

УДК 681.3.08

Т. А. Алиев, О. К. Нусратов
(Баку, Азербайджан)

ПОЗИЦИОННО-ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫЙ АНАЛИЗ
ЦИКЛИЧЕСКИХ И СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Предложены алгоритмы позиционно-широотно-импульсного анализа и позиционно-избирательной дискретизации циклических и случайных сигналов, позволяющие по сравнению со спектральным анализом уменьшить среднеквадратичное отклонение, упростить обработку измерительной информации и повысить достоверность решения некоторых задач диагностики и идентификации.

Введение. Одним из известных и широко применяемых методов обработки сигналов является спектральный анализ [1]. Однако сигналы многих циклических объектов имеют сложную форму и сопровождаются значительными помехами, поэтому применение спектрального анализа для обработки этих сигналов в некоторых случаях оказывается недостаточно эффективным. Это объясняется тем, что для адекватного описания таких сигналов необходимо использовать большое количество гармонических составляющих, что усложняет процедуру их обработки и анализа [1, 2].

При использовании спектрального анализа периодический сигнал $x(t)$ в каждом цикле разлагается на гармонические составляющие:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t), \quad (1)$$

где $a_0/2$ — среднее за период T значение функции $x(t)$; a_n, b_n — амплитуды синусоиды и косинусоиды с частотой $n\omega$.

Для обеспечения необходимой адекватности описания сигнала требуется выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^N \lambda^2(i\Delta t) \leq S, \quad (2)$$

где $\lambda^2(i\Delta t)$ — квадраты отклонений между суммой правой части равенства (1) и отсчетами сигнала $x(t)$ в моменты дискретизации $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$ с шагом Δt ; S — допустимая величина среднеквадратичного отклонения; $N = \frac{T}{\Delta t}$.

Уменьшение величины S , согласно равенству (1), сопровождается резким возрастанием количества гармонических составляющих, что соответственно усложняет процедуру обработки и анализа сигнала.

Рассматриваемый алгоритм разложения исходного сигнала на позиционно-широотно-импульсные составляющие (ПШИС) позволяет по сравнению со спектральным анализом уменьшить среднеквадратичное отклонение S , упростить процедуру анализа и обработки периодических сигналов. При этом обработка этих сигналов производится с учетом влияния дисперсии помехи.

Разложение исходного сигнала на позиционно-широко-импульсные составляющие. Известно, что в процессе аналого-цифрового преобразования периодического сигнала $x(t)$ в каждом шаге дискретизации Δt происходит его амплитудное квантование, т. е. диапазон возможных его изменений разбивается на m интервалов квантования и значение сигнала, попавшего в m -й интервал, при

$$m\Delta x - \Delta x/2 \leq x(t) \leq m\Delta x + \Delta x/2 \quad (3)$$

относится к центру интервала $m\Delta x$. В процессе аналого-цифрового преобразования в каждом шаге дискретизации Δt итерационно формируются сигналы ПШИС $q_k(i\Delta t)$ в виде кода 1 или 0. При этом на первом шаге сравнивается текущее значение сигнала $x(i\Delta t)$ с величиной $2^{n-1}\Delta x$ при $x(i\Delta t) \geq 2^{n-1}\Delta x$, сигнал $q_{n-1}(i\Delta t)$ приравнивается единице и по разности $x(i\Delta t) - 2^{n-1}\Delta x = x_{r(n-2)}$ определяется величина остатка $x_{r(n-2)}$. В случае $x(i\Delta t) < 2^{n-1}\Delta x$ сигнал $q_{n-1}(i\Delta t)$ приравнивается нулю и разность остается неизменной. В следующей итерации процедура повторяется. В результате в течение цикла сигнал $x(i\Delta t)$ разлагается на сигналы $q_k(i\Delta t)$, принимающие значение 1 или 0 и имеющие вес соответственно своим позициям.

Если в процессе дискретизации значение исходного сигнала $x(i\Delta t)$ не меняется, комбинации этих кодов остаются неизменными и соответственно комбинации временных интервалов $T_{k1_1}, T_{k0_1}, T_{k1_2}, T_{k0_2}, \dots$ в каждом цикле оказываются постоянными величинами. Здесь $T_{k1_1}, T_{k1_2}, \dots$ соответствуют промежуткам времени, когда для ПШИС выполняется условие $q_k(i\Delta t) = 2^k(\Delta x = 1)$; $T_{k0_1}, T_{k0_2}, \dots$ — промежуткам времени, когда выполняется условие $q_k(i\Delta t) = 2^k(\Delta x = 0)$, при этом $T_k = T_{k1} + T_{k0}$.

В каждом цикле сумма всех ПШИС будет равна

$$x(i\Delta t) \approx q_{n-1}(i\Delta t) + q_{n-2}(i\Delta t) + \dots + q_0(i\Delta t) = x^*(i\Delta t). \quad (4)$$

Здесь в моменты времени t_i разность между действительным значением исходного сигнала $x(i\Delta t)$ и суммой ПШИС будет равна

$$x(i\Delta t) - x^*(i\Delta t) = \lambda(i\Delta t). \quad (5)$$

Принимая во внимание выражение (3), можно записать следующее неравенство:

$$\lambda(i\Delta t) \leq \Delta x/2.$$

Учитывая, что величина погрешности $\lambda(i\Delta t)$ подчиняется равновероятному закону распределения [2, 3], следует считать справедливым равенство

$$P\left[\lambda(i\Delta t) < \frac{\Delta x}{2}\right] \approx P\left[\lambda(i\Delta t) > \frac{\Delta x}{2}\right], \quad (6)$$

где P — знак вероятности.

Исходя из (5), (6), можно считать, что сумма квадратов отклонений $\lambda(i\Delta t)$ в моменты $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n$ с учетом их знака будет близка к нулю, и благодаря этому неравенство (2) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^N \lambda^2(i\Delta t) \leq \Delta x. \quad (7)$$

Из неравенства (7) следует, что если изменение исходного сигнала приведет к изменению соответствующих параметров больше чем Δx , то это будет отражаться на соответствующих параметрах $q_k(i\Delta t)$. При этом уже в начальной стадии изменения исходного сигнала в процессе формирования параметров в

виде комбинации соответствующих временных интервалов ПШИС $q_{n-1}(i\Delta t)$, $q_{n-2}(i\Delta t)$, ..., $q_0(i\Delta t)$ соответствующего цикла будет обнаружено различие аналогичных параметров в предыдущих циклах.

Таким образом, как это следует из выражений (3) и (5)—(7), благодаря использованию ПШИС, появляется возможность путем выбора величины Δx обеспечить обнаружение даже микроизменений в исходном сигнале.

Применение ПШИС для анализа случайных сигналов. В настоящее время для анализа случайных процессов в основном широко применяются алгоритмы спектрального и корреляционного анализа [2]. Часто оба метода используются совместно. Однако как совместное, так и отдельное их применение при решении некоторых задач экспериментального анализа приводит к неоправданным усложнениям. В связи с этим представляют как теоретический, так и практический интерес принципы и алгоритмы, сочетающие преимущества обоих методов и позволяющие значительно упростить решение этих задач. Для этой цели случайный сигнал можно представить при помощи соответствующих ПШИС. Анализ алгоритмов обработки случайных сигналов с применением ПШИС показывает, что они создают возможность решения определенного класса задач диагностики и идентификации. При этом процесс анализа по сравнению с вышеуказанными алгоритмами значительно упрощается.

Это связано с тем, что алгоритмы обработки $q_k(i\Delta t)$ на практике реализуются достаточно просто, так как каждая позиционно-случайная функция принимает всего два значения, при этом анализ случайного процесса сигналами ПШИС будет аналогичен анализу циклических процессов. Отличие заключается в том, что в этом случае время наблюдения случайного процесса T рассматривается как время одного периода и допускается, что в последующем этот процесс повторяется. Исходя из этого, для каждого ПШИС можно определить среднюю частоту $\langle f_k \rangle$ и период $\langle T_k \rangle$. Тогда, допуская, что случайный сигнал $x(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным нулю, среднее значение нулевых и единичных полупериодов сигналов $q_k(i\Delta t)$ при достаточном времени наблюдения можно определить по формуле

$$\langle T_k \rangle = \langle T_{k1} \rangle + \langle T_{k0} \rangle, \quad (8)$$

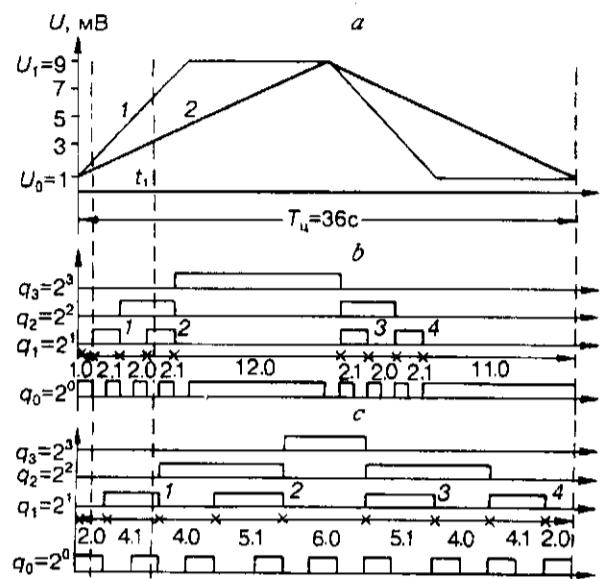
где

$$\langle T_{k1} \rangle = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} T_{k1j}, \quad \langle T_{k0} \rangle = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{\gamma} T_{k0j}. \quad (9)$$

Здесь γ — количество единичных и нулевых полупериодов ПШИС за время наблюдения; j — порядковые номера сигналов ПШИС q_k -й позиции.

Для достаточного времени наблюдения T оценки периодов $\langle T_k \rangle$ ПШИС будут неслучайными величинами. Следовательно, используя их, можно значительно упростить решение ряда технических задач, которые традиционно решаются с помощью оценок статистических и спектральных характеристик случайных процессов. Например, в задачах диагностики стохастических процессов сигнал $x(t)$, доставляющий информацию о состоянии объекта, можно представить в виде комбинаций указанных оценок ПШИС $q_k(i\Delta t)$. При этом изменение состояния объекта приведет к соответствующему изменению комбинации их средних временных интервалов $\langle T_{q_0} \rangle$, $\langle T_{q_1} \rangle$, ..., $\langle T_{q_{n-1}} \rangle$, которые можно принять как информативные признаки. Если при помощи этих комбинаций сформировать множество всевозможных неисправных состояний объекта W_1, W_2, \dots, W_n , то их следует использовать для решения задачи диагностики.

На рисунке изображен сигнал датчика усилий системы телединамометрирования глубинно-насосного оборудования нефтяных скважин, характеризующий его техническое состояние. При нормальном состоянии оборудования кривая имеет трапецеидальный вид (кривая 1, рисунок, а) с периодом T_u , амплитудой U_1 и постоянной составляющей U_0 . Для простоты изложения примем, что $U = 9$ мВ и квантование по амплитуде производится с шагом



$\Delta x = 1$ мВ. В этом случае $n \geq \log_2 9 = 4p$, т. е. для дискретизации исходного сигнала по амплитуде потребуется $n = 4$ двоичных разрядов q_3, q_2, q_1, q_0 . На рисунке, *b* приведена последовательность ПШИС, на которые разлагается сигнал. Как видно из рисунка, частота встречаемости 1 и 0 в позициях и соответственно ширина единичных сигналов и пауз при заданных значениях Δx и Δt определяются амплитудным значением исходного сигнала. Так, например, в момент времени t_1 $q_3 = 0, q_2 = 1, q_1 = 1, q_0 = 0$, т. е. амплитуда сигнала находится 4-разрядным двоичным кодом 0110, что соответствует 6 мВ и т. д.

Следует отметить, что в каждой из позиций q_k по оси t при разложении образуются импульсы, ширина которых определяется непрерывной последовательностью единиц в соответствующих позициях. При этом в одной и той же позиции q_k могут образовываться несколько импульсов с различной шириной, связанных с изменениями параметров исходного сигнала.

В приведенном примере при шаге дискретизации по времени $\Delta t = 1$ с длительность цикла исходного сигнала составляет $T_{\text{ц}} = 36$ с. При этом в соответствующих позициях q_k (так, например, в позиции q_1) за цикл образуется двоичная последовательность вида 1.0, 2.1, 2.0, 2.1, 12.0, 2.1, 2.0, 2.1, 11.0, где первые цифры обозначают длительность интервала в секундах, а вторые определяют, единицам или нулям соответствует этот интервал. Аналогичные двоичные последовательности образуются и в других позициях соответственно.

При изменении технического состояния глубинно-насосного оборудования (так, например, при возникновении неисправности типа «прихват плунжера» [3] насоса) кривая 1 (см. рисунок, *a*) принимает вид соответствующей кривой 2, и в соответствии с этим, как показано на рисунке, *c*, изменяется позиционное расположение и параметры длительностей и пауз ПШИС. Так, например, в момент времени t_1 в связи с изменением формы исходного сигнала образуются новые (q_k) значения: $q_0 = 1, q_1 = 1, q_2 = 0, q_3 = 0$, т. е. амплитуде исходного сигнала соответствует двоичный код 1100, при этом в соответствующих позициях q_k образуются новые двоичные последовательности, в частности, в q_1 образуется двоичная последовательность вида 2.0, 4.1, 4.0, 5.1, 6.0, 5.1, 4.0, 4.1, 2.0.

Очевидно, что при других неисправностях получают другие комбинации указанных временных интервалов, по которым можно диагностировать техническое состояние глубинно-насосного оборудования нефтяных скважин.

Позиционно-избирательная дискретизация случайных сигналов. Рассмотрим возможность определения шага дискретизации исходного сигнала Δt с учетом значения заданной погрешности ε_0 с помощью частотных свойств младшего ПШИС.

Предположим, что циклический сигнал, представленный в виде непрерывной функции $x(i\Delta t)$, на интервале наблюдения T разбит на φ равных участков ΔT , достаточно малых, чтобы их можно было интерполировать линейными функциями с погрешностью не более ε_0 . Также допустим, что функция подвергается аналого-цифровому преобразованию с текущей частотой f_v с заведомо малым шагом квантования по времени Δt , и по уровню Δx :

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_v &\ll \Delta t, \\ \Delta x &\leq \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При этом приращение сигнала на i -м участке составит Δx_i и количество отсчетов n_ψ за время ΔT будет равно

$$n_\psi = \frac{\Delta T}{\Delta t_v}.$$

В силу неравенств (10) многие из этих отсчетов будут повторяться, так как будет иметь место следующее равенство:

$$P[x_i] \approx P[x_{i+1}]. \quad (11)$$

Поэтому значения двоичных кодов отсчетов $x(i\Delta t)$ в каждом последующем шаге $x[(i+1)\Delta t]$ квантования в интервале ΔT по существу также будут повторяться. Благодаря этому частота f_{a_0} младшего ПШИС $q_0(t)$, которую можно определить по формуле

$$f_{a_0} = \frac{1}{\langle T_{q_0} \rangle}, \quad (12)$$

где $\langle T_{q_0} \rangle$ — среднее значение периода сигналов $q_0(t)$, будет значительно меньше текущей частоты дискретизации f_v . При этом от увеличения или уменьшения значения f_v в пределах выполнения условия (10) значение f_{a_0} заметно не изменится. Это означает, что для случая, когда между частотой дискретизации f_d , найденной по теореме отсчетов, и текущей частотой f_v будет иметь место неравенство

$$f_v \gg f_d, \quad (13)$$

значение f_{a_0} для всех реализаций одного и того же стационарного случайного процесса или циклического сигнала для данного АЦП можно считать постоянной величиной, т. е.

$$f_{q_0} \approx \text{const}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что для анализируемого сигнала, выбирая значение f_v так, чтобы соблюдались условия (10), можно определить значение f_{a_0} . В этом случае между частотой f_d , найденной по известной методике, и f_{a_0} всегда будет выполняться условие

$$f_d \geq f_{q_0}. \quad (15)$$

При этом, если учесть, что формирование каждой ПШИС производится поступлением двух импульсов на младший разряд АЦП, условие (15) можно представить в виде

$$f_n \geq 2f_{q_0}. \quad (16)$$

Исходя из этого условия, шаг дискретизации можно выбрать в соответствии с неравенством

$$\Delta t \geq \frac{1}{2f_{q_0}}. \quad (17)$$

В этом случае для определения f_{q_0} необходимо по отсчетам анализируемого сигнала после его преобразования и записи в память с частотой f , определить средний период импульсов младшей позиционно-случайной функции $\langle T_{q_0} \rangle$ и среднюю частоту их следования по выражениям

$$\langle T_{q_0} \rangle = \langle T_{1q_0} \rangle + \langle T_{0q_0} \rangle, \quad (18)$$

$$f_{q_0} = \frac{1}{\langle T_{q_0} \rangle}. \quad (19)$$

Тогда значение $\langle T_{1q_0} \rangle$, $\langle T_{0q_0} \rangle$ можно найти в соответствии с выражением (9).

Для гарантированного обеспечения погрешности в пределах ϵ_0 Δt целесообразно выбрать исходя из условия

$$\Delta t \geq \frac{1}{(2-5)f_{q_0}}. \quad (20)$$

Таким образом, программное определение шага дискретизации Δt , согласно вышеописанному алгоритму, сводится к следующему:

- 1) с частотой f , в течение времени наблюдения T производится преобразование исходного сигнала $x(i\Delta t)$ с помощью АЦП и образуется файл его отсчетов;
- 2) по формуле (18) определяется $\langle T_{q_0} \rangle$;
- 3) по формуле (12) находится f_{q_0} ;
- 4) Δt определяется по формуле $\Delta t = \frac{1}{5f_{q_0}}$.

Экспериментальные исследования показали, что в некоторых случаях вследствие влияния помехи $\epsilon(t)$ ПШИС младших разрядов q_k в недостаточной мере отражает характер изменения исходного сигнала $g_i = x(i\Delta t) + \epsilon(t)$. Поэтому временные параметры младших разрядов ПШИС, величина которых соизмерима и меньше величины

$$\sqrt{D_\epsilon} > |q_k(i\Delta t)|,$$

где D_ϵ — дисперсия помехи, значение которой можно определить по выражению [4, 5]

$$D(\epsilon) = (1/n) \sum_{i=1}^n [\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i + \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+2} - 2\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+1}],$$

не позволяют найти Δt с достаточной точностью.

В старших разрядах ПШИС влияние помехи не отражается на среднем значении длительности единичных T_{k1} и нулевых T_{k0} полупериодов, которые определяются путем усреднения временных интервалов в соответствии с (8) и

(9). Учитывая, что для случайных стационарных сигналов с нормальным законом распределения можно принять приближенное равенство

$$\langle T_{q_0} \rangle \approx \frac{1}{2} \langle T_{q_1} \rangle \approx \frac{1}{2} \langle T_{q_2} \rangle \approx \dots \approx \frac{1}{2} \langle T_{q_{n-1}} \rangle,$$

Δt целесообразно определить при помощи среднего периода импульсов старших разрядов ПШИС, что позволяет представить выражение (17) в виде

$$\Delta t \geq \frac{1}{2 \cdot 2^k f_k}. \quad (21)$$

Например, для q_1 -го ПШИС формулу (22) можно представить в виде

$$\Delta t \geq \frac{1}{2 \cdot 2f_1}. \quad (22)$$

Для гарантированного обеспечения погрешности в пределах ϵ_0 формулы (21), (22) соответственно примут вид:

$$\Delta t \geq \frac{1}{(2-5)2^k f_k}, \quad (23)$$

$$\Delta t \geq \frac{1}{(2-5)2f_1}. \quad (24)$$

В тех случаях, когда помеха ощутимо влияет на частоту нулевого q_0 ПШИС, использование этой формулы позволит значительно уменьшить ее влияние при определении Δt .

Рассмотрим применение формул (20), (24) для определения Δt на вышеуказанном примере. Допустим, что максимальная амплитуда трапецеидального сигнала составляет 256 мВ, время цикла 36 с, длительность переднего фронта 8 с, длительность вершины 10 с, время спада 8 с и время нулевого значения 10 с и для его преобразования применяется 8-разрядное АЦП.

Если принять, что частота преобразования АЦП составляет 1 кГц, то при этом за 8 с состояние первого разряда АЦП изменится максимум 128 раз, так как за это время амплитуда сигнала достигает максимально возможного значения — 256 мВ. Состояние второго разряда изменится 64 раза.

В течение цикла, т. е. за 36 с, состояние первого разряда изменится 512 раз, а состояние второго — 256 раз. Очевидно, что средняя частота первого разряда составляет $512 : 36 = 16$ Гц, а второго — $256 : 36 = 8$ Гц соответственно.

Если применить формулы (20), (24), получим для f_{q_0} -го

$$\Delta t = \frac{1}{5f_{q_0}} = \frac{1}{80} = 0,0125 \text{ с},$$

для f_{q_1} -го

$$\Delta t = \frac{1}{5 \cdot 2f_{q_1}} = 0,0125 \text{ с}.$$

Таким образом, для преобразования указанного сигнала с помощью 8-разрядного АЦП достаточно осуществить преобразование с шагом 0,01 с, что соответствует частоте дискретизации 100 Гц.

В то же время для данного сигнала на практике применение теоремы отсчетов наталкивается на ряд трудностей, и при этом частота среза получается более 1000 Гц.

Приведенный пример показывает, что программным путем по результатам обработки файлов, сформированных по результатам преобразования ис-

ходного сигнала, можно достаточно просто определить необходимую частоту дискретизации с учетом разрядности АЦП. Таким образом, в отличие от традиционных методов здесь при определении шага дискретизации автоматически также учитываются метрологические характеристики самого АЦП. Так, если при преобразовании рассматриваемого сигнала использовалось 9-разрядное АЦП, то найденная частота дискретизации была бы равна 200 Гц. Очевидно, что такая взаимосвязь найденного шага дискретизации и разрешающей способности измерительного прибора также позволит избежать избыточности частоты дискретизации, тогда как при использовании традиционных методов эта специфическая особенность аналого-цифрового преобразования практически не учитывается.

Заключение. Показано, что при представлении исходного сигнала в виде ПШИС, которые формируются при его аналого-цифровом преобразовании, путем выбора значения Δx можно обеспечить заданное среднеквадратичное отклонение S , что позволяет повысить достоверность результатов при решении некоторых задач диагностики и идентификации по сравнению со спектральным и корреляционным анализом. При этом также упрощается процесс обработки исходного сигнала, так как составляющие разложения представляют собой по существу широтно-импульсные сигналы, принимающие значение 1 и 0, обработка которых обеспечивается простыми алгоритмами и программно-техническими средствами.

Частотные свойства ПШИС позволяют определить шаг дискретизации программными средствами. При заданном значении погрешности это сводится к программному определению средней частоты изменения соответствующей ПШИС исходного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983.
2. Алиев Т. А. Экспериментальный анализ. М.: Машиностроение, 1991.
3. Алиев Т. А. Автоматический контроль и диагностика скважинных штанговых насосных установок. М.: Недра, 1988.
4. Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф. Алгоритм уменьшения погрешностей оценки корреляционной функции сигнала с шумом // Автометрия. 1995. № 4. С. 105.
5. Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф. Алгоритмы определения дисперсии и погрешностей, вызываемых помехами случайных сигналов // Автометрия. 1997. № 3. С. 80.

Поступила в редакцию 20 октября 1997 г.