

УДК 519.676

Д. В. Довнар, К. Г. Предко

(Могилев, Беларусь)

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВИДА ОБЪЕКТА ПО НЕРАВНОМЕРНО
РАСПОЛОЖЕННЫМ ОТСЧЕТАМ ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЯ**

Предложен оптимальный алгоритм восстановления исходного объекта с помощью неравномерного расположения отсчетов на изображении, образованном линейной изображающей системой. Предложенный регуляризованный метод восстановления основан на априорной статистической информации о случайном объекте и шуме. При равном числе точек отсчета в изображении результаты восстановления существенно лучше при неравномерных отсчетах по сравнению с обычными равноотстоящими отсчетами.

При формировании оптического изображения объекта его неизвестное пространственное распределение яркости $z(\xi)$ преобразуется в известное пространственное распределение освещенности $F(x)$. В задачах восстановления вида объекта требуется найти непрерывный объект $z(\xi)$ по его зарегистрированному изображению $F(x_i)$, заданному на дискретном множестве точек x_i , $i=1, 2, \dots, N$. Тогда связь между одномерным объектом и его изображением задается линейным соотношением

$$\int_{-S}^S z(\xi)K(x_i, \xi)d\xi = f(x_i) + \gamma(x_i) = F(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где $F(x_i)$ состоит из незашумленного изображения $f(x_i)$ объекта и шумовой погрешности $\gamma(x_i)$ при регистрации изображения; $K(x_i, \xi)$ — функция размытия точки изображающей оптической системы. Описываемая уравнением (1) модель формирования изображения служит основой алгоритмов восстановления вида объекта на цифровых ЭВМ.

Отметим, что для стационарных объектов и изопланатических оптических систем информация об искомом объекте обычно равномерно распределена по изображению. В этих случаях предпочтительно использовать равномерную дискретизацию изображения. Однако, особенно для неизопланатических систем, некоторые области в плоскости изображения могут быть более информативными.

Тогда, уменьшая количество отсчетов в неинформативных областях изображения и увеличивая в более информативных, можно добиться более

высокой точности восстановления вида объекта при том же числе отсчетов. Данная работа посвящена анализу возможностей такого подхода с использованием статистической информации об искомом объекте и об ошибках его регистрации.

Восстановление вида объекта при равномерном расположении отсчетов на изображении. В работе [1] был предложен стабилизированный метод восстановления вида непрерывного случайного объекта по равномерно расположенным отсчетам изображения и произведена оценка минимальной среднеквадратической ошибки восстановления. Данный метод основан на представлении объекта системой ортонормированных базисных функций $\phi_l(\xi)$, $l=1,2,\dots$. Соответствующий алгоритм имеет вид

$$z(\xi, \beta) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(\beta) \phi_l(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^m d_{lm}(\beta) \phi_l(\xi) \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, F)}{\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m)} \quad (2)$$

или в квадратурной форме

$$z(\xi, \beta) = \sum_{i=1}^N F(x_i) Q(\xi, x_i, \beta) \Delta x, \quad |\xi| < S. \quad (3)$$

Здесь $\varphi_k(x_i) = \int_{-S}^S \phi_k(\xi) K(x_i, \xi) d\xi$ представляет изображение базисных функций $\phi_k(\xi)$,

$$c_l(\beta) = \sum_{m=l}^{\infty} d_{lm}(\beta) \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, F)}{\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m)}, \quad (4)$$

$$Q(\xi, x_i, \beta) = \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) \varphi_k(x_i) \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) \phi_k(\xi)}{\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m)}, \quad (5)$$

а $(\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{i=1}^N \varphi_k(x_i) \varphi_m(x_i) \Delta x$ обозначает скалярное произведение функций $\varphi_k(x_i)$ и $\varphi_m(x_i)$, причем коэффициенты $d_{lm}(\beta)$ рассчитываются по рекуррентной формуле

$$d_{lm}(\beta) = - \sum_{m=l}^{n-1} d_{lm}(\beta) \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_n)}{\beta_m + \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta) (\varphi_k, \varphi_m)}, \quad l=1,2,\dots,n-1; \quad n=2,3,\dots, \quad (6)$$

$$d_{kk}(\beta) = 1, \quad k=1,2,\dots$$

Значения $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ стабилизируют решение при $\beta_k > 0, k = 1, 2, \dots$

Если функции $\phi_k(\xi)$ являются базисом Карунена – Лоэва, то коэффициенты разложения $z(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(\xi)$ обладают следующим свойством [2]:

$\langle c_k c_i \rangle = \langle c_k^2 \rangle \delta_{ik}$. (Угловые скобки здесь и далее означают усреднение по множеству реализаций.) Кроме того, пусть объект и шум не коррелированы, а также не коррелированы ошибки в отсчетах на изображении, т. е. выполняются условия $\langle \gamma_i c_k \rangle = 0$ и $\langle \gamma_i \gamma_k \rangle = \gamma_i^2 \delta_{ik}$, где γ_i^2 – дисперсия ошибки с нулевым средним значением при определении величины $f(x_i)$. В этом случае среднеквадратические ошибки

$$\langle \Delta c_i^2(\beta) \rangle = \langle |c_i - c_i(\beta)|^2 \rangle \quad \text{и} \quad \rho^2(\beta) = \left\langle \int_{-S}^S |z(\xi) - z(\xi, \beta)|^2 d\xi \right\rangle$$

имеют минимум при $\beta_m = \beta_m^* = \frac{\gamma_m^2 \Delta x}{\langle c_m^2 \rangle}$, причем

$$\langle \Delta c_i^2(\beta^*) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{im}^2(\beta^*) \langle c_m^2 \rangle \gamma_m^2 \Delta x}{\Delta x \gamma_m^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \langle \phi_k \cdot \phi_m \rangle}, \quad (7)$$

$$\rho^2(\beta^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta x \langle c_m^2 \rangle \gamma_m^2 \sum_{i=1}^m d_{im}^2(\beta^*)}{\Delta x \gamma_m^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \langle \phi_k \cdot \phi_m \rangle} \quad (8)$$

дают статистическую оценку погрешностей восстановления вида объекта при равномерном расположении отсчетов на изображении.

Учет неравномерного расположения отсчетов на изображении. Найдем значение минимальных среднеквадратических ошибок при произвольном неравномерном расположении отсчетов. Для этого сведем случай неравномерной дискретизации изображения к равномерной. Воспользуемся тем, что для любой неравномерной дискретизации изображения $F(x_i)$ можно найти такую всегда монотонно возрастающую при увеличении x функцию $u = u(x)$, что новое изображение $F'(u_i)$, где $u_i = u(x_i)$, будет дискретизировано равномерно. С учетом этого, произведя в уравнении (1) замену координат $x = x(u)$, получим

$$\int_{-S}^S z(\xi) K'(u_i, \xi) d\xi = f'(u_i) + \gamma'(u_i) = F'(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Это соотношение уже соответствует равномерной дискретизации по координате u .

Полагая, что расстояние между отсчетами $F(x_i)$ остается достаточно большим, чтобы по-прежнему считать ошибки $\gamma(x_i)$ некоррелированными,

воспользуемся выражениями (2)–(6) для решения задачи о восстановлении вида объекта по неравномерно расположенным отсчетам его изображения. При этом изображение базисных функций $\phi_k(\xi)$ примет вид $\phi'_k(u_i) = \int_{-S}^S \phi_k(\xi) K'(u_i, \xi) d\xi$, а скалярное произведение изображений $\phi'_k(u_i)$ и $\phi'_m(u_i)$ будет

$$(\phi'_k, \phi'_l) = \sum_{i=1}^N \phi'_k(u_i) \phi'_l(u_i) \Delta u = \Delta u \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_l(x_i).$$

Используя эти выражения, перепишем соотношения (2)–(5), (7), (8) при $\beta_k^* = \gamma_*^2 \Delta u / \langle c_m^2 \rangle$ в следующем соответствующем данной задаче виде:

$$z(\xi, \beta^*) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l(\beta^*) \phi_l(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^m d_{lm}(\beta^*) \phi_l(\xi) \sum_{i=1}^N \left[d_{lm}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_i(x_i) F(x_i) \right]}{\frac{\gamma_*^2}{\langle c_m^2 \rangle} + \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_m(x_i) \right]}, \quad (9)$$

$$z(\xi, \beta^*) = \sum_{i=1}^N F(x_i) Q(\xi, x_i, \beta^*) \Delta u, \quad |\xi| < S, \quad (10)$$

$$c_l(\beta^*) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lm}(\beta^*) \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) F(x_i)}{\frac{\gamma_*^2}{\langle c_m^2 \rangle} + \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_m(x_i) \right]}, \quad (11)$$

$$Q(\xi, x_i, \beta^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \phi_k(x_i) \sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \phi_k(\xi)}{\frac{\gamma_*^2}{\langle c_m^2 \rangle} + \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_m(x_i) \right]}, \quad (12)$$

$$\langle \Delta c_l^2(\beta^*) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{lm}^2(\beta^*) \langle c_m^2 \rangle \gamma_*^2}{\gamma_*^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_m(x_i) \right]}, \quad (13)$$

$$\rho^2(\beta^*) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle c_m^2 \rangle \gamma_*^2 \sum_{l=1}^m d_{lm}^2(\beta^*)}{\gamma_*^2 + \langle c_m^2 \rangle \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \phi_k(x_i) \phi_m(x_i) \right]}. \quad (14)$$

Рекуррентная формула для коэффициентов d_{lm} будет иметь вид

$$d_{lm}(\beta^*) = - \sum_{m=l}^{n-1} d_{lm}(\beta^*) \frac{\sum_{k=1}^m d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \varphi_k(x_i) \varphi_n(x_i)}{\frac{\gamma_*^2}{\langle c_m^2 \rangle} + \sum_{k=1}^m \left[d_{km}(\beta^*) \sum_{i=1}^N \varphi_k(x_i) \varphi_m(x_i) \right]}, \quad (15)$$

$$d_{kk}(\beta^*) = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Выражения (9)–(12) представляют собой алгоритм восстановления вида объекта по неравномерно дискретизированному изображению $\bar{F}(x_i)$, а соотношения (13) и (14) определяют минимальные среднеквадратические ошибки этого восстановления. Полученные значения минимальных среднеквадратических ошибок (13) и (14) могут быть использованы для наилучшего выбора схемы дискретизации изображения. Их можно использовать, в частности, и для более эффективного неравномерного расположения светочувствительных элементов в матричных фотоприемниках с учетом вида неизопланатической функции размытия точки $\bar{K}(x, \xi)$ изображающей оптической системы.

Отметим, что как исходное уравнение формирования изображения, так и приведенные выше алгоритмы восстановления вида объекта можно легко обобщить на случай n -мерных представлений объекта и его искаженного изображения (см. [1]).

Сравнение восстановленного вида объекта при равномерном и неравномерном расположении отсчетов. Для иллюстрации работы найденного алгоритма восстановления рассмотрим модель формирования изображения, описываемую интегральным преобразованием

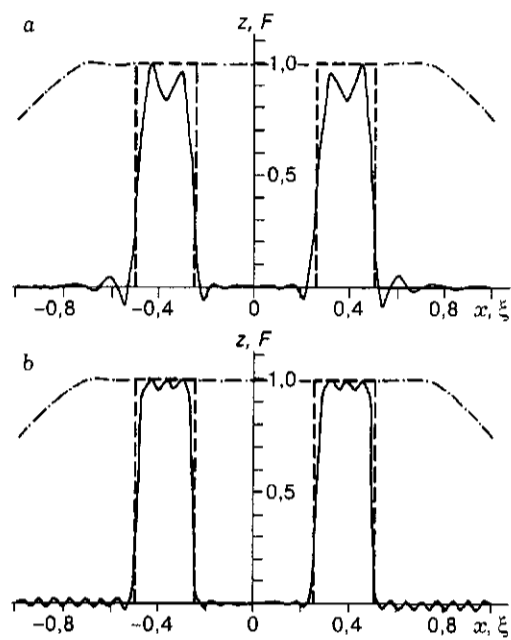
$$\int_{-S}^S z(\xi) \exp(-|\xi - x^3|/2) d\xi = F(x), \quad |x| < R. \quad (16)$$

В качестве исходного объекта взяты два одинаковых прямоугольных импульса, изображение которых получено по модели (16) с добавлением малого уровня шума $\gamma_*^2 = 10^{-7}$ (см. рисунок). Так как для стационарного объекта функции Карунена – Лозва тригонометрические, то при четной реализации взятого объекта вид базисных функций примет вид:

$$\phi_k(\xi) = \cos[(k-1)\pi\xi/S], \quad k = 1, 2, \dots$$

Для объектов с резкими границами, подобных выбранному, коэффициенты ряда Фурье c_m убывают с ростом m как $1/m$, так что $\langle c_m^2 \rangle = 1/m^2$.

Результат восстановления вида объекта при равномерном расположении отсчетов $x_i = -R - \Delta x/2 + i\Delta x$ показан на рисунке *a*, а при неравномерном расположении отсчетов $u_i = -R - \Delta u/2 + i\Delta u$, когда $u_i = x_i^2/n^2$, – на рисунке *b*. В обоих случаях $\Delta x = \Delta u = 2R/N$, $R = S = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, $N = 60$. Для наглядности объект, его изображение и результат восстановления приведены нормированными на единицу.



Восстановление вида объекта при равномерном (а) и неравномерном (b) расположении отсчетов: штриховая линия – исходный объект $z(\xi)$; штрихпунктирная – его изображение $F(x)$; сплошная – результат восстановления

Из сравнения рисунков *a* и *b* видно, что результаты восстановления по неравномерно расположенным отсчетам заметно лучше, чем по равноотстоящим отсчетам. Это же следует и из расчета относительных ошибок восстановления $\varepsilon^2 = \rho^2(\beta^*) / \sum_{m=1}^N \langle c_m^2 \rangle$, где величина $\rho^2(\beta^*)$ находилась соответственно по формулам (8) и (14). В первом случае $\varepsilon^2 = 0,65\%$, во втором – $0,059\%$, т. е. на порядок ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Довнар Д. В., Предко К. Г. Приближенное восстановление объекта с использованием уравнений, не имеющих однозначного решения // *Автометрия*. 1989. № 6. С. 3.
2. Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш. Курс теории информации. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 5 мая 1998 г.