

УДК 535.41

Е. А. Краснопевцев, Л. А. Борыняк*(Новосибирск)***ТОМОГРАФИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ**

Рассматриваются $2D$ и $3D$ преобразования Радона для плоскопараллельного слоя, а также методы восстановления локальной характеристики слоя на основе двумерного и трехмерного суммарного изображения.

Введение. При изучении цилиндрических оболочек с помощью разработанных авторами методов панорамной интерферометрии [1] возникает томографическая задача: по полученным интегральным проекциям восстановить распределение локальной характеристики для стенки оболочки. Традиционная томография осуществляет реконструкцию в области, близкой по форме к кругу. Осевое сечение оболочки имеет форму вытянутого прямоугольника. Тела с таким поперечным сечением широко распространены в технике. С целью исследования таких объектов рассматриваются прямые и обратные $2D$ и $3D$ преобразования Радона для плоскопараллельного слоя, а также методов восстановления на основе $2D$ и $3D$ суммарного изображения. Исследуется оптически прозрачный слой, для которого измеряется оптическая длина пути вдоль разных направлений просвечивания с помощью голографической интерферометрии. При этом устанавливаются абсолютные порядки интерференционных полос. Томографические методы восстанавливают по этим данным пространственное распределение показателя преломления или геометрической характеристики элементов слоя. Изучаемое распределение можно представить в виде совокупности точечных элементов с определенными весами, поэтому точечный объект может служить тестом при установлении качества восстановления. Приведены примеры восстановлений, выполненные аналитическими методами. Полученные результаты могут быть использованы для исследования деформированного состояния цилиндрических оболочек, а также пластинок и стержней постоянной толщины.

Локальная характеристика слоя и интегральная проекция. На рис. 1 представлена схема голографического интерферометра во встречных пучках, предназначенного для исследования оптически прозрачного слоя B . Коллимированный когерентный пучок лучей A проходит через фотоэмульсию H , пересекает слой B и, рассеявшись на поверхности S , пересекает элементы B и H под разными углами. Экспозиция производится дважды: до и после нагружения слоя, в результате формируется двухэкспозиционная голограмма H . При освещении голограммы опорной волной возникают два мнимых, микроскопически отличающихся состояния слоя, которые интерфери-

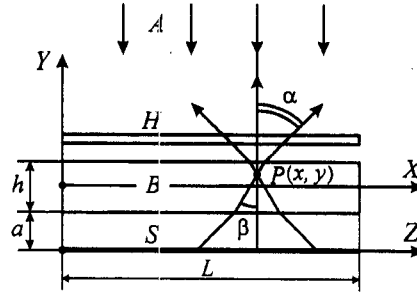


Рис. 1. Схема голографического интерферометра: A – освещающие лучи; H – фотоэмульсия; B – исследуемый слой; S – светорассеивающая поверхность

руют друг с другом. Предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие видимость интерференционных полос [2]. Интерференционная картина проецируется на поверхность S , на которую нанесена координатная сетка. Схема получения интерферограмм [3] позволяет установить абсолютные порядки интерференционных полос.

Для некоторого сечения слоя плоскостью опишем регистрируемую на интерферограмме оптическую разность хода функцией $P(z, \alpha)$, где α – угол наблюдения ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$). Из геометрии рис. 1, где ось X находится на срединной поверхности слоя, следует

$$z = x - y \operatorname{tg} \beta - T, \quad (1)$$

здесь $T = atg\alpha + (h/2)tg\beta$; β – угловое положение луча в слое B ; $\sin\alpha = n_0 \sin\beta$; n_0 – показатель преломления объекта. Величина $\tilde{P}(z, \alpha)$ складывается из двух составляющих, возникающих при распространении луча через объект между точкой входа в фотоэмульсию и точкой выхода из нее. Первое слагаемое $P(z, \beta_0)$ набирает освещающий луч, второе слагаемое $P(z, \beta)$ – рассеянный луч. В результате оптический ход, набираемый рассеянным лучом на пути от точки z поверхности S до голограммы H , выражается через экспериментальные данные: $P(z, \beta) = \tilde{P}(z, \alpha) - \frac{1}{2} \tilde{P}(z, \alpha_s)$, где α_s – угол падения

освещающего луча на поверхность слоя. Для рис. 1 $\alpha_s = 0$. При фотографировании голограммы под углом α регистрируется интерференционная картина, поэтому $\tilde{P}(z, \alpha) = \lambda m(z, \alpha)$, где $m(z, \alpha)$ – порядок интерференционной полосы, наблюдаемой под углом α в точке z поверхности S . Таким образом, на основе экспериментальных данных находим интегральную проекцию

$$P(z, \beta) = \lambda [m(z, \alpha) - (1/2)m(z, 0)]. \quad (2)$$

С другой стороны, величина $P(z, \beta)$ обусловлена изменением состояния $f(x, y)$ единичных элементов слоя, через которые прошел луч. Суммируя вклады элементов по пути следования луча, получаем интегральную проекцию в виде $P(z, \beta) = \int f(x, y) dl_0$, где элемент пути луча через объект $dl_0 = \frac{dx}{\sin\beta} = \frac{dy}{\cos\beta}$. Предположим, что при любом направлении β проекция опреде-

ляется одной и той же функцией $f(x, y)$, тогда можно выразить $f(x, y)$ через множество проекций $P(z, \beta)$. Далее изложена теория преобразования Радона применительно к прямоугольному сечению и представленным на рисунке координатным осям объекта X, Y и оси Z , на которую ведется проецирование под произвольным углом.

Преобразование Радона для прямоугольного сечения. Функция $f(x, y)$ определена в области $0 \leq x \leq L, -h/2 \leq y \leq h/2$. Для осуществления фурье-преобразований по координатам x, y введем вместо $f(x, y)$ функцию, определенную в пределах всей плоскости:

$$F(x, y) = f(x, y)S_L(x)\Pi_h(y), \quad (3)$$

$$\text{где } S_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{при } x < 0, L < x, \end{cases} \quad \Pi_h(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq h/2, \\ 0 & \text{при } |y| > h/2. \end{cases}$$

Прямоугольные функции представим через их фурье-образы [4]:

$$S_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt) \hat{S}_L(t) dt, \quad \Pi_h(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iyp) \hat{\Pi}_h(p) dp. \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \hat{S}_L(t) = \frac{1}{i} \left[\frac{1}{t} - \frac{\exp(-iLt)}{t} \right], \quad \hat{\Pi}_h(p) = 2 \frac{\sin hp/2}{p}.$$

С учетом (1) получаем выражение для проекции на ось Z под углом β , т. е. прямое преобразование Радона:

$$\begin{aligned} P(z, \beta) &= \frac{1}{\sin\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x, \frac{x-z-T}{\operatorname{tg}\beta}\right) dx = \frac{1}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} F[z + y\operatorname{tg}\beta + T, y] dy = \\ &= \frac{1}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \delta(z - \zeta) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \delta[(z - x + T)\cos\beta + y\sin\beta] dx dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\zeta = x - y\operatorname{tg}\beta - T$ есть проекция точки (x, y) на ось Z . Подставляя (3), (4) в (5), имеем

$$\begin{aligned} P(z, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2 \cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_L(t) \exp[it(z + T)] dt \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}_h(p) dp \int_{-\infty}^{+\infty} f[z + y + T, y] \exp[iy(p + t\operatorname{tg}\beta)] dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи применения формул (5) и (6).

Точечная функция. Если

$$F(x, y) = l^2 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (7)$$

то из формулы (5) получаем

$$P(z, \beta) = \frac{l^2}{\cos\beta} \delta(z - \zeta_0), \quad (8)$$

где $\zeta_0 = x_0 - y_0 \operatorname{tg}\beta - T$.

Равномерное распределение. Для равномерного распределения $f(x, y) = C = \text{const}$ и из (6) имеем

$$P(z, \beta) = \frac{C}{2\pi \cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_L(t) \hat{\Gamma}_h(-t \operatorname{tg}\beta) \exp[it(z + T)] dt = \frac{C}{\sin\beta} [I(A) - I(A - L)],$$

где $I(A) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t^2} \exp(iAt) dt$; $A = z + T$; $B = \frac{h}{2} \operatorname{tg}\beta$.

Поскольку, согласно [4],

$$I(A) = \begin{cases} -B & \text{при } A < -|B|, \\ A \operatorname{sgn} B & \text{при } |A| < |B|, \\ B & \text{при } A > |B|, \end{cases}$$

то получаем

$$P(z, \beta) = \frac{C}{\sin\beta} \rho(z, \beta). \quad (9)$$

График функции $\rho(z, \beta)$ для $\beta > 0$ представлен на рис. 2, где $b = -(h + a) \operatorname{tg}\alpha$, $c = -a \operatorname{tg}\alpha$, $d = L - B - T$, $e = L - a \operatorname{tg}\alpha$. В интервале $-a \operatorname{tg}\alpha < z < (L - h \operatorname{tg}\beta - a \operatorname{tg}\alpha)$ имеем $\rho(z, \beta) = h \operatorname{tg}\beta$ и

$$P(z, \beta) = \frac{Ch}{\cos\beta}. \quad (10)$$

При практическом применении преобразования Радона следует учесть, что в эксперименте угол β ограничен: $-\beta_m \leq \beta \leq \beta_m$, где $\beta_m < \pi/2$. Следовательно, для $ha \ll L$ в области $0 < z < L$ преобразование Радона (5) приобретает вид

$$P(z, \beta) = \frac{1}{\cos\beta} \int_{-h/2}^{h/2} f[z + y \operatorname{tg}\beta + T, y] dy = \frac{1}{\sin\beta} \int_{z + a \operatorname{tg}\alpha}^{z + h \operatorname{tg}\beta + a \operatorname{tg}\alpha} f\left(x, \frac{x - z - T}{\operatorname{tg}\beta}\right) dx. \quad (11)$$

Тонкостенная оболочка, нагруженная внутренним давлением. Рассмотрим осевое сечение оболочки, изготовленной из материала с малой оптичес-

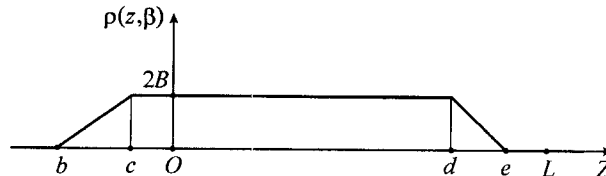


Рис. 2. График функции $\rho(z, \beta)$ для $\beta > 0$

кой чувствительностью. В этом случае функция $f(x, y) = n_0 \varepsilon_r(x, y)$, где n_0 – показатель преломления; ε_r – величина радиальной деформации. Тогда из (11) получаем

$$P(z, \beta) = \frac{n_0}{\sin \beta} \int_{z'}^{z'+K} \varepsilon_r \left(x, \frac{x-z-T}{\operatorname{tg} \beta} \right) dx, \quad (12)$$

где $K = htg\beta$, $z' = z + atg\alpha$. Для тонкостенной оболочки напряжения удовлетворяют соотношению $\sigma_r \ll \sigma_x, \sigma_\theta$, поэтому $\varepsilon_r = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_\theta)$. Для длинной цилиндрической оболочки, прикрепленной к жестким торцам и нагруженной внутренним давлением p , нормальные напряжения можно представить в виде [5]

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{pr}{h} \left[0,5 - \frac{6(1-\mu/2)}{hr\eta^2} \frac{y}{h} \exp(-\eta x) (\cos \eta x - \sin \eta x) \right], \\ \sigma_\theta(x, y) &= \frac{pr}{h} \left[1 - \frac{6\mu(1-\mu/2)}{hr\eta^2} \frac{y}{h} \exp(-\eta x) (\cos \eta x - \sin \eta x) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \exp(-\eta x) (\cos \eta x + \sin \eta x) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\eta^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{rh}$; μ – коэффициент Пуассона. С учетом (13) получаем

$$\varepsilon_r(x, y) = \frac{pr}{Eh} \left\{ A + e^{-\eta x} \left[B(\cos \eta x + \sin \eta x) + C \frac{y}{h} (\cos \eta x - \sin \eta x) \right] \right\}, \quad (14)$$

где $A = -1,5\mu$; $B = \mu(1-\mu/2)$; $C = 6 \frac{\mu(1-\mu/2)(1+\mu)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$. При обычном значении коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$ имеем $A = -0,45$; $B = 0,255$; $C = 1,205$; $\eta = \frac{1,285}{\sqrt{rh}}$.

Подставляя (14) в (12), находим

$$P(z, \beta) = P_0 + \frac{n_0}{\sin \beta} \frac{pr}{Eh} \left\{ B(I_1 + I_2) - \frac{C}{K} [(z+T)(I_1 - I_2) - I_3] \right\}, \quad (15)$$

где

$$P_0 = A \frac{n_0 h}{\cos \beta}; \quad I_1 = \int_{z'}^{z'+K} e^{-\eta x} \cos \eta x dx = \frac{e^{-\eta x}}{2\eta} (\sin \eta x - \cos \eta x) \Big|_{z'}^{z'+K};$$

$$I_2 = \int_{z'}^{z'+K} e^{-\eta x} \sin \eta x dx = -\frac{e^{-\eta x}}{2\eta} (\sin \eta x + \cos \eta x) \Big|_{z'}^{z'+K};$$

$$I_3 = \int_{z'}^{z'+K} x e^{-\eta x} (\cos \eta x - \sin \eta x) dx = \frac{dI_2}{d\eta} =$$

$$= \frac{e^{-\eta x}}{\eta} \left[x \sin \eta x + \frac{1}{2\eta} (\sin \eta x + \cos \eta x) \right] \Big|_{z'}^{z'+K}.$$

Для тонких оболочек и не слишком больших углов β величина $\eta K = 1,285 \sqrt{\frac{h}{r}} \operatorname{tg} \beta < 1$, поэтому можно разложить интегралы в ряд по степеням (ηK) . С точностью до первой степени (ηK) формула проекции для тонкостенной оболочки с внутренним давлением имеет вид

$$P(z, \beta) = \frac{n_0 P r}{E \cos \beta} \left\{ A + e^{-\eta z'} \left[B (\cos \eta z' + \sin \eta z' - \eta K \sin \eta z') - C \frac{\eta K}{6} \cos \eta z' \right] \right\}. \quad (16)$$

Обратное преобразование Радона. Преобразование Фурье функции $P(z, \beta)$ с учетом (5) имеет вид

$$\hat{P}(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) \exp(-i\omega z) dz =$$

$$= \frac{1}{\cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \exp[-i\omega(x - y \operatorname{tg} \beta - T)] dx dy = \frac{\exp(i\omega T)}{\cos \beta} \hat{F}(\omega_x, \omega_y), \quad (17)$$

где $\omega_x = \omega$, $\omega_y = -\omega \operatorname{tg} \beta$. Поскольку $d\omega_x d\omega_y = \frac{d\beta |\omega| d\omega}{\cos^2 \beta}$, то двумерное обратное преобразование Фурье функции $\hat{F}(\omega_x, \omega_y)$ с учетом (17) есть

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \hat{P}(\omega, \beta) \exp(i\omega \zeta) |\omega| d\omega \frac{d\beta}{\cos \beta},$$

где $\zeta = x - y \operatorname{tg} \beta - T$, или

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) \exp[-i\omega(z - \zeta)] dz. \quad (18)$$

Определим фокусирующую функцию

$$h(z - \zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[-i\omega(z - \zeta)] d\omega. \quad (19)$$

Интеграл в (19) берется из [4], в результате имеем обобщенную функцию

$$h(z - \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(z - \zeta)^2}. \quad (20)$$

Уравнение (18) с учетом (19) принимает вид

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \beta) h(z - \zeta) dz \quad (21)$$

и с учетом (20)

$$F(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z, \beta)}{(z - \zeta)^2} dz. \quad (22)$$

Формулы (18), (21), (22) восстанавливают функцию по ее проекциям и являются обратным преобразованием Радона для координат и лучей, представленных на рис. 1. Входящие в формулы величины имеют физический смысл, поэтому интегралы предполагаются сходящимися, по крайней мере, после выделения главного значения или регуляризации.

В качестве теста рассмотрим восстановление точечной функции (7) по ее проекциям (8). Подставляя (8) в (18), получаем

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{l^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos^2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[i\omega(\zeta - \zeta_0)] d\omega = \\ &= \frac{l^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp[i\omega(x - x_0)] d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega(y - y_0)u] du, \end{aligned} \quad (23)$$

где $u = \text{tg}\beta$. Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega(y - y_0)u] du = \frac{2\pi}{|\omega|} \delta(y - y_0)$, то восстановленная функция (23) совпадает с оригиналом (7).

Приближенное обратное преобразование. При практическом использовании схемы рис. 1 следует учесть замечание, сделанное в связи с выражением (11). Тогда обратное преобразование Радона (21) принимает вид

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^L P(z, \beta) h_w(z - \zeta, \beta) dz, \quad (24)$$

где $h_w(z - \zeta, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| w(\omega, \beta) \exp[-i\omega(z - \zeta)] d\omega$ – ограниченная по спектру

фокусирующая функция; $w(\omega, \beta)$ – функция окна. Ограничиваясь низкочастотной составляющей изображения, полагаем, что функция проекций $\hat{P}(\omega, \beta)$ незначительна при $|\omega| > \Omega(\beta)$. Выбираем частотную границу, не зависящую от направления просвечивающих лучей и определяемую обратной величиной наименьшего расстояния s между ними. Тогда расстояние между соседними лучами внутри объекта, измеренное вдоль оси Z , равно $\Delta z = s/\cos\alpha$, по-

этому полуширина частотной полосы $\Omega(\beta) = \pi/\Delta z = \Omega \cos \beta$. Выберем в качестве функции окна, например, прямоугольную функцию

$$w_r(\omega, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \Omega(\beta), \\ 0 & \text{при } |\omega| > \Omega(\beta). \end{cases}$$

Тогда фокусирующая функция принимает вид [6]:

$$h_w(z, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\Omega(\beta)}^{\Omega(\beta)} |\omega| \exp(-i\omega z) d\omega = \frac{\Omega^2(\beta)}{4\pi} \left\{ 2 \frac{\sin[z\Omega(\beta)]}{z\Omega(\beta)} - \frac{\sin^2[z\Omega(\beta)/2]}{[z\Omega(\beta)/2]^2} \right\}. \quad (25)$$

Если $h_w(z, \beta)$ известна только для эквидистантных точек $z_m = m\Delta z$, то фокусирующую функцию можно аппроксимировать рядом из δ -функций:

$$h_A(z, \beta) = \Delta z \sum_{m=-N}^N h(z_m, \beta) \delta(z - z_m). \quad (26)$$

Из (25) находим значения фокусирующей функции в эквидистантных точках z_m . Поскольку $z_m \Omega(\beta) = m\pi$, получаем $h(0, \beta) = \frac{\pi \cos^2 \beta}{4s^2}$, если $m=0$; $h(z_m, \beta) = -\frac{\cos^2 \beta}{\pi s^2 m^2}$, если m нечетное; $h(z_m, \beta) = 0$, если m четное.

В результате выражение (26) можно переписать в виде

$$h_A(z - \zeta, \beta) = \frac{\pi \cos \beta}{4s} \left\{ \delta(z - \zeta) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\delta\left(z - \zeta - \frac{ms}{\cos \beta}\right) + \delta\left(z - \zeta + \frac{ms}{\cos \beta}\right) \right] \right\}, \quad (27)$$

где $N \leq L/s$. Подставляя (27) в (24), получаем приближенную форму обратного преобразования Радона:

$$f_A(x, y) = \frac{1}{4s} \left\{ K_0(x, y) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} [K_{+m}(x, y) + K_{-m}(x, y)] \right\}. \quad (28)$$

Здесь $K_0(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\zeta, \beta) d\beta$, $K_{\pm m}(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P\left(\zeta \pm \frac{ms}{\cos \beta}, \beta\right) d\beta$, $\zeta(x, y, \beta) = x - y \operatorname{tg} \beta - T$.

В качестве примера применения формулы (28) рассмотрим восстановление приближенного образа точечной функции (7). Для этого преобразуем ее проекцию (8) к виду

$$P(\zeta, \beta) = I^2 \delta[(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\sin\beta] = \frac{I^2}{r} \delta(\beta - \beta_0),$$

где $\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{x - x_0}{y - y_0}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Таким образом, с ростом r проекция убывает медленно, и если при восстановлении ограничиться лишь первым слагаемым выражения (28), то восстановленная функция будет соответствовать размытому изображению. Аналогично находим

$$P\left(\zeta + \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) = I^2 \delta[(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\sin\beta + ms] = \frac{I^2}{\sqrt{|r^2 - m^2 s^2|}} \delta(\beta - \beta_1),$$

где $r \neq ms$. Подставляя полученные выражения в (28), имеем восстановленный приближенный образ точечной функции:

$$f_A(r) = \frac{I^2}{4s} \left(\frac{1}{r} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} \frac{1}{|r^2 - m^2 s^2|^{1/2}} \right). \quad (29)$$

При $s \rightarrow 0$ имеем $N \sim 1/s \rightarrow \infty$. Разлагая функцию $|r^2 - m^2 s^2|^{-1/2}$ в ряд по степеням $m^2 s^2 / r^2$ и удерживая первые два члена, получаем из (29), что слагаемые $1/r$ взаимно сокращаются и остается быстропадающая функция $f_A(r) \sim 1/r^3$. Это означает, что реконструкция (28) дает удовлетворительное приближение к оригиналу.

Представим формулу (28) в другом виде, используя равенство $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^{\infty} \frac{1}{m^2}$. Тогда

$$f_A(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{s} \sum_{\substack{m=1 \\ (\text{нечет.})}}^N \frac{1}{m^2} \left\{ \left[P(\zeta, \beta) - P\left(\zeta + \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) \right] + \right. \\ \left. + \left[P(\zeta, \beta) - P\left(\zeta - \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right) \right] \right\} d\beta.$$

Разлагая функции $P\left(\zeta \pm \frac{ms}{\cos\beta}, \beta\right)$ в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда, а также полагая $N \rightarrow \infty$, $Ns \equiv L$, приходим к приближенной реконструкции в виде

$$f_A(x, y) = -\frac{L}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\partial^2 P(z, \beta)}{\partial z^2} \right)_{z=\zeta} \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = -\frac{L}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 P(z, u)}{\partial z^2} \right)_{z=\zeta} du, \quad (30)$$

где L – длина образующей оболочки; $u = \text{tg}\beta$. Заметим, что выражение (30) устойчиво по отношению к выбору вида функции окна, так, оно остается неизменным, с точностью до постоянного множителя, при использовании косинусоидальной функции окна [7].

Суммарное изображение. При использовании преобразования Радона фильтрованная проекция в частотной области пропорциональна $\hat{P}(\omega, \beta)|\omega|$. Проекция равномерного распределения $P(z, \beta) = P(\beta)$ не зависит от переменной z , в результате томограмма дает нулевое значение. Для восстановления пространственно низкочастотных объектов будем следовать подходу, изложенному в [8] и соответствующему методам классической томографии. Введем суммарное изображение в виде $\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{P(\zeta, \beta)}{L(\beta)} d\beta$, где $L(\beta) = \frac{h}{\cos\beta}$ –

протяженность проецирующего луча через объект. Тогда

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\beta P(\zeta, \beta) d\beta. \quad (31)$$

Экспериментальное определение интеграла, входящего в (31), предлагается в работе [3]. Выражая функции $\sigma(x, y)$ и $P(\zeta, \beta)$ через их фурье-образы, приходим к соотношению $\hat{\sigma}(\omega, \beta) = \frac{2 \cos^3 \beta \exp(-i\omega T)}{h|\omega|} \hat{P}(\omega, \beta)$. С учетом (17) имеем

$$\hat{\sigma}(\omega, \beta) = \frac{2 \cos^2 \beta}{h|\omega|} \hat{F}(\omega, \beta). \quad \text{Таким образом, суммарное изображение снижает}$$

разрешение объекта при больших пространственных частотах и больших углах просвечивания.

Рассмотрим некоторые частные случаи суммарного изображения.

Точечная функция. Используя выражение (8) для проекции точечной функции, из (31) получаем

$$\sigma(x, y) = \frac{l^2}{\pi h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta[(x - x_0) - (y - y_0) \text{tg}\beta] d\beta = \frac{l^2}{\pi h} \frac{1}{r} |\cos\theta|,$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $\cos\theta = (y - y_0)/r$; θ – угол наблюдения, отсчитываемый от оси Y . Таким образом, при фиксированном угле наблюдения восстановленное изображение точечной функции уменьшается с расстоя-

нием как $1/r$; при $r = \text{const}$ яркость изображения ослабевает с увеличением угла наблюдения. Если два близко расположенных на расстоянии Δr точечных объекта находятся вблизи линии наблюдения, то контрастность восстановления на расстоянии r от них есть $\frac{\sigma(r_1) - \sigma(r_2)}{\sigma(r_1)} \cong \frac{\Delta r}{r}$.

Равномерное распределение. Для распределения с проекцией (10) находим из (31) $\sigma(x, y) = C$, т. е. в данном случае суммарное изображение совпадает с оригиналом. Однако для общего случая проекций, не зависящих от переменной z , не удается восстановить исходную функцию. В этом случае необходимо выбрать другую ориентацию плоскости сечения (z, y) объекта.

Тонкостенная оболочка, нагруженная внутренним давлением. Для получения суммарного изображения функции $n_0 \varepsilon_r(x, y)$ подставим проекцию (16) в (31), тогда

$$\sigma(x, y) = \frac{n_0 p r}{E h} \times \left\{ A + e^{-\eta x} \left\{ B [I_1 (\cos \eta x + \sin \eta x) + I_2 (\cos \eta x - \sin \eta x)] + \eta h \left[\left(B I_4 + \frac{C}{6} I_3 \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \cos \eta x + \left(B I_3 - \frac{C}{6} I_4 \right) \sin \eta x \right] \right\} \right\}, \quad (32)$$

где после замены $\text{tg} \beta = u$ под знаками интегралов имеем

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \cos(au) \frac{du}{1+u^2}, \quad I_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \sin(au) \frac{du}{1+u^2}, \\ I_3 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \cos(au) \frac{udu}{1+u^2}, \quad I_4 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} \sin(au) \frac{udu}{1+u^2}, \\ a = \eta \left(y + \frac{h}{2} \right) = 1,285 \sqrt{h/r} \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) < 1$$

для тонких оболочек. Ограничиваясь разложением интегралов в фигурной скобке (32) степенями $\sqrt{h/r}$ не выше первой, получаем $I_1 = 1, I_2 = 0$. Интегралы I_3, I_4 не имеют вкладов с нулевой степенью $\sqrt{h/r}$, поэтому

$$\sigma(x, y) = \frac{n_0 p r}{E h} [A + e^{-\eta x} B (\cos \eta x + \sin \eta x)]. \quad (33)$$

Таким образом, в первом приближении по $\sqrt{h/r}$ восстановленное суммарное изображение правильно воспроизводит первые два слагаемые исходной функции (14).

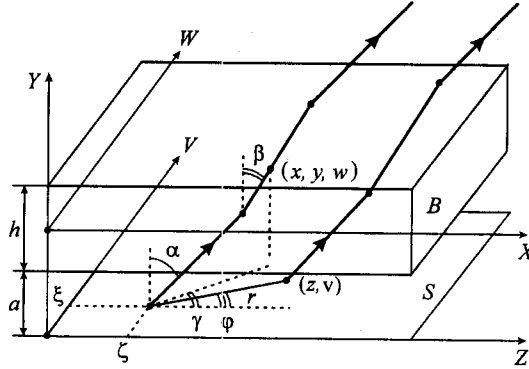


Рис. 3. Схема трехмерного просвечивания объекта B , S – светорассеивающая поверхность

Трехмерное просвечивание объекта. Функция $F(x, y, w)$, определенная в трехмерном пространстве объекта, проецируется на плоскость (z, v) путем просвечивания лучами, идущими под углами α, β, γ (рис. 3), причем $\sin\alpha = n_0 \sin\beta$. Пренебрегая дифракцией и рефракцией внутри объекта, считаем, что луч образует ломаную линию, и если он прошел через исследуемую точку (x, y, w) , то луч вышел из точки $z = \zeta, v = \xi$ рассеивающей поверхности S , где $\zeta = x - y \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma - T_1$; $\xi = w - y \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\gamma - T_2$; $T_1 = T \cos\gamma$; $T_2 = T \sin\gamma$; $T = a \operatorname{tg}\alpha + (h/2) \operatorname{tg}\beta$. Суммируя вклады всех точек объекта, через которые проходит луч, получаем функцию интегральной проекции в виде $P(z, v, \beta, \gamma) = \int F(x, y, w) dl$, где элемент пути $dl = \frac{dx}{\sin\beta \cdot \cos\gamma} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dw}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$, тогда

$$\begin{aligned}
 P(z, v, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\sin\beta \cdot \cos\gamma} \int F \left[x, \frac{x - z - T_1}{\operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma}, v + (x - z) \operatorname{tg}\gamma \right] dx = \\
 &= \frac{1}{\cos\beta} \int F [z + y \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma + T_1, y, v + y \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\gamma + T_2] dy = \\
 &= \frac{1}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \int F \left(z + \frac{w - v}{\operatorname{tg}\gamma}, \frac{w - v - T_2}{\operatorname{tg}\beta \cdot \sin\gamma}, w \right) dw = \\
 &= \iiint \delta [(z - x + T_1) \cos\beta + y \sin\beta \cdot \cos\gamma] \delta [v - w + (x - z) \operatorname{tg}\gamma] F(x, y, w) dx dy dw = \\
 &= \frac{1}{\cos\beta} \iiint \delta(z - \zeta) \delta(v - \xi) F(x, y, w) dx dy dw. \quad (34)
 \end{aligned}$$

При $\gamma = 0, v = \text{const}$ имеем просвечивание, представленное на рис. 1, при этом выражение (34) переходит в (5).

Для решения обратной задачи – восстановления значения функции F в точке (x, y, w) по ее проекциям – рассмотрим двумерное преобразование Фурье функции $P(z, v, \beta, \gamma)$ по переменным z, v . С учетом (34) имеем

$$\hat{P}(\omega_z, \omega_v, \beta, \gamma) = \iint P(z, v, \beta, \gamma) e^{-i(\omega_z z + \omega_v v)} dz dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos\beta} \int \int \int F(x, y, w) e^{-i(\omega_x \zeta + \omega_y \xi)} dx dy dw = \\
&= \frac{\exp[iT(\omega_z \cos\gamma + \omega_v \sin\gamma)]}{\cos\beta} \hat{F}[\omega_z, -(\omega_z \cos\gamma + \omega_v \sin\gamma) \operatorname{tg}\beta, \omega_v]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Трехмерное обратное преобразование Фурье функции \hat{F} есть

$$F(x, y, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \hat{F}(\omega_x, \omega_y, \omega_w) e^{i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_w w)} d\omega_x d\omega_y d\omega_w. \quad (36)$$

Переходя от переменных $\omega_x, \omega_y, \omega_w$ к переменным ω, β, γ , согласно выражениям $\omega_x = \omega \cos\gamma$, $\omega_y = -\omega \operatorname{tg}\beta$, $\omega_w = \omega \sin\gamma$, вычисляем якобиан и получаем $d\omega_x d\omega_y d\omega_w = \frac{d\beta}{\cos^2\beta} d\gamma \omega^2 d\omega$. Теперь (36) с учетом (35) можно представить в

виде

$$F(x, y, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^\pi I d\gamma, \quad (37)$$

где $I = \int \int P(z, v, \beta, \gamma) dz dv \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-i\omega A} d\omega$, $A = (z - \zeta) \cos\gamma + (v - \xi) \sin\gamma$. В плос-

кости (z, v) введем полярную систему координат с центром в точке (ζ, ξ) : $z = \zeta + r \cos\phi$, $v = \xi + r \sin\phi$, где $r = r(\zeta, \xi)$, тогда $A = r \cos(\phi - \gamma)$, $dz dv = r dr d\phi$.

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-i\omega A} d\omega = -2\pi \delta^{(2)}(A)$, то

$$\begin{aligned}
I &= -2\pi \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \phi, \beta, \gamma) r \frac{d^2 \delta[r \cos(\phi - \gamma)]}{d[r \cos(\phi - \gamma)]^2} dr = \\
&= -2\pi \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \phi, \beta, \gamma) r \delta^{(2)}(r) dr.
\end{aligned}$$

Используя соотношения $r \delta^{(2)}(r) = -2\delta^{(1)}(r)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(r) f(r) dr = -f^{(1)}(0)$, при-

ходим к выражению

$$I = -4\pi \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \left(\frac{\partial P(r, \phi, \beta, \gamma)}{\partial r} \right)_{r=0}.$$

В результате из (37) получаем формулу для восстановления функции по ее проекциям:

$$F(x, y, w) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\cos\beta} \int_0^\pi d\gamma \int_0^\pi \frac{d\phi}{|\cos(\phi - \gamma)|^3} \left(\frac{\partial P(r, \phi, \beta, \gamma)}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (38)$$

Другой способ восстановления функций с невысокой пространственной частотой состоит в использовании трехмерного суммарного изображения

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\gamma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{P(\zeta, \xi, \beta, \gamma)}{L(\beta, \gamma)} d\beta,$$

где $L(\beta, \gamma)$ – протяженность луча через объект. Для плоскопараллельного слоя $L(\beta, \gamma) = h/\cos\beta$, тогда

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{1}{\pi^2 h} \int_0^\pi d\gamma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\zeta, \xi, \beta, \gamma) \cos\beta d\beta. \quad (39)$$

Рассмотрим частные случаи применения этой формулы.

Для случая равномерного распределения проекция есть $P(z, v, \beta, \gamma) = \frac{Ch}{\cos\beta}$ и суммарное изображение (39) дает совпадение с оригиналом.

При рассмотрении точечной функции $F(x, y, w) = I^3 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \times \delta(w - w_0)$ имеем из (34) проекцию в виде

$$P(\zeta, \xi, \beta, \gamma) = (I^3/\cos\beta) \delta[x - x_0 - (y - y_0) \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma] \times \\ \times \delta[w - w_0 - (y - y_0) \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\gamma].$$

Подставляя это выражение в (39), приходим к результату

$$\Sigma(x, y, w) = \frac{I^3}{\pi^2 h} \frac{1}{r^2} \frac{1}{|\operatorname{tg}\theta|},$$

$$\text{где } r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (w - w_0)^2; |\operatorname{tg}\theta| = \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (w - w_0)^2}}.$$

Таким образом, для $\theta \neq 0$ и $\theta \neq 90^\circ$ восстановленное изображение точки достаточно быстро убывает с удалением от места локализации как $1/r^2$. Заметим, что если линза создает в точке $z = 0$ изображение точечного светящегося объекта, то яркость его изображения изменяется вдоль оптической оси по закону $1/z^2$. При фиксированном r яркость изображения ослабевает с ростом угла наблюдения θ . Если два близко расположенных на расстоянии Δr точечных объекта находятся вблизи линии наблюдения, то контрастность восстановления на расстоянии r от них есть $\frac{\Sigma(r_1) - \Sigma(r_2)}{\Sigma(r_1)} \cong 2 \frac{\Delta r}{r}$. Сравнивая эти ре-

зультаты с результатами для двумерного суммарного изображения, получаем, что контрастность трехмерного изображения в 2 раза выше. Следовательно, трехмерное суммарное изображение дает хорошее восстановление объекта для углов наблюдения $0 < \theta < 90^\circ$.

Заключение. В работе изложены и проиллюстрированы на примерах несколько подходов к томографии слоя постоянной толщины, широко распространенного в технике. Восстановления тестовой точечной функции,

выполненные аналитически на основе $2D$ приближенного преобразования Радона и $3D$ суммарного изображения, дают хорошее качество изображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борыняк Л. А., Краснопевцев Е. А. Панорамная интерферометрия // Автометрия. 1998. № 2. С. 13.
2. Гинзбург В. М., Степанов Б. М. Голографические измерения. М.: Радио и связь, 1981. С. 58.
3. Краснопевцев Е. А., Борыняк Л. А. Панорамный интерферометр с максимальной апертурой // Автометрия. 1999. № 4. С. 3
4. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
5. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопrotивление материалов. М., 1986. С. 533.
6. Bracewell R. N., Riddle A. C. Inversion of fan-beam scans in radio astronomy // Astrophysical Journ. 1967. 150. Pt. 1. P. 427.
7. Budinger T. F., Gullberg G. T., Huesman R. H. Emission computed tomography // Image Reconstruction from Projections /Ed. G. T. Herman. Berlin, 1979.
8. Вайнштейн Б. К. Синтез проектирующих функций // ДАН СССР. 1971. 196, № 5. С. 1072.

Поступила в редакцию 15 марта 1999 г.