography // Appl. Opt. 1985. 24, N 23. P. 4028.

3. Бронников А. В., Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г. Итерационные алгоритмы в задачах томографии полупрозрачных сред. Новосибирск, 1989. (Препр. /СО АН СССР. ИТПМ; 18-89).
4. Лаврентьев М. М., Воскобойников Ю. Е., Зеркаль С. М. Сейсмическая томография сред с квазилинейным изменением скорости, содержащих поглощающие включения // Физика Земли. 1995. № 6. С. 26.
5. Воскобойников Ю. Е. Методы решения некорректных задач параметрической идентификации: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
7. Sensor Y. Row-action methods for huge and sparse systems and their applications // STAM Rev. 1981. 23, N 4. P. 444.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седелников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
10. Воскобойников Ю. Е., Кисленко Н. П. Адаптивный рекуррентный регуляризирующий алгоритм восстановления сигналов и изображений // Автометрия. 1997. № 4. С. 55.

Поступила в редакцию 30 июня 1997 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!