

УДК 535.417

Ю. Ц. Батомункуев, Н. А. Мещеряков

(Новосибирск)

**РАСЧЕТ СХЕМЫ ЗАПИСИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ  
ОБЪЕМНОГО ВНЕОСЕВОГО ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО  
ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА**

Из условия минимизации характеристической функции внеосевого объемного голографического оптического элемента (ГОЭ) получены в первом приближении аналитические выражения для вычисления угловых и радиальных координат, а также допусков координат источников записывающих цилиндрических волн. С использованием полученных выражений рассчитаны координаты и допуски схемы записи объемного ГОЭ. Для голографической среды типа реоксан проведено численное сравнение схем записи объемного и тонкого ГОЭ, восстанавливаемых в одинаковых схемах. Показано, что учет объемности ГОЭ приводит к существенному различию радиальных и угловых координат источников схемы записи объемных отражающих ГОЭ по сравнению с тонкими.

**Введение.** Условия записи тонких фокусирующих голограмм детально исследовались во многих работах, начиная с [1, 2]. Малая дифракционная эффективность, наличие как недифрагировавшего света, так и многих порядков дифракции ограничивают область практического применения тонких голограмм. Объемные фазовые голограммы не имеют указанных недостатков [3]. Анализ условий записи таких голограмм посвящен ряд работ, например [4–8]. Появление новых объемных полимерных голографических материалов [9] открывает возможность создания широкого класса преобразователей волнового фронта, в том числе внеосевых объемных голографических оптических элементов (ГОЭ) с заданными параметрами.

Целью настоящей работы является расчет схемы записи цилиндрическими волнами внеосевых объемных отражающих и пропускающих ГОЭ на основе анализа характеристической функции, вычисление допусков на параметры схем записи, численное сравнение схем записи объемного и тонкого отражающих ГОЭ.

**Система уравнений записи и восстановления ГОЭ.** Для получения характеристической функции внеосевого объемного ГОЭ рассмотрим аналогично [4] ход лучей для изображений источников цилиндрических волн при записи и восстановлении пропускающих и отражающих объемных ГОЭ, представленных на рисунке,  $a-d$ . В дальнейшем будут рассматриваться только изображения источников без употребления слова изображение. Центр системы координат совместим с центром внеосевого ГОЭ, ось  $OZ$

направим перпендикулярно поверхности ГОЭ. Для источников, расположенных параллельно оси  $OX$ , характеристическая функция  $V(y, z)$  в плоскости  $YOZ$  записывается в виде

$$V(y, z) = n_c [l_c - d_c \pm (l_i - d_i) - M(y, z)\lambda_c],$$

где  $d_c, d_i, l_c, l_i$  – расстояния от источников восстанавливающей и восстановленной волн до центра и произвольной точки среды  $(y, z)$  вблизи центра ГОЭ;  $\lambda_c, n_c$  – длина волны при восстановлении и средний показатель преломления среды ГОЭ на этой длине волны.

Пространственное распределение «полос»  $M(y, z)$  в записанном ГОЭ выражается через разность оптических путей лучей от источников при записи как

$$M(y, z) = n_0 [l_o - d_o \pm (l_r - d_r)]/\lambda_0,$$

где  $d_o, d_r, l_o, l_r$  – расстояния от излучателей когерентных цилиндрических волн до центра и произвольной точки  $(y, z)$  в окрестности центра ГОЭ;  $\lambda_0, n_0$  – длина волны при записи и средний показатель преломления среды ГОЭ на этой длине волны. Расстояния  $l_c, l_i, l_o, l_r$  могут быть выражены через соответствующие расстояния  $d_c, d_i, d_o, d_r$  и углы в среде  $\Theta_c, \Theta_i, \Theta_o, \Theta_r$ , задаваемые относительно оси  $OZ$  с учетом коэффициентов усадки (набухания)  $m_y$  вдоль оси  $OY$  и  $m_z$  вдоль оси  $OZ$  [6] (см. рисунок).

В этих и последующих выражениях верхние знаки соответствуют отражающим ГОЭ, а нижние – пропускающим. Подставляя  $M(y, z)$  в первое

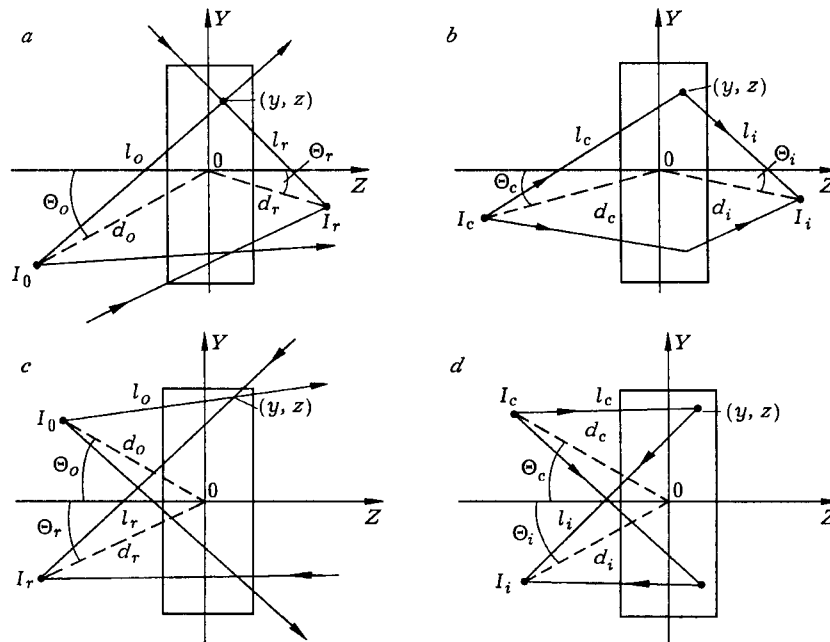


Схема записи и восстановления внеосевого пропускающего ГОЭ (а, б) и внеосевого отражающего ГОЭ (с, д):  $I_0, I_r$  – источники цилиндрических волн при записи;  $I_c$  – источник восстанавливаемой цилиндрической волны;  $I_r$  – восстановленная цилиндрическая волна

выражение, разлагая характеристическую функцию  $V(y, z)$  по параметрам малости  $y/d_j$ ,  $z/d_j$  ( $j = o, r, c, i$ ) и приравнивая к нулю коэффициенты первых членов разложения, получим выражения, связывающие параметры схем записи и восстановления:

$$\begin{aligned}\sin \Theta_o \pm \sin \Theta_r &= m_y (\sin \Theta_c \pm \sin \Theta_i) / \mu, \\ \cos \Theta_o \pm \cos \Theta_r &= m_z (\cos \Theta_c \pm \cos \Theta_i) / \mu, \\ \cos^2 \Theta_o / d_o \pm \cos^2 \Theta_r / d_r &= m_y^2 (\cos^2 \Theta_c / d_c \pm \cos^2 \Theta_i / d_i) / \mu, \\ \sin^2 \Theta_o / d_o \pm \sin^2 \Theta_r / d_r &= m_z^2 (\sin^2 \Theta_c / d_c \pm \sin^2 \Theta_i / d_i) / \mu, \\ \sin 2\Theta_r / d_r \pm \sin 2\Theta_o / d_o &= m_y m_z (\sin 2\Theta_c / d_c \pm \sin 2\Theta_i / d_i) / \mu,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\mu = n_o \lambda_c / n_c \lambda_o. \quad (1a)$$

Первая пара уравнений полученной системы позволяет однозначно определить угловые координаты цилиндрических источников во время записи по известным углам при восстановлении и эквивалентна условиям дифракции Брэгга [4]. Следующие три уравнения системы дают возможность определить расстояния до источников записывающих волн  $d_o$ ,  $d_r$  по известным  $d_c$  и  $d_i$ . При этом следует учесть, что если углы в среде  $\Theta_c$ ,  $\Theta_i$ ,  $\Theta_o$ ,  $\Theta_r$  меньше по абсолютной величине  $\pi/4$ , то большее значение принимают коэффициенты в разложении характеристической функции, из которых получены третье и пятое уравнения системы (1), а в случае углов в среде, близких к  $\pi/2$ , – коэффициенты, из которых получены четвертое и пятое уравнения. Третье уравнение, представляющее условие фокусировки в плоскости  $Y0Z$ , совпадает при  $n_o = n_c = 1$  с аналогичным уравнением для тонкой голограммы [6]. Четвертое и пятое уравнения отсутствуют для тонкого ГОЭ и получены при учете объемности среды.

Таким образом, в отличие от других работ в данной работе при расчете схемы записи учитывается влияние объемности среды ГОЭ на радиальные координаты источников цилиндрических волн.

**Определение координат цилиндрических волн при записи.** Далее рассмотрим случай углов в среде меньше  $\pi/4$  как более интересный с практической точки зрения; случай углов больше  $\pi/4$ , требующий дополнительных способов введения излучения в среду, будет специально оговариваться. Преобразуя первые два уравнения системы при записи отражающего ГОЭ в случае изотропной усадки среды  $m_y = m_z = m$  (голографическая среда типа реоксан), получаем

$$\begin{aligned}\Theta_o / 2 + \Theta_r / 2 &= \Theta_c / 2 + \Theta_i / 2, \\ \mu \cos(\Theta_o / 2 - \Theta_r / 2) &= m \cos(\Theta_c / 2 - \Theta_i / 2).\end{aligned}\quad (2)$$

Указанные выражения отражают условия локального равенства угла наклона и периода интерференционной картины и «полос» регистрируемого ГОЭ.

Из системы (2) находится зависимость угловых координат источников записывающих волн от угловых координат источников восстанавливающей и восстановленной волн и представляется для отражающего ГОЭ в виде

$$\begin{aligned}\Theta_o &= \frac{\Theta_c + \Theta_i}{2} + \arccos\left(\mu m \cos\left(\frac{\Theta_c - \Theta_i}{2}\right)\right), \\ \Theta_r &= \frac{\Theta_c + \Theta_i}{2} - \arccos\left(\mu m \cos\left(\frac{\Theta_c - \Theta_i}{2}\right)\right),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\mu$  дается выражением (1а).

Для пропускающих ГОЭ соответствующие выражения отличаются от (2), (3) тем, что арккосинусы заменены на арксинусы, косинусы – на синусы соответствующих полусуммы и полуразности углов.

Если углы  $\Theta_c, \Theta_i, \Theta_o, \Theta_r$  меньше по модулю  $\pi/4$ , то расстояния, на которых расположены источники  $d_o, d_r$ , определяются из третьего и пятого уравнений системы (1) (при углах больше  $\pi/4$  – из четвертого и пятого уравнений). В случае изотропной усадки (набухания) получаем для расстояний:

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_o} &= \frac{m}{2 \cos \Theta_c} \left[ (1+p) \frac{\cos \Theta_c}{d_c} + (1-p) \frac{\cos \Theta_i}{d_i} \right], \\ \frac{1}{d_r} &= \frac{m}{2 \cos \Theta_i} \left[ (1-p) \frac{\cos \Theta_c}{d_c} + (1+p) \frac{\cos \Theta_i}{d_i} \right],\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$p = \frac{m \cos\left(\frac{\Theta_i - \Theta_c}{2}\right)}{\mu \cos\left(\frac{\Theta_r - \Theta_o}{2}\right)} \quad \text{для пропускающих ГОЭ}, \quad (4a)$$

$$p = \frac{m \sin\left(\frac{\Theta_i - \Theta_c}{2}\right)}{\mu \sin\left(\frac{\Theta_r - \Theta_o}{2}\right)} \quad \text{для отражающих ГОЭ}. \quad (4б)$$

Для случая углов больше по модулю  $\pi/4$  выражения, аналогичные (4), отличаются заменой косинусов на синусы соответствующих углов.

Таким образом, выражения (3), (4) позволяют определить в указанных приближениях угловые и радиальные координаты источников цилиндрических волн при записи по известным координатам источников восстанавливающей и восстановленной волн.

#### Определение допустимой погрешности координат волн при записи.

Для определения погрешности установки угловых  $\Delta\Theta_o, \Delta\Theta_r$  и радиальных  $\Delta d_o, \Delta d_r$  координат источников волн при записи ГОЭ найдем дифференциал

от правой и левой частей выражений (3), (4) и, произведя преобразования, получим:

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_o &= (1+p)\frac{\Delta\Theta_c}{2} + (1-p)\frac{\Delta\Theta_i}{2}, \\ \Delta\Theta_r &= (1-p)\frac{\Delta\Theta_c}{2} + (1+p)\frac{\Delta\Theta_i}{2}, \\ \Delta d_o &= \frac{md_o^2}{2\cos\Theta_o} \left[ (1+p)\frac{\cos\Theta_c}{d_c^2} \Delta d_c + (1-p)\frac{\cos\Theta_i}{d_i^2} \Delta d_i \right], \\ \Delta d_r &= \frac{md_r^2}{2\cos\Theta_r} \left[ (1-p)\frac{\cos\Theta_c}{d_c^2} \Delta d_c + (1+p)\frac{\cos\Theta_i}{d_i^2} \Delta d_i \right],\end{aligned}\tag{5}$$

где  $p$  дается для пропускающих ГОЭ выражением (4а), а для отражающих – выражением (4б). Система (5) получена в предположении малых значений углов (меньше  $\pi/4$ ), в случае углов больше  $\pi/4$  соответствующие выражения получаются заменой косинусов углов на синусы.

Полученные выражения позволяют определить допустимые погрешности установки, погрешности юстировки угловых и радиальных координат цилиндрических источников при записи объемных ГОЭ по известным допустимым отклонениям угловых и радиальных координат источников восстанавливаемой и восстановленной волн.

**Расчет схемы записи внеосевого отражающего ГОЭ.** Рассчитаем условия записи внеосевого отражающего ГОЭ при заданных величинах: расстояние от центра ГОЭ до цилиндрического излучателя  $d_c = 100 \pm 2$  мм, расстояние  $d_i = \infty$ , угловые координаты  $\Theta_c = 10 \pm 0,5^\circ$ ,  $\Theta_i = 0 \pm 0,3^\circ$ , длина волны восстановления  $\lambda_c = 655$  нм, длина волны записи  $\lambda_o = 632,8$  нм.

Для объемных полимерных сред (например, типа реоксан [10]) относительное изменение среднего показателя преломления и толщины среды меньше относительных погрешностей координат источников записи. Поэтому, пренебрегая усадкой ( $m=1$ ) и изменением среднего показателя преломления ( $n_o = n_r$ ), из систем (3), (4) получаем значения угловых и радиальных координат источников записывающих волн, равные:  $\Theta_o = 22,5^\circ$ ,  $\Theta_r = -12,3^\circ$ ,  $d_o = 148$  мм,  $d_r = 277$  мм.

Допуски на рассчитанные углы и расстояния определяются из системы (5) и равны:  $\Delta\Theta_o = \pm 0,4^\circ$ ,  $\Delta\Theta_r = \pm 0,4^\circ$ ,  $\Delta d_o = \pm 3$  мм,  $\Delta d_r = \pm 5$  мм.

Расчетные значения допусков близки к допускам на пространственные координаты волн при восстановлении, что свидетельствует о достаточной устойчивости к отклонениям полученных значений координат записывающих волн. Величины углов в воздухе, соответствующие рассчитанным углам в среде, получаются из закона преломления, расстояния в воздухе – делением рассчитанных расстояний в среде на  $n_o$ . Результаты для голографической среды типа реоксан с  $n_o = 1,5$  представлены в таблице.

Для сравнения в таблице также приведены расчеты схемы записи внеосевого тонкого отражающего ГОЭ [6, 10], который восстанавливается в первом порядке в той же схеме, что и внеосевой объемный отражающий ГОЭ, причем пространственное расположение одного из источников при записи остается неизменным.

$\varphi_o$ , град	$d_o$ , мм	$\varphi_r$ , град	$d_r$ , мм
Объемный отражающий ГОЭ			
34,5	99	-18,7	184
Тонкий отражающий ГОЭ			
34,5	99	18,7	146
-0,4	109	-18,7	184

**Заключение.** Таким образом, из условия минимизации характеристической функции внеосевого объемного ГОЭ получены в первом приближении аналитические выражения для вычисления угловых и радиальных координат, а также допусков координат источников записывающих цилиндрических волн. С использованием полученных выражений рассчитаны координаты и допуски схемы записи объемного ГОЭ. Для голографической среды типа реоксан проведено численное сравнение схем записи объемного и тонкого ГОЭ, восстанавливаемых в одинаковой схеме. Показано, что учет объемности ГОЭ (при отсутствии усадки и изменения среднего показателя преломления) приводит к существенному различию радиальных и угловых координат источников схемы записи объемных отражающих ГОЭ по сравнению с тонкими.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Moran T. M.** Compensation of aberration due to a wave length shift in holography // Appl. Opt. 1971. 10, N 8. P. 1909.
2. **Pat. 3586412 USA.** Holographic lens with aberration correction /E. N. Leith. Publ. 06.12.71.
3. **Денисюк Ю. Н.** Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения // Оптика и спектроскопия. 1963. 15, № 4. С. 522.
4. **Forshow M. R. B.** The imaging properties and aberrations of thick transmission holograms // Opt. Acta. 1973. 20, N 9. P. 669.
5. **Winick K.** Designing efficient aberration – free holographic lenses in the presence of a construction–reconstruction wavelength shift // JOSA. 1982. 72, N 1. P. 143.
6. **Ган М. А.** Теория и методы расчета голограммных и киноформных оптических элементов. Л.: ГОИ, 1984.
7. **Батомункуев Ю. Ц., Сандер Е. А., Шойдин С. А.** Аберрации объемных пропускающих голограмм // Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: ГОИ, 1989. С. 101.
8. **Шойдин С. А., Батомункуев Ю. Ц.** Расчет аберраций фокусирующего элемента на основе глубокой трехмерной голограммы // Оптическая голография с записью в трехмерных средах. Л.: Наука, 1989. С. 49.
9. **Суханов В. И.** Трехмерные глубокие голограммы и материалы для их записи // Опт. журн. 1994. № 1. С. 61.
10. **Пейсахсон И. В.** Оптика спектральных приборов. Л.: Машиностроение, 1975.

*Поступила в редакцию 29 июня 1998 г.*