

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1

1999

УДК 621.387.2 : 519.685

В. М. Ефимов, А. Н. Колесников
(Новосибирск)

**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ПОСТРОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ
БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ МАССИВОВ
ЦИФРОВЫХ ДАННЫХ**

Увеличение числа сэкономленных битов на элемент массива достигается как увеличением числа отсчетов, по которым производится прогнозирование, так и изменением структуры алгоритмов сжатия. В качестве модели сжимаемого массива используется совокупность цифровых отсчетов стационарного гауссова изотропного поля, заданных на прямоугольной равномерной решетке координат, и предполагается малость дисперсии шума квантования по сравнению с дисперсией постинтерполяционного остатка.

Введение. Ниже рассматривается модификация построчных алгоритмов сжатия, использующих прогнозирование по трем элементам массива [1, 2]. Эта модификация позволяет повысить эффективность алгоритмов до величины, близкой к предельной при сжатии двумерных цифровых массивов данных. Как и в [1, 2], в качестве модели сжимаемого массива используется совокупность квантованных по уровню с шагом q значений стационарного случайного поля, заданных на двумерной прямоугольной решетке координат с шагом дискретизации Δ . Также предполагается, что средний квадрат шума квантования по уровню ($\sim q^2/12$) существенно уступает дисперсии постинтерполяционного остатка (σ_*^2). Для такой модели экономия в битах при сжатии на элемент массива составляет

$$\delta H \approx \log_2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_*^2} \right), \quad (1)$$

где σ_0^2 – дисперсия случайного нормального поля.

Предполагается (как и в [1]), что корреляционная функция поля является функцией марковского типа и при $r \rightarrow 0$

$$\rho(r) \approx 1 - \alpha r, \quad (2)$$

где r – евклидово расстояние между элементами массива, α^{-1} – скорость убывания корреляционной функции.

1. Если значение элемента массива a_0 прогнозируется по значениям n элементов a_i :

$$a_0 = \sum_{i=1}^n w_i a_i, \quad (3)$$

а веса $\{w_i\}$ удовлетворяют соотношению нормировки

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (4)$$

то, как показано в [3], нахождение весов $\{w_i\}$ сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} w_i R_{ij} = R_{0j} \right\}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

где $R_{ij} = 1 + \rho_{ij} - \rho_{in} - \rho_{jn}$ (ρ_{ij} – нормированные коэффициенты корреляции между i -м и j -м элементами массива).

Когда коэффициент корреляции удовлетворяет соотношению (2), т. е.

$$R_{ij} = \alpha(-r_{ij} + r_{in} + r_{jn}), \quad (6)$$

дисперсия постинтерполяционного остатка (прогноза)

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \frac{D}{D_{00}}. \quad (7)$$

Здесь $D = \det \|R_{ij}\|$, D_{00} – минор элемента R_{00} определителя D .
Весовые коэффициенты

$$w_{ij} = \frac{D_j}{D_{00}}, \quad (8)$$

где D_j – главный минор D_{00} , в котором элементы j -го столбца матрицы R_{ij} ($i, j = \overline{1, n-1}$) заменены на элементы столбца свободных членов R_{0j} .

В [1] показано, что эффективность рассматриваемых алгоритмов сжатия (число сэкономленных битов на один элемент массива) в асимптотике выражается следующим соотношением:

$$\delta H \approx -\frac{1}{2} \log_2(\alpha \Delta) + \gamma.$$

Здесь первый член является одинаковым для всех алгоритмов, а величина γ определяется структурой конкретного алгоритма и весовыми коэффициентами предсказателей.

2. Характеристики метода сжатия 3.1 [1] можно улучшить, если изменить структуру предсказателя (рис. 1): для каждого второго элемента строки используется прогноз a , затем для каждого четвертого элемента применяет-

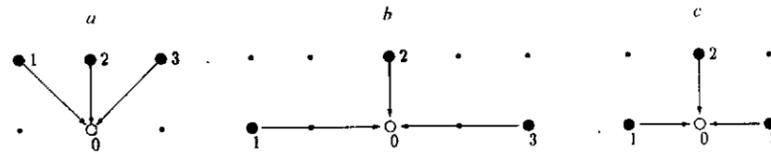


Рис. 1

ся прогноз b , а оставшаяся четверть элементов экстраполируется алгоритмом c . Соотношения для весов и дисперсий постинтерполяционного остатка для алгоритмов a и c приведены в [1] (соотношения (3.5)).

Отметим, что при замене точных значений весов для алгоритма c (см. (3.5) [1]) на величины $w_1 = w_3 = 3/8$, $w_2 = 1/4$ эффективность сжатия практически не меняется. Для алгоритма a в качестве значений весовых коэффициентов вполне приемлемыми оказываются $w_1 = w_3 = 9/32$, $w_2 = 7/16$. Веса и дисперсии для алгоритма b в асимптотике определяются соотношениями: $w_1 = w_3 = 1/4$, $w_2 = 1/2$, а относительная дисперсия

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}. \quad (9)$$

В соответствии с (3.5) [1] и относительными весами алгоритмов $P_a = 1/2$, $P_b = 1/4$, $P_c = 1/4$ получаем поправку γ для этого метода:

$$\gamma = \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{4(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2} - 1} \right) + \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) + \frac{1}{8} \log_2 4(\sqrt{2} - 1) \approx 0,11. \quad (10)$$

Из сравнения с данными табл. 5 [1] видно, что модифицированный метод 3.1 позволяет улучшить значения эффективности при построчном сжатии двумерных изотропных массивов ($\gamma \approx 0,11$ вместо 0,15).

3. Рассмотрим модернизацию алгоритма 3.2 из [1] (см. также [4–6]), заключающуюся в том, что прогнозирование осуществляется по четырем отсчетам (рис. 2).

Обратим внимание на то, что в соответствии с формулой (3.11) из [1] весовой коэффициент при втором отсчете равен

$$w_2 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 1} \approx -0,09. \quad (11)$$

Это означает, что второй отсчет практически не участвует в прогнозировании значения нулевого элемента массива. Если в качестве прогноза использовать полусумму первого и третьего отсчетов, то относительная дисперсия ошибки составит

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2} \approx 1,29. \quad (12)$$

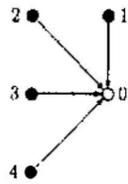


Рис. 2

При использовании для прогноза всех трех отсчетов дисперсия ошибки, как следует из (3.11) [1],

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{2\sqrt{2} - 1} \approx 1,28. \quad (13)$$

Таким образом, в этом варианте алгоритма в случае изотропии сжимаемого массива можно использовать только два отсчета: первый и третий. Для анизотропного поля значения коэффициентов могут существенно измениться.

Аналогичная картина наблюдается, если в этом алгоритме используется четыре отсчета. При этом из (7) и (8) получаем:

$$w_1 = \frac{2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{2(-5 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 0,523,$$

$$w_2 = \frac{-11 + 6\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2(-5 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx -0,077,$$

$$w_3 = \frac{6 - 7\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{10}}{2(-5 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 0,308, \quad (14)$$

$$w_4 = \frac{-7 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2(-5 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} = 0,2463,$$

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{\sqrt{2}(-36 + 19\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + \sqrt{10})}{2(-5 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 1,16.$$

Из (14) следует, что влиянием второго отсчета в случае изотропии можно пренебречь и использовать только первый, третий и четвертый отсчеты. При этом

$$w_1 = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{2(-4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 0,4843,$$

$$w_3 = \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{10}}{(-4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 0,266, \quad (15)$$

$$w_4 = \frac{-6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2(-4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 0,2498,$$

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(-4 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10})} \approx 1,17$$

и дисперсия постинтерполяционного остатка несущественно отличается от случая прогнозирования по четырем отсчетам. Далее, можно придать более простой вид весовым коэффициентам. Полагая $w_1 = 1/2$, $w_3 = w_4 = 1/4$, получим:

$$\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2 \alpha \Delta} = \frac{11 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{8} \approx 1.17. \quad (16)$$

Таким образом, в случае изотропии сжимаемого массива для рассмотренного алгоритма величина γ примерно равна 0,11.

Заключение. Из изложенного выше следует, что изменение структуры двух рассмотренных построчных алгоритмов при соответствующем выборе весов предсказателя позволяет в случае изотропного массива данных улучшить их характеристики ($\gamma \approx 0,11$). Для первого алгоритма экономия в битах составляет около $0,15 - 0,11 = 0,04$ бита, а для второго — $0,18 - 0,11 = 0,07$ бита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Колесников А. Н.** Эффективность некоторых алгоритмов сжатия информации в двумерных массивах данных без потери точности при их восстановлении // Автометрия. 1997. № 6. С. 77.
2. **Ефимов В. М., Золотухин Ю. Н., Колесников А. Н.** Оценка эффективности некоторых алгоритмов сокращения избыточности информации при абсолютной точности воспроизведения // Автометрия. 1991. № 6. С. 93.
3. **Ефимов В. М., Колесников А. Н.** Асимптотически оптимальная интерполяция марковского сигнала и ее применение при дискретном синусном преобразовании // Автометрия. 1993. № 5. С. 72.
4. **Wong S., Zaremba L., Gooden D., Huang H. K.** Radiologic image compression — A review // Proc. IEEE. 1995. 83. P. 194.
5. **Netravali A. N., Huskell B. G.** Digital Pictures, Representation and Compression. N. Y.: Plenum Press, 1991.
6. **Tisher P. E., Worley R. T., Maeder F. J., Goodwin M.** Context-based lossless image compression // Comput. J. 1993. 36, N 1.

Поступила в редакцию 13 ноября 1998 г.