РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1998

УДК 51 : 517.9 : 519.6

В. Д. Бобко, А. А. Нестеров
(Новосибирск)

К ВЫЧИСЛЕНИЮ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В задаче управления, оптимального по минимуму квадрата ошибки, предложен алгоритм вычисления начальных условий сопряженной системы. Получены дифференциальные уравнения для используемых в алгоритме вспомогательных функций. Даны рекомендации по выбору начальных приближений для искомых величин. Обсуждены вопросы сходимости и области применения предлагаемого алгоритма. Приведены результаты численного эксперимента.

1. Реализация оптимальных систем сталкивается с трудностями вычисления начальных условий сопряженной системы. Задача вычисления этих условий остается актуальной, несмотря на большое количество работ, посвященных данной проблеме. Рассмотрим один из методов решения этой задачи для линейной системы с квадратичным критерием качества, фиксированным временем управления и отсутствием ограничений на правом конце траектории.

Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{X} = AX + BU, \qquad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор координат управляемой системы; $U(t)$ – r-мерный вектор управляющих параметров; A и B – матрицы размерностью $(n \times n)$ и $(n \times r)$ соответственно. Управляющие параметры подчинены ограничениям

$$|U_i| \le 1, \qquad i = \overline{1, r}. \tag{2}$$

Необходимо определить управление $U(t)$, удовлетворяющее условиям (2) и минимизирующее функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T X^* DX dt \tag{3}$$

при заданных начальных условиях X_0, фиксированном T и свободном правом конце $X(T)$ траектории управляемой системы. Здесь D – положительно определенная симметричная матрица размерностью $(n \times n)$; «*» – операция транспонирования. К такой постановке сводится, например, задача отработки начального рассогласования с минимумом среднего квадрата ошибки на фиксированном интервале $[0, T]$.

В соответствии с «принципом максимума» [1] поставленная задача решается соотношением

$$U(t) = U(X(t), P(t)) = \arg \max_{|U_i| \le 1} (P(t), AX(t) + BU), \tag{4}$$

где сопряженный вектор $P(t)$ определяется уравнением

$$\dot{P} = DX - A^* P \tag{5}$$

и условиями трансверсальности

$$P(T) = 0. \tag{6}$$

Соотношения (1), (4)–(6) полностью решают поставленную задачу, но в вычислительном отношении они неудобны, так как представляют собой нелинейную краевую задачу. Желательно найти метод, позволяющий по условиям (6) на правом конце траектории вычислять начальные условия $P(0) = C$ сопряженной системы уравнений. В этом случае вместо нелинейной задачи получим задачу Коши, для решения которой разработаны эффективные вычислительные методы.

2. При фиксированном $X(0) = X_0$ решения уравнений (1), (4), (5) являются функциями времени t и начальных условий сопряженной системы $P(0) = C$, т. е.

$$X = X(t, C), \qquad P = P(t, C), \qquad U = U(X(t, C),\ P(t, C)), \tag{7}$$

и, следовательно, условия (6) при фиксированном T дают систему уравнений

$$P(T, C) = 0 \tag{8}$$

относительно начальных условий сопряженной системы.

Решение системы (8) возможно только численными методами, например каким-либо из методов последовательных приближений. Оставляя пока в стороне вопросы сходимости и определения начального приближения, рассмотрим использование метода Ньютона для решения системы уравнений (8).

3. Применение метода Ньютона к уравнению (8) позволяет построить последовательность

$$C^{K+1} = C^K - \left(\frac{\partial P(T, C)}{\partial C} \right)^{-1} \Bigg|_{C = C^K} P(T, C^K), \tag{9}$$

если задано начальное приближение C^0 и существуют матрицы $\left(\frac{\partial P(T,C)}{\partial C}\right)^{-1}$ для $C = C^i$, $i = \overline{0,k}$.

Предположив существование соответствующих частных производных, введем в рассмотрение матрицы

$$X_C(t,C) = \frac{\partial X(t,C)}{\partial C}, \qquad P_C(t,C) = \frac{\partial P(t,C)}{\partial C} \tag{10}$$

размерностью $(n \times n)$ и матрицу

$$U_C(t,C) = U_C(X(t,C),\ P(t,C)) = \frac{\partial U(X,P)}{\partial X} X_C(t,C) + \frac{\partial U(X,P)}{\partial P} P_C(t,C) \tag{11}$$

размерностью $(r \times n)$.

Из (4) следует, что

$$U(t,C) = \operatorname{sign}(B^*(t,C)), \tag{12}$$

где функция $\operatorname{sign}(\cdot)$ понимается как покомпонентная, т. е.

$$U_i(t,C) = \operatorname{sign}((B^* P(t,C))_i), \qquad i = \overline{1,r}. \tag{13}$$

В соответствии с (12) производные от U в (11) следует понимать в обобщенном смысле. Кроме того, в нашем случае U не зависит явно от $X(t,C)$ и, следовательно,

$$U_C(t,C) = \frac{\partial U(B^* P)}{\partial (B^* P)} B^* P_C(t,C). \tag{14}$$

Продифференцировав с учетом (10) и (14) соотношения в (1) и (5) по C, получим матричные дифференциальные уравнения

$$\left.\begin{aligned} \dot X_C &= AX_C + B \frac{\partial U(B^* P)}{\partial (B^* P)} B^* P_C, \\ \dot P_C &= DX_C - A^* P_C, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

которые вместе с очевидными начальными условиями

$$X_C(0,C) = 0, \qquad P_C(0,C) = E \tag{16}$$

(E – единичная матрица) и уравнениями (1) и (5) дают все необходимые соотношения для вычисления интересующей нас матрицы $P_C(T,C)$.

4. Из (13) следует, что матрица $\frac{\partial U(B^* P)}{\partial (B^* P)}$ является диагональной с δ-функциями на диагонали. В связи с этим интегрирование уравнений (15) требует знания моментов смены знаков управляющих параметров, что, собственно, и является главной проблемой в нашей задаче оптимального управления. Эти трудности можно преодолеть использованием более гладкой функции, чем в соотношении (13), но мало отличающейся от

оптимальной по своему воздействию на управляемую систему. Вместо $U_i = \mathrm{sign}((B^* P)_i)$ предлагается использовать, например,

$$U_i^g = \mathrm{th}((gB^* P)_i), \qquad i = \overline{1, r}, \tag{17}$$

при достаточно больших значениях g.

Очевидно, что в этом случае $U(B^* P) = \lim\limits_{g \to \infty} U^g (B^* P)$ и вместо δ-функций при вычислении соответствующих производных можно использовать функции из δ-образующей последовательности

$$\frac{\partial U_i^g ((B^* P)_i)}{\partial (B^* P)_i} = g(1 - \mathrm{th}^2((gB^* P)_i)). \tag{18}$$

Использование соотношений (17) и (18) при достаточно большом g позволяет произвести численное интегрирование систем (1), (5) и (17) без существенной потери точности.

5. Сходимость процедуры (9) зависит от свойств матрицы $P_C(T, C)$ и близости начального приближения C^0 к искомому решению [2]. Проверка достаточных условий сходимости в соответствии с [2] затруднительна, так как требует оценки вторых производных вектора $P(T, C)$ по C. Будем считать, что выполнено требование существования матрицы $P_C^{-1}(T, C)$, и сосредоточим внимание на получении начального приближения C^0 к искомому решению C.

Прежде всего отметим, что при фиксированном X_0 решение уравнения (8) зависит только от времени управления T, т. е.

$$C = C(T). \tag{19}$$

Очевидно, что $C(0) = 0$ и $P_C(0, C) = E$. Если $t_{n1} > 0$ – первый момент смены знака управляющих параметров в (13), то при $0 \le t < t_{n1}$ системы (1) и (5) являются линейными. В этом случае процедура (9) дает решение $C(\tau)$ на первом шаге итерации при $C^0 = 0$ для любого $\tau \in [0, t_{n1}]$. Найденное решение $C(\tau)$ может быть использовано в качестве начального приближения для вычисления $C(\tau + \Delta\tau)$ при достаточно малом $\Delta\tau$. Эту процедуру можно повторять, пока не будет вычислено $C(T)$ для заданного T. Некоторое обоснование описанной процедуры можно получить, исследовав зависимость C от T.

Пусть $P(0) = C(T)$. Тогда из уравнения (5) и условия (8) получим

$$P(T, C(T)) = C(T) + \int_0^T [-A^* P(t, C(T)) + DX(t, C(T))] dt = 0. \tag{20}$$

Последнее равенство должно выполняться тождественно по T. Предполагая существование соответствующих производных, дифференцируем (20) по T. В результате получим

$$\frac{dC(T)}{dT} + [-A^* P(T, C(T)) + DX(T, C(T))] +$$

$$+\int_0^T \left[-A^* P_C(t, C(T)) + DX_C(t, C(T))\right] dt \, \frac{dC(T)}{dT} = 0. \tag{21}$$

Еще раз учитывая (8) и второе из уравнений (15), из (20) находим

$$\frac{dC(T)}{dT} + DX(T, C(T)) + \int_0^T \dot{P}_C(t, C(T)) dt \, \frac{dC(T)}{dT} = 0. \tag{22}$$

Произведя интегрирование в левой части (22), с учетом (8) и (16) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dC(T)}{dT} = -P_C^{-1}(T, C(T)) DX(T, C(T)), \tag{23}$$

которое с начальным условием $C(0) = 0$ полностью решает задачу вычисления вектора $C(T)$.

Уравнение (23) реализует некоторый непрерывный аналог описанной выше процедуры. Его непосредственное интегрирование очень трудоемко, так как вычисление правой части требует решения задачи Коши. Однако при вычисленном значении $C(\tau)$ уравнение (23) можно использовать в процедуре (9) для вычисления $C(\tau + \Delta\tau)$ с начальным приближением

$$C^0(\tau + \Delta\tau) = C(\tau) + \left.\frac{dC(T)}{dT}\right|_{T=\tau} \Delta\tau. \tag{24}$$

6. Несколько слов о выборе параметра g. Выше было отмечено, что этот параметр должен быть достаточно большим. Критерием здесь может служить то, что дальнейшее увеличение g уже мало влияет на результат вычисления вектора C.

Однако параметр g можно использовать для вычисления начального приближения в процедуре (9). Дело в том, что при фиксированном T и использовании $U^g(B^*P)$ вместо $U(B^*P)$ вектор C является функцией g, т. е.

$$C = C(g), \tag{25}$$

При этом вектор-функции X, P и U^g, описывающие поведение управляемой и сопряженной систем, зависят от g как непосредственно, так и через $C(g)$, т. е.

$$X = X(t, g, C(g)), \qquad P = P(t, g, C(g)), \qquad U^g(t, g, C(g)). \tag{26}$$

Дифференцируем уравнения (1) и (5) при $U = U^g$ по g. Обозначив, как и ранее, частные производные соответствующими нижними индексами, и с учетом (15) получим

$$\begin{aligned} \dot{X}_g &= AX_g + BU_g^g, \qquad & X_g(0, g, C(g)) = 0, \\ \dot{P}_g &= -A^* P_g + DX_g, \qquad & P_g(0, g, C(g)) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь, проделав такие же, как и в п. 5, вычисления, получим уравнение для $C(g)$:

$$\frac{dC(g)}{dg} = -P_C^{-1}(T, g, C(g))P_g(T, g, C(g)). \qquad (28)$$

При $g = 0$ уравнения (1) и (5) являются линейными и начальное условие для (28) вычисляется с помощью однократного применения процедуры (9) при $C^0(0) = 0$.

Уравнение (28) может быть использовано аналогично уравнению (23) как для непосредственного вычисления $C(g)$, так и для получения начального приближения в процедуре (9).

7. Для проверки работоспособности предлагаемой методики проведено ее численное моделирование в системе управления четвертого порядка (объект третьего порядка с ПИД-регулятором). Моделирование проводилось с определением начального приближения по п. 5 и с аппроксимацией разрывного управления в соответствии с (17) и (18).

В процессе эксперимента время управления T менялось от 0 до $3\tau_{max}$ (τ_{max} – максимальная постоянная времени объекта). Параметр g изменялся от 1 до 10^{10}.

При $g = 1 \div 100$ заданная точность $\varepsilon = 10^{-12}$ определения C достигалась за один–два шага процедуры (9) при любом значении T и $C^0 = 0$. Для $g > 10^2$ требования к определению C^0 ужесточались, и в соответствии с п. 5 для определения C^0 диапазон изменения T приходилось делить на интервалы $\Delta T \approx 0.1T$. При этом заданная точность достигалась за пять–шесть шагов процедуры (9). Для $g > 10^5$ результат вычислений и сходимость процедуры (9) практически не зависели от g.

Интегрирование уравнений (23) и (28) в процессе эксперимента не проводилось.

8. Предложенные методы вычисления начальных условий сопряженной системы требуют довольно большого объема вычислений. Однако они вполне пригодны как для управления медленно протекающими процессами в реальном времени, так и для получения эталонных траекторий в задаче генерирования правил нечеткого управления [3] или при организации скользящих режимов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. **Бобко В. Д., Золотухин Ю. Н., Нестеров А. А.** О нечеткой динамической коррекции параметров ПИД-регулятора // Автометрия. 1998. № 1. С. 50.

Поступила в редакцию 26 января 1998 г.