

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3

1998

УДК 681.323

В. Г. Гетманов, П. А. Кузнецов  
(Москва)

ОЦЕНИВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ  
НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-СИНУСОИДАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ  
С ЛИНЕЙНОЙ АМПЛИТУДНОЙ И ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЯМИ

Рассматривается оценивание нестационарных амплитуд и частот узкополосных сигналов, реализованное с использованием технологии локальной аппроксимации на основе кусочно-синусоидальных моделей с линейной амплитудной и частотной модуляциями. Предлагается алгоритм аппроксимации с предварительно вычисленными массивами базисных функций и весовых коэффициентов. Для уменьшения необходимого объема ОЗУ и повышения быстродействия вычислений вводятся сопряженные базисные функции, векторные коэффициенты Фурье и матричные весовые коэффициенты, позволяющие организовать часть вычислений по рекуррентным формулам. Оценивается эффективность разработанного алгоритма. Приводится пример.

**Постановка задачи.** Оценивание мгновенных (или текущих) значений нестационарных параметров узкополосных сигналов – временных амплитудных и частотных зависимостей – является достаточно часто встречающейся задачей в практике обработки экспериментальной информации, например, при измерениях нестационарных доплеровских частот (скоростей) или амплитудной и частотной демодуляций сигналов акустического, радио- и оптического диапазонов. Методы нахождения оценок параметров рассматриваемых сигналов известны и связаны, как правило, с подходами, основанными на марковской теории нелинейной фильтрации применительно к статистической радиотехнике [1, 2] или использующими спектральный анализ [3, 4]. Однако их реализация, если нестационарности в сигнале на заданном ограниченном временном интервале существенны, оказывается технически трудновыполнимой и возможной лишь с введением упрощающих предположений, значительно снижающих точность.

Для решения рассматриваемой задачи с учетом отмеченных особенностей предлагается воспользоваться технологией аппроксимации, базирующейся на разработанном аппарате построения локальных модельных функций [5]. С этой целью заданный временной интервал с дискретизованными наблюдениями сигнала  $y(Ts)$ ,  $T$  – шаг дискретизации,  $s = 0, 1, \dots, N_f - 1$ , разбивается на  $m$  локальных (малых) интервалов по  $N$  точек,  $Nm = N_f$ . На каждом локальном интервале наблюдения сигнала аппроксимируются

локальными моделями  $y_m(p(c, Ti), Ti) = y_m(c, Ti)$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$ ;  $p(c, Ti)$  – векторные локальные модели нестационарных параметров сигналов;  $c$  – вектор параметров. Оценки нестационарных параметров сигнала вычисляются на основе локальных оценок  $p(c^0, Ti)$  и представляют собой последовательности кусочно-непрерывных функций.

1. В [6, 7] описано применение простейшего варианта локальных моделей в виде кусочно-синусоидальных функций с постоянными амплитудами и частотами:

$$y_m(c, Ti) = a \cos \omega Ti + b \sin \omega Ti, \quad c^T = (a, b, \omega). \quad (1)$$

В данной модели  $p(c, Ti) = (p_1(c, Ti), p_2(c, Ti))$ ,  $p_1(c, Ti) = (a^2 + b^2)^{1/2}$  – амплитуда,  $p_2(c, Ti) = \omega$  – частота на локальном интервале, принятые постоянными. Для наблюдений на локальном интервале формируется функционал  $S(c, y)$ , который минимизируется по вектору  $c$ :

$$S(c, y) = \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - y_m(c, Ti))^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - a \cos \omega Ti - b \sin \omega Ti)^2, \quad (2)$$

$$c^0 = \arg \left\{ \min_c S(c, y) \right\}.$$

В модель (1) амплитуды  $a$  и  $b$  входят линейно, частота  $\omega$  – нелинейно, вследствие этого минимизация  $S(c, y)$  осуществляется прямыми (поисковыми) методами. В частности, поиск может реализовываться на основе одномерного частотного перебора; в определенном частотном диапазоне задаются фиксированные  $\omega_k$ , для которых модель наблюдений (1) становится линейной с базисными функциями  $\psi_1(k, Ti) = \cos \omega_k Ti$ ,  $\psi_2(k, Ti) = \sin \omega_k Ti$ ,  $y_m(a, b, k, Ti) = a \psi_1(k, Ti) + b \psi_2(k, Ti)$ . Из необходимых условий экстремума функционала  $S(c, y)$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - a \psi_1(k, Ti) - b \psi_2(k, Ti)) (-\psi_1(k, Ti)) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - a \psi_1(k, Ti) - b \psi_2(k, Ti)) (-\psi_2(k, Ti)) = 0$$

записывается линейная система для частично оптимальных амплитуд модели:

$$a_{11}(k) a^0(k) + a_{12}(k) b^0(k) = b_1(k), \quad (4)$$

$$a_{21}(k) a^0(k) + a_{22}(k) b^0(k) = b_2(k).$$

Коэффициенты Фурье  $b_1(k)$ ,  $b_2(k)$  и весовые коэффициенты  $a_{11}(k)$ ,  $a_{12}(k)$ ,  $a_{21}(k)$ ,  $a_{22}(k)$  для (4) находятся по формулам, полученным из (3):

$$b_1(k) = \sum_{i=0}^{N-1} y(Ti)\psi_1(k, Ti), \quad b_2(k) = \sum_{i=0}^{N-1} y(Ti)\psi_2(k, Ti), \quad (5)$$

$$a_{11}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_1^2(k, Ti), \quad a_{12}(k) = a_{21}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_1(k, Ti)\psi_2(k, Ti),$$

$$a_{22}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_2^2(k, Ti).$$

Частичная остаточная сумма  $S(a^0(k), b^0(k), k, y) = \bar{S}(k, y)$  минимизируется на основе одномерного перебора по  $\omega_k$  (для целочисленных  $k$ ):

$$S(k, y) = \sum_{i=0}^{N-1} y^2(i) - a^0(k)b_1(k) - b^0(k)b_2(k), \quad k^0 = \arg\left\{\min_k S(k, y)\right\},$$

и локальные оценки параметров модели сигнала представляются следующим образом:  $\omega^0 = \omega_{k^0}$ ,  $a^n = a^0(k^0)$ ,  $b^v = b^v(k^v)$ . Значения координат вектора  $p(c^v, Ti)$

$$p_1(c^0, Ti) = (a^{0^2} + b^{0^2})^{1/2}, \quad p_2(c^0, Ti) = \omega^0, \quad i=0, 1, \dots, N-1,$$

принимаются как оценки нестационарных амплитуд и частот узкополосного сигнала на локальном интервале. Для заданного временного интервала оценки рассматриваемых нестационарных параметров сигнала образуют последовательности кусочно-постоянных функций.

2. Повышение точности оценивания по сравнению с п. 1 реализуется при использовании в качестве локальных моделей кусочно-синусоидальных функций с постоянными амплитудами и линейной частотной модуляцией [8]:

$$y_m(c, Ti) = a \cos(\omega Ti + \beta(Ti)^2/2) + b \sin(\omega Ti + \beta(Ti)^2/2), \quad (6)$$

$$c^T = (a, b, \omega, \beta),$$

где  $p_1(c, Ti) = (a^2 + b^2)^{1/2}$ ,  $p_2(c, Ti) = \omega + \beta Ti$  — частота, изменяющаяся по линейному закону. В модель (6) по-прежнему амплитуды  $a$ ,  $b$  входят линейно, параметры  $\omega$ ,  $\beta$  — нелинейно, при фиксированной паре параметров  $\omega_k$ ,  $\beta_n$  модель (6) становится линейной с базисными функциями

$$\psi_1(k, n, Ti) = \cos(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2), \quad \psi_2(k, n, Ti) = \sin(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2),$$

$$y_m(a, b, k, n, Ti) = a\psi_1(k, n, Ti) + b\psi_2(k, n, Ti).$$

Функционал  $S(c, y)$  и соответствующая линейная система записываются аналогично (2)–(4). Вычисление коэффициентов Фурье  $b_1(k, n)$ ,  $b_2(k, n)$  и весовых коэффициентов  $a_{11}(k, n)$ ,  $a_{12}(k, n)$ ,  $a_{22}(k, n)$  осуществляется по формулам, сходным с (5). Нахождение оптимальных параметров модели осуществляется путем минимизации частичной остаточной суммы  $S(a^0(k, n), b^0(k, n), k, n, y) = S(k, n, y)$  по  $\omega_k, \beta_n$  (для целочисленных  $k, n$ ):

$$(k^0, n^0) = \arg \left\{ \min_{k, n} S(k, n, y) \right\}, \quad \omega^0 = \omega_{k^0, n^0}, \quad \beta^0 = \beta_{k^0, n^0},$$

$$a^0 = a^0(k^0, n^0), \quad b^0 = b^0(k^0, n^0).$$

Кусочно-постоянные и кусочно-линейные функции

$$p_1(c^0, Ti) = (a^0 + b^0)^{1/2}, \quad p_2(c^0, Ti) = \omega^0 + \beta^0 Ti, \quad i=0, 1, \dots, N-1,$$

принимаются в качестве локальных оценок нестационарных параметров исходного сигнала. Оценка нестационарной частоты сигнала на заданном временном интервале представляет собой последовательность кусочно-линейных функций.

3. Во многих измерительных задачах пренебрежение изменениями параметров сигналов на локальных интервалах, как это сделано в п. 1 и частично в п. 2, в ряде случаев приводит к большим погрешностям оценивания. Повышение точности может происходить при введении в модели наблюдений линейной амплитудной и частотной модуляций:

$$y_m(c, Ti) = (A + BTi) \cos(\omega Ti + \beta(Ti)^2 / 2 + \varphi), \quad c^T = (A, B, \omega, \beta, \varphi). \quad (7)$$

Учет в локальных моделях функций амплитуд  $p_1(c, Ti) = A + BTi$  и частот  $p_2(c, Ti) = \omega + \beta Ti$  на локальных (малых) временных интервалах позволяет обеспечить большую адекватность моделей и обрабатываемых наблюдений узкополосных сигналов. При этом увеличение адекватности происходит за счет повышения размерности моделей, что влечет за собой увеличение количества вычислений для оптимизации частичных остаточных сумм. Так, модели пп. 1, 2, зависящие от одного и двух нелинейных параметров, требуют организации одномерных и двумерных поисковых процедур. Видно, что выражение (7) зависит от трех нелинейных параметров  $\omega, \beta, \varphi$ : организация соответствующего трехмерного оптимизационного поиска приводит к недопустимо большим временным затратам.

4. Решается задача построения эффективного алгоритма оценивания параметров модели (7) на основе: а) предварительного вычисления массивов базисных функций и весовых коэффициентов (что может быть реализовано на ПЭВМ с большим объемом ОЗУ); б) возможного сведения в данном частном случае трехмерного поиска к модификации двумерного.

**Решение.** Пусть для определенности нелинейные параметры  $\omega_k = \omega_{01} + \Delta\omega k$ ,  $\beta_n = -\beta_{01} + \Delta\beta n$  изменяются в прямоугольнике  $\omega_{01} \leq \omega_k < \omega_{02}$ ,  $|\beta_n| \leq \beta_{01}$ ,  $\Delta\omega = (\omega_{02} - \omega_{01})/k$ ,  $\Delta\beta = 2\beta_{01}/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, k$ ,  $n = 0, 1, \dots, n$ ; фазовый

угол принимает значения  $\varphi_l = \Delta\varphi^l$ ,  $\Delta\varphi = 2\pi/\bar{l}$ ,  $l=0,1,\dots,\bar{l}-1$ . При фиксированных  $\omega_k$ ,  $\beta_n$ ,  $\varphi_l$  модель (7) становится линейной по  $A, B$ :

$$y_n(A, B, k, n, l, Ti) = A\psi_1(k, n, l, Ti) + B\psi_2(k, n, l, Ti),$$

где  $\psi_1(k, n, l, Ti)$ ,  $\psi_2(k, n, l, Ti)$  – базисные функции:

$$\psi_1(k, n, l, Ti) = \cos\varphi_l \cos(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2) - \sin\varphi_l \sin(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2),$$

$$\psi_2(k, n, l, Ti) = Ti\psi_1(k, n, l, Ti).$$

Параметр  $\varphi_l$  в выражения для базисных функций входит таким образом, что он может быть вынесен за знак суммирования при вычислении коэффициентов Фурье и весовых коэффициентов. Это позволяет организовать их нахождение в рекуррентной форме. Введем сопряженные базисные функции:

$$\psi_{01}(k, n, l, Ti) = \cos\varphi_l \sin(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2) + \sin\varphi_l \cos(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2),$$

$$\psi_{02}(k, n, l, Ti) = Ti\psi_{01}(k, n, l, Ti).$$

Вычислим значения базисных функций  $\psi_1, \psi_{01}$  для индекса  $l+1$  (для  $\psi_2, \psi_{02}$  аналогично):

$$\begin{aligned} \psi_1(k, n, l+1, Ti) &= (\cos\varphi_l \cos\Delta\varphi - \sin\varphi_l \sin\Delta\varphi) \cos(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2) - \\ &\quad - (\sin\varphi_l \cos\Delta\varphi + \cos\varphi_l \sin\Delta\varphi) \sin(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2), \\ \psi_{01}(k, n, l+1, Ti) &= (\cos\varphi_l \cos\Delta\varphi - \sin\varphi_l \sin\Delta\varphi) \sin(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2) + \\ &\quad + (\sin\varphi_l \cos\Delta\varphi + \cos\varphi_l \sin\Delta\varphi) \cos(\omega_k Ti + \beta_n(Ti)^2/2). \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем на основе (8) рекуррентные формулы для  $\psi_1, \psi_{01}$  и  $\psi_2, \psi_{02}$ :

$$\begin{aligned} \psi_1(k, n, l+1, Ti) &= \cos\Delta\varphi \cdot \psi_1(k, n, l, Ti) - \sin\Delta\varphi \cdot \psi_{01}(k, n, l, Ti), \\ \psi_{01}(k, n, l+1, Ti) &= \sin\Delta\varphi \cdot \psi_1(k, n, l, Ti) + \cos\Delta\varphi \cdot \psi_{01}(k, n, l, Ti), \\ \psi_2(k, n, l+1, Ti) &= \cos\Delta\varphi \cdot \psi_2(k, n, l, Ti) - \sin\Delta\varphi \cdot \psi_{02}(k, n, l, Ti), \\ \psi_{02}(k, n, l+1, Ti) &= \sin\Delta\varphi \cdot \psi_2(k, n, l, Ti) + \cos\Delta\varphi \cdot \psi_{02}(k, n, l, Ti). \end{aligned} \quad (9)$$

Сформируем из базисных функций векторы  $\bar{\psi}_1(k, n, l, Ti)$ ,  $\bar{\psi}_2(k, n, l, Ti)$ , для (9) определим переходную матрицу  $D(\Delta\varphi)$  и перепишем (9) в векторно-матричной форме:

$$\bar{\psi}_1(k, n, l, Ti) = \begin{pmatrix} \psi_1(k, n, l, Ti) \\ \psi_{01}(k, n, l, Ti) \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_2(k, n, l, Ti) = \begin{pmatrix} \psi_2(k, n, l, Ti) \\ \psi_{02}(k, n, l, Ti) \end{pmatrix},$$

$$D(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi & -\sin \Delta\varphi \\ \sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\bar{\psi}_1(k, n, l+1, Ti) = D(\Delta\varphi)\bar{\psi}_1(k, n, l, Ti), \quad \bar{\psi}_2(k, n, l+1, Ti) = D(\Delta\varphi)\bar{\psi}_2(k, n, l, Ti).$$

Умножив равенства (10) справа и слева на  $y(i)$  и просуммировав их, запишем рекуррентные выражения для векторных коэффициентов Фурье  $\bar{b}_1(k, n, l)$ ,  $\bar{b}_2(k, n, l)$ :

$$\begin{aligned} \bar{b}_1(k, n, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}_1(k, n, l, Ti)y(i), & \bar{b}_2(k, n, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}_2(k, n, l, Ti)y(i), \\ \bar{b}_1(k, n, l+1) &= D(\Delta\varphi)\bar{b}_1(k, n, l), & \bar{b}_2(k, n, l+1) &= D(\Delta\varphi)\bar{b}_2(k, n, l). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем матричные весовые коэффициенты:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}(k, n, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}_1(k, n, l, Ti)\bar{\psi}_1^T(k, n, l, Ti), \\ \bar{a}_{12}(k, n, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}_1(k, n, l, Ti)\bar{\psi}_2^T(k, n, l, Ti), \\ \bar{a}_{22}(k, n, l) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\psi}_2(k, n, l, Ti)\bar{\psi}_2^T(k, n, l, Ti). \end{aligned}$$

Из (10) запишем рекуррентные выражения для матричных весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}(k, n, l+1) &= D(\Delta\varphi)\bar{a}_{11}(k, n, l)D^T(\Delta\varphi), \\ \bar{a}_{12}(k, n, l+1) &= D(\Delta\varphi)\bar{a}_{12}(k, n, l)D^T(\Delta\varphi), \\ \bar{a}_{22}(k, n, l+1) &= D(\Delta\varphi)\bar{a}_{22}(k, n, l)D^T(\Delta\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

Поиск по  $l$  для частичной остаточной суммы может быть проведен без предварительного вычисления базисных функций, коэффициентов Фурье и весовых коэффициентов, зависящих от  $l$ . Полагаем, что в ОЗУ сформированы четыре трехмерных массива базисных функций  $\psi_1(k, n, 0, Ti)$ ,  $\psi_{01}(k, n, 0, Ti)$ ,  $\psi_2(k, n, 0, Ti)$ ,  $\psi_{02}(k, n, 0, Ti)$  и на их основе вычислены двумерные массивы матричных весовых коэффициентов  $\bar{a}_{11}(k, n, 0)$ ,  $\bar{a}_{12}(k, n, 0)$ ,  $\bar{a}_{22}(k, n, 0)$ . С использованием базисных функций и локальных наблюдений  $y(i)$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$ , определяются двумерные массивы векторных коэффициентов Фурье  $\bar{b}_1(k, n, 0)$ ,  $\bar{b}_2(k, n, 0)$ . Используя массивы векторных коэффициентов Фурье и матричных весовых коэффициентов для  $l=0$  как начальные и применяя рекуррентные формулы (11), (12), можно вычислять коэффициенты Фурье и весовые коэффициенты при заданных  $k, n$  для

$l=1,2,\dots,\bar{l}-1$ . Частично оптимальные линейные параметры  $A^0(k,n,l)$ ,  $B^0(k,n,l)$  определяются из линейной системы:

$$\begin{aligned} a_{11,11}(k,n,l)A^0(k,n,l) + a_{12,11}(k,n,l)B^0(k,n,l) &= b_{11}(k,n,l), \\ a_{12,11}(k,n,l)A^0(k,n,l) + a_{22,11}(k,n,l)B^0(k,n,l) &= b_{21}(k,n,l), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $a_{11,11}(k,n,l)$ ,  $a_{12,11}(k,n,l)$ ,  $a_{22,11}(k,n,l)$  представляют собой элементы, принадлежащие первой строке и первому столбцу для матриц  $\bar{a}_{11}(k,n,l)$ ,  $\bar{a}_{12}(k,n,l)$ ,  $\bar{a}_{22}(k,n,l)$ ;  $b_{11}(k,n,l)$ ,  $b_{21}(k,n,l)$  – первые элементы векторов  $\bar{b}_1(k,n,l)$ ,  $\bar{b}_2(k,n,l)$ . Минимизация частичной остаточной суммы

$$\begin{aligned} S(k,n,l,y) &= \sum_{i=0}^{N-1} y^2(i) - A^0(k,n,l)b_1(k,n,l) - B^0(k,n,l)b_2(k,n,l), \\ (k^0, n^0, l^0) &= \arg \left\{ \min_{k,n,l} S(k,n,l,y) \right\} \end{aligned}$$

позволяет найти оптимальные параметры локальной модели и локальные оценки параметров сигнала:

$$\begin{aligned} A^0 &= A^0(k^0, n^0, l^0), \quad B^0 = B^0(k^0, n^0, l^0), \quad \omega^0 = \omega_{k^0, n^0, l^0}, \\ \beta^0 &= \beta_{k^0, n^0, l^0}, \quad p_1(c^0, Ti) = A^0 + B^0 Ti, \quad p_2(c^0, Ti) = \omega^0 + \beta^0 Ti. \end{aligned}$$

**Оценка эффективности.** Эффективность предложенного алгоритма рассмотрим с точки зрения анализа оценок требуемых объемов памяти ОЗУ и оценок временных затрат на вычисления. Будем полагать с определенной степенью приближения, что время работы алгоритма в основном определяется количеством выполненных операций умножения длительностью  $t_y$ , и пренебрежем временем выполнения сложений и других коротких операций. Примем, что на один элемент массива данных в ОЗУ отводится 4 байта (1/256 Кбайт). Сделаем сравнение алгоритмов пп. 1–3 в предположении, что их работа базируется на предварительно вычисленных базисных функциях и весовых коэффициентах. Количественные оценки эффективности сделаны для одного локального интервала.

1. Для алгоритма п. 1 объем ОЗУ, отводимый на хранение массивов базисных функций и весовых коэффициентов, составляет величину  $V_1 = (2N\bar{k} + 3\bar{k})/256$  Кбайт. Временные затраты работы алгоритма складываются из времени вычисления коэффициентов Фурье  $T_{11} = 2N\bar{k}t_y$ , времени вычисления амплитуд  $T_{12} = 4\bar{k}t_y$  и времени вычисления частичных остаточных сумм  $T_{13} = 2\bar{k}t_y$ ,  $T_1 = T_{11} + T_{12} + T_{13}$ ;  $T_1 = (2N\bar{k} + 6\bar{k})t_y$ .

2. Для алгоритма п. 2 аналогичные параметры принимают значения  $V_2 = (2N\bar{k}\bar{n} + 3\bar{k}\bar{n})/256$  Кбайт,  $T_2 = (2N\bar{k}\bar{n} + 6\bar{k}\bar{n})t_y$ .

3. Для алгоритма п. 3 массивы сопряженных базисных функций, сопряженных коэффициентов Фурье и весовых коэффициентов занимают в

ОЗУ объем  $V_3 = (4N\bar{k}\bar{n} + 9\bar{k}\bar{n})/256$  Кбайт. Временные затраты работы алгоритма состоят из времени вычисления векторных коэффициентов Фурье  $T_{31} = (4N\bar{k}\bar{n} + 2 \cdot 4\bar{k}\bar{n}(\bar{l} - 1))t_v$ , времени вычисления матричных весовых коэффициентов  $T_{32} = (3 \cdot 8\bar{k}\bar{n}(\bar{l} - 1))t_v$ , времени вычисления амплитуд  $T_{33} = 4\bar{k}\bar{n}\bar{l}t_v$  и времени вычисления частичных остаточных сумм  $T_{34} = 2\bar{k}\bar{n}\bar{l}t_v$ ;  $T_3 = (4N\bar{k}\bar{n} + 38\bar{k}\bar{n}\bar{l} - 32\bar{k}\bar{n})t_v$ . При использовании прямого трехмерного перебора требуемый объем ОЗУ составляет величину  $\bar{V}_3 = (2N\bar{k}\bar{n}\bar{l} + 3\bar{k}\bar{n}\bar{l})/256$  Кбайт, а временные затраты принимают значение  $\bar{T}_3 = (2N\bar{k}\bar{n}\bar{l} + 6\bar{k}\bar{n}\bar{l})t_v$ .

Из анализа формул для  $V_1, V_2, V_3$  ( $\bar{V}_3$ ) и  $T_1, T_2, T_3$  ( $\bar{T}_3$ ) возможно сравнение эффективности алгоритмов пп. 1–3. Так, зависимость относительных затрат по объему ОЗУ  $\delta_V(N, \bar{l}) = \bar{V}_3/V_3(N, \bar{l})$ , как следует из выражений для  $\bar{V}_3, V_3$ , при больших  $N$  примерно линейно меняется от  $\bar{l}$ :  $\delta_V(\bar{l}) \approx 0,5\bar{l}$ . На рис. 1 представлены оценки зависимостей относительных затрат по времени  $\delta_T(N, \bar{l}) = \bar{T}_3/T_3(N, \bar{l})$ , вычисленные для  $\bar{l}_1 = 20, \bar{l}_2 = 40, \bar{l}_3 = 80, \bar{l}_4 = 160$  (кривые 1–4 соответственно). Введение модифицированного двумерного поиска, для которого предложены сопряженные базисные функции, векторные коэффициенты Фурье и матричные весовые коэффициенты, позволило обеспечить существенную экономию ОЗУ и повышение быстродействия по отношению к алгоритму, который напрямую реализует трехмерный поиск. Приведем результаты расчетов для  $N = 128, k = 50, \bar{n} = 50, \bar{l} = 50$ . При этих параметрах массивы данных алгоритмов пп. 1–3 занимают объемы ОЗУ:  $V_1 = 50,58$  Кбайт,  $V_2 = 2,47$  Мбайт,  $V_3 = 4,096$  Мбайт,  $\bar{V}_3 = 123,51$  Мбайт, время вычислений составляют величины:  $T_1 = 1,31 \cdot 10^4 t_v, T_2 = 6,55 \cdot 10^5 t_v, T_3 = 5,95 \cdot 10^6 t_v, \bar{T}_3 = 3,27 \cdot 10^7 t_v$ . Видно, что алгоритм п. 3 эффективнее по занимаемому объему ОЗУ и временным затратам в среднем на порядок и более алгоритма прямого трехмерного перебора.

**Пример.** Проиллюстрируем работу алгоритма п. 3 на задаче оценивания параметров сигнала с синусоидальной амплитудной и частотной

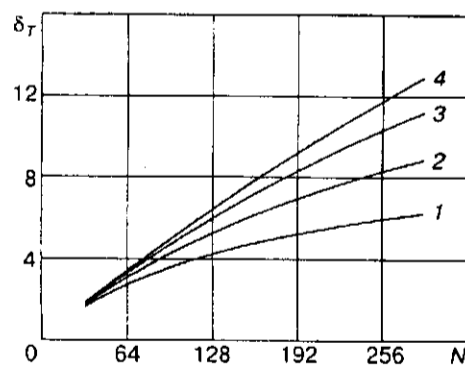


Рис. 1. Оценки относительных временных затрат



модуляциями. Нестационарная амплитуда  $A(Ti)$  и частота  $f(Ti)$ ,  $i=0,1,\dots, N_f-1$ , изменяются следующим образом:

$$A(Ti) = A_0(1 + \mu_A \sin(2\pi f_A Ti + \phi_A)), \quad (14)$$

$$f(Ti) = f_0 + \mu_f^f \cos(2\pi f_m Ti + \phi_m).$$

Модельные наблюдения для такого сигнала находятся из соотношения

$$y(i) = A(Ti) \cos \phi(Ti) + W(i), \quad \dot{\phi}(Ti) = 2\pi f(Ti),$$

где  $\phi(Ti)$  – фазовая функция, связанная с частотой через производную. Параметры из (14) принимают значения:  $A_0 = 1$ ,  $f_0 = 50 \cdot 10^3$  Гц,  $f_A = 0,75 \times 10^3$  Гц,  $\mu_A = 0,25$ ,  $\phi_A = 1,0$ ,  $f_m = 10^3$  Гц,  $\mu_f^f = 25,61$ ,  $\phi_m = 0$ ,  $T = 5,0 \cdot 10^{-7}$  с. Нормальные случайные числа  $W(i)$ , имитирующие погрешности наблюдений, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию  $\sigma^2, \sigma = 0,25$ . Частота модельного сигнала  $\omega(Ti) = 2\pi f(Ti)$  из (14) изменяется в пределах  $2\pi(f_0 - \mu_f^f) \leq \omega(Ti) \leq 2\pi(f_0 + \mu_f^f)$ ; производная частоты  $\beta(Ti) = \dot{\phi}(Ti)$  подчиняется ограничению  $|\beta(Ti)| \leq \mu(2\pi f_m)^2$ . Приведенные неравенства позволяют выбрать диапазоны поиска по  $\omega_k, \beta_k$ :  $\omega_{01} = 0,8 \cdot 2\pi(f_0 - \mu_f^f)$ ,  $\omega_{02} = 1,2 \cdot 2\pi(f_0 + \mu_f^f)$ ,  $\beta_{01} = 1,2\mu(2\pi f_m)^2$ . Для поиска приняты  $k = \bar{n} = l = 50$ . В алгоритм оценивания  $A^0(Ti)$ ,  $f^0(Ti)$  поступают зашумленные модельные наблюдения  $y(i)$ ; определение оценок зависит от назначаемых параметров процедуры поиска. Оценивание проводилось для локальных интервалов с  $N = 128$ ,  $m = 16$ ,  $Nm = N_f$ ,  $N_f = 2048$ . На рис. 2, 3 кривыми 1 изображены графики функций амплитуд и частот (14), последовательности кусочно-линейных функций (2) представляют собой вычисленные локальные оценки амплитуд и частот, демонстрирующие работоспособность предлагаемого алгоритма. Предварительный анализ показал существенное повышение точности рассматриваемого алгоритма оценивания частоты по сравнению с точностными характеристиками алгоритма п. 2.

Для решения задачи была выбрана ПЭВМ с процессором Intel Pentium, тактовая частота 166 МГц, ОЗУ 32 Мбайт; алгоритм реализован на языке

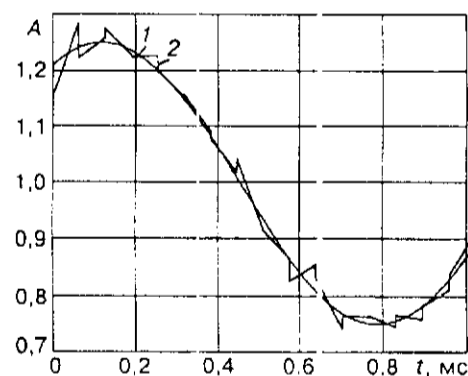


Рис. 2. Оценки нестационарных амплитуд

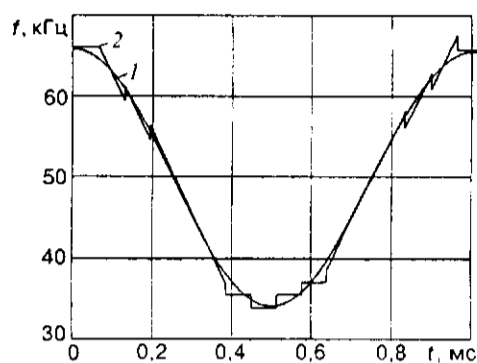


Рис. 3. Оценки нестационарных частот

программирования Паскаль. Проведение вычислений для различных сочетаний  $N$ ,  $k$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{l}$  подтвердило соотношение временных затрат, которые приближенно соответствуют зависимостям, выведенным для  $T_3$ .

Отметим, что дальнейшее повышение точности оценивания нестационарных параметров достигается сглаживанием последовательностей локальных кусочно-линейных амплитуд и частот синусоидальными аппроксимационными сплайнами [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь. 1984.
2. Ярлыков М. С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 2. М.: Мир, 1983.
4. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
5. Гетманов В. Г. Построение тригонометрических моделей в задачах оценивания параметров нестационарных колебательных процессов // Идентификация, измерения характеристик и имитация случайных сигналов: Сб. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. Новосибирск: ИЭТИ, 1991. С. 14.
6. Генкин М. Д., Гетманов В. Г. Использование алгоритма аппроксимации в цифровом фазометре // Измер. техника. 1987. № 9. С. 41.
7. Гетманов В. Г. О частотном подходе в задаче оценивания параметров кусочно-синусоидальных функций // Автометрия. 1992. № 2. С. 93.
8. Гетманов В. Г. Измерение параметров частотной модуляции вибрационных процессов // Вибрационная техника: Тр. науч.-техн. сем. М.: МДНТП, 1989. С. 65.
9. Гетманов В. Г. Восстановление нестационарных зависимостей с использованием аппроксимационных сплайнов // Техн. кибернетика. 1991. № 6. С. 46.

Поступила в редакцию 20 октября 1997 г.