

УДК 621.391.172

Ч. М. Гаджиев

(Стамбул, Турция)

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ МНОГОКАНАЛЬНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

На основе введенной статистики математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления предлагается подход к контролю фильтра Калмана. Предложенный подход позволяет осуществить одновременную проверку математического ожидания и дисперсии последовательности обновления в реальном времени и не требует априорной информации о величинах изменения ее статистических характеристик в случаях отказа. На основе указанного подхода разработаны алгоритмы контроля и диагностики многоканального фильтра Калмана, учитывающие как способ реализации многоканальной фильтрации, так и количество используемых каналов оценивания.

Введение. Необходимость оперативного контроля фильтра Калмана возникает во многих задачах навигации и управления [1, 2]. С этой целью разработан ряд аппаратных и алгоритмических методов. Контроль фильтра Калмана аппаратным путем связан со значительным увеличением затрат на использование резервированных систем или встроенных средств контроля, что ухудшает габаритные показатели системы контроля и является экономически нецелесообразным. Для контроля системы оценивания целесообразен алгоритмический подход. Краткий обзор алгоритмических методов контроля фильтра Калмана приведен в работе [3], из которой следует, что указанным путем можно обеспечить не только обнаружение и локализацию неполадок, но и коррекцию оценок.

Во многих практических случаях имеется возможность получить информацию об оцениваемом векторе состояния динамической системы одновременно от нескольких источников. Соответственно разработаны алгоритмы многоканального оценивания состояния и параметров системы, использующие для оценивания математическую модель движения системы, а также измерения нескольких измерительных каналов (многоканальные фильтры Калмана). Ряд таких алгоритмов приводится в [4, 5]. В указанных алгоритмах совместная обработка всей имеющейся информации позволяет повысить точность оценивания вектора состояния и надежность обработки этой информации.

Применение вышеуказанных алгоритмических методов для контроля многоканальных фильтров Калмана связано со значительным увеличением необходимого объема вычислений, так как для каждого канала оценивания

требуется иметь свой «обнаружитель отказа». Учитывая, что сама процедура многоканального оценивания также связана с большим объемом вычислений, практическая реализация контроля многоканального фильтра Калмана указанным способом представляет довольно трудную задачу. В связи с этим возникает необходимость разработки простых алгоритмов контроля многоканального фильтра Калмана, позволяющих осуществлять контроль фильтра в реальном времени и не требующих априорной информации об изменении его параметров в случае отказа. В данной работе эта задача решается на основе введенной статистики математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления многоканального фильтра Калмана. Предложенный подход позволяет осуществить одновременную проверку математического ожидания и дисперсии нормализованной обновляющей последовательности и, кроме многоканального случая, может использоваться и при контроле одноканального фильтра. Поэтому для удобства изложения сначала рассмотрим задачу контроля одноканального фильтра Калмана.

1. Подход к контролю фильтра Калмана с использованием матрицы обновления. Пусть рассматривается линейная динамическая система, заданная уравнением состояния

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k)X(k) + G(k+1, k)W(k) \quad (1)$$

и измерений

$$Z(k) = H(k)X(k) + V(k), \quad (2)$$

где $X(k)$ – N -мерный вектор состояния системы; $\Phi(k+1, k)$ – переходная матрица системы размером $N \times N$; $W(k)$ – случайный N -мерный вектор возмущения; $G(k+1, k)$ – переходная матрица возмущений (шумов системы) размером $N \times N$; $Z(k)$ – n -мерный вектор измерений; $H(k)$ – матрица измерений системы размером $n \times N$; $V(k)$ – случайный n -мерный вектор шумов измерений.

Предположим, что случайные векторы $W(k)$ и $V(k)$ представляют собой гауссовый белый шум. Их средние значения и ковариации равны $E[W(k)] = 0$, $E[V(k)] = 0$, $E[W(k)W^T(j)] = Q(k)\delta(kj)$, $E[V(k)V^T(j)] = R(k)\delta(kj)$. Здесь E – оператор статистического усреднения; T – знак транспонирования; $\delta(kj)$ – символ Кронекера:

$$\delta(kj) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Так как все случайные переменные, входящие в уравнение (1), гауссовские, то начальное состояние рассматриваемой динамической системы полностью описывается вектором средних $E[X(0)] = X(0)$ и корреляционной матрицей $P(0) = E\{[X(0) - \bar{X}(0)][X(0) - \bar{X}(0)]^T\}$, т. е. $X(0) \sim N(\bar{X}(0), P(0))$.

$\{W(k)\}$ и $\{V(k)\}$ принимаются взаимно некоррелированными, кроме того, $E[X(0)W^T(k)] = 0$, $E[X(0)V^T(k)] = 0 \quad \forall k$.

Оценка вектора состояния $\hat{X}(k/k)$ и корреляционная матрица ошибок оценок $P(k/k)$ находятся с помощью фильтра Калмана следующего вида [6]:

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + K(k)v(k),$$

$$\begin{aligned}
v(k) &= Z(k) - H(k)\hat{X}(k/k-1), \\
K(k) &= P(k/k-1)H^T(k)[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}, \quad (3) \\
P(k/k) &= [I - K(k)H(k)]P(k/k-1), \\
P(k/k-1) &= \Phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\
&+ G(k, k-1)Q(k-1)G^T(k, k-1),
\end{aligned}$$

где $K(k)$ – матричный коэффициент усиления фильтра Калмана; $v(k)$ – последовательность обновления; I – единичная матрица; $P(k/k-1)$ – корреляционная матрица ошибок экстраполяции; $P(k-1/k-1)$ – корреляционная матрица ошибок оценок на предыдущем шаге.

Если в системе оценивания отсутствуют неполадки, то нормализованная последовательность обновления

$$\tilde{v}(k) = [H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1/2} v(k) \quad (4)$$

в согласованном с моделью динамики калмановском фильтре (3) представляет собой белый гауссовый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей [7]: $E[\tilde{v}(k)] = 0$, $E[\tilde{v}(k)\tilde{v}^T(j)] = P_{\tilde{v}} = I\delta(kj)$.

Отказы, приводящие к резкому изменению характеристики канала измерения, сбои в ЭВМ, аномальные измерения, изменения статистических характеристик шумов объекта или измерений, а также расходимость траекторий реального процесса и оценок, порождаемых фильтром Калмана, и т. д. вызывают изменения вышеуказанных характеристик последовательности $\tilde{v}(k)$.

Представляет интерес разработка оперативного метода одновременной проверки математического ожидания и дисперсии нормализованной обновляющей последовательности (4), не требующего априорной информации о величинах их изменения в случае отказа и позволяющего обнаружить неполадки в фильтре Калмана в реальном времени. С указанной целью введем две гипотезы: γ_0 – фильтр Калмана функционирует нормально; γ_1 – имеет место неполадка.

С целью обнаружения отказа построим матрицу, столбцами которой являются векторы обновления фильтра Калмана. Введем следующие определения.

Определение 1. Матрицей обновления фильтра Калмана назовем прямоугольную матрицу размером $n \times m$ (n – размерность вектора обновления; $n \geq 2$; $m \geq 2$), столбцами которой являются векторы обновления $v(k)$, соответствующие m разным моментам времени.

Определение 2. Матрицу обновления, составленную из нормализованных обновляющих векторов $\tilde{v}(k)$, назовем нормализованной матрицей обновления фильтра Калмана.

В дальнейшем при проверке обновляющей последовательности для простоты будем использовать нормализованные матрицы обновления, обозначаемые буквой A и состоящие из конечного числа нормализованных обновляющих векторов. Если осуществляется проверка в реальном времени,

то целесообразно в момент времени k ($k \geq m$) матрицу $A(k)$ построить из конечного числа m ($m \geq 2$) последовательных векторов обновления $\dots \underbrace{\tilde{v}(k-2), \tilde{v}(k-1), \tilde{v}(k)}_m$. Для сокращения вычислительных затрат при на-

хождении в дальнейшем собственных значений и спектральной нормы нормализованной матрицы обновления предлагается при ее формировании принять $m=2$, т. е. использовать матрицу $A(k)$ порядка $n \times 2$, состоящую из двух последовательных нормализованных обновляющих векторов:

$$A(k) = [\tilde{v}(k-1), \tilde{v}(k)].$$

С целью проверки гипотез γ_0 и γ_1 используем спектральную норму построенной таким образом матрицы $A(k)$. Как известно [8], спектральная норма $\|A(k)\|_2$ вещественной матрицы $A(k)$ определяется формулой

$$\|A(k)\|_2 \equiv \max_i \sqrt{\lambda_i [A^T(k)A(k)]} : \lambda_i [A^T(k)A(k)] - \text{собственные значения матрицы } A^T(k)A(k)\}. \quad (5)$$

Квадратные корни из собственных значений матрицы $A^T(k)A(k)$, т. е. величины $\sqrt{\lambda_i [A^T(k)A(k)]}$, называются сингулярными числами матрицы $A(k)$. Следовательно, спектральная норма матрицы $A(k)$ равна ее максимальному сингулярному числу. Так как матрица $A^T(k)A(k)$ является симметричной $[A^T(k)A(k)]^T = A^T(k)[A^T(k)]^T = A^T(k)A(k)$ и положительно-полуопределенной (т. е. для любого ненулевого вектора $X(k)$ $X^T(k)A^T(k)A(k)X(k) = (A(k)X(k), A(k)X(k)) \geq 0$, где круглыми скобками обозначено скалярное произведение), то сингулярные числа являются вещественными и неотрицательными. В силу тех же причин определение сингулярных чисел и, следовательно, спектральной нормы представляет в вычислительном плане более простую задачу, чем получение собственных значений для произвольной матрицы. Этим и объясняется выбор в качестве контролируемой скалярной меры спектральной нормы нормализованной матрицы обновления фильтра Калмана. С целью проверки гипотез γ_0 и γ_1 введем одномерную статистику математического ожидания спектральной нормы матрицы $A(k)$. В качестве оценки математического ожидания используем его среднеарифметическое значение. При большом значении k приближенно можно записать:

$$E\{\|A(k)\|_2\} \approx \|\hat{A}(k)\|_2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|A(j)\|_2, \quad j \geq m. \quad (6)$$

Находим верхние и нижние предельные значения для $E\{\|A\|_2\}$. Для этого используем некоторые полученные в [9] результаты. В указанной работе найден ряд границ для математического ожидания спектральной нормы случайной матрицы $A \in R^{n \times m}$, составленной из нормально распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ ($a_{ij} \in N(0, \sigma^2)$). Рассмотрим некоторые из них. Допус-

тим, что r_i^T и a_j означают строки и столбцы матрицы A . Введем максимальную строчно-столбцовую норму

$$\mu \equiv \max_{i,j} [\|r_i\|_2, \|a_j\|_2], \quad (7)$$

где $\|r_i\|_2$ и $\|a_j\|_2$ – соответствующие евклидовы векторные нормы.

С помощью введенной нормы μ в [9] получены следующие границы для $E\{\|A\|_2\}$:

$$E\{\mu\} \leq E\{\|A\|_2\} \leq \sqrt{\max(n,m)}E\{\mu\}. \quad (8)$$

Использование формулы (8) в практических расчетах представляет сложную задачу в связи с трудностью оценивания $E\{\mu\}$. Поэтому величина $E\{\mu\}$ заменяется ее более низкой границей

$$\sigma\sqrt{\max(n,m)} = \max[E\{\|r_i\|_2\}, E\{\|a_j\|_2\}] \leq E\{\mu\}.$$

Уравнение (8) запишем в следующем виде:

$$\sigma\sqrt{\max(n,m)} \leq E\{\|A\|_2\} \leq f(\max(n,m))\sigma\sqrt{\max(n,m)},$$

где f – неизвестная функция, которая подлежит определению.

В [9] с помощью математического моделирования на ЭВМ показано, что величина $\sigma\sqrt{\max(n,m)}$ является хорошей нижней границей для $E\{\|A\|_2\}$. В результате проведенных численных расчетов показано также, что функция f при $n = m \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к 2 и f всегда находится между значениями 1 и 2. Поэтому в качестве оценки функции f предлагается использовать значение 2. С учетом изложенного можно получить следующие простые границы для $E\{\|A\|_2\}$:

$$\sigma\sqrt{\max(n,m)} < E\{\|A\|_2\} < 2\sigma\sqrt{\max(n,m)}. \quad (9)$$

Выражение (9) характеризует связь между среднеквадратическим отклонением σ элементов случайной матрицы A и ее спектральной нормой.

Учитывая, что используемая нами с целью обнаружения неполадок фильтра Калмана нормализованная матрица обновления $A(k)$ состоит из нормально распределенных случайных элементов с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $a_{ij} \in N(0,1)$, неравенство (9) может быть применено для решения поставленной в данной работе диагностической задачи. При этом можно констатировать, что если элементы a_{ij} контролируемой нормализованной матрицы обновления фильтра Калмана подчинены распределению $N(0,1)$, должно быть выполнено неравенство (9). Невыполнение неравенства (9) свидетельствует или о смещении нулевого среднего элементов a_{ij} , или об изменении единичной дисперсии, или об отличии $\{a_{ij}\}$ от белого шума.

Если рассматривается случай $\sigma = 1, n \geq 2$ и $m = 2$, то неравенство (9) запишется в более простой форме:

$$\sqrt{n} < E\{\|A\|_2\} < 2\sqrt{n}. \quad (10)$$

Как видно из полученного выражения (10), в рассматриваемом случае границы статистики математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления фильтра Калмана определяются размерностью вектора обновления (или размерностью вектора измерения).

С учетом изложенного при решении поставленной в данной работе задачи контроля фильтра Калмана решающее правило относительно введенных гипотез будет записываться в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \sqrt{n} < E\{\|A(k)\|_2\} < 2\sqrt{n} \quad \text{для } k=2,3,\dots, \\ \gamma_1 : \text{если } \exists k, \text{ где } E\{\|A(k)\|_2\} \leq \sqrt{n} \text{ или } E\{\|A\|_2\} \geq 2\sqrt{n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Найденные границы для математического ожидания спектральной нормы матрицы обновления достаточно просты и позволяют осуществить одновременную проверку математического ожидания и дисперсии обновляющей последовательности.

В реальных условиях эксплуатации системы предложенный алгоритм сводится к следующей последовательности вычислений, выполняемых на каждом шаге измерений.

1. С помощью (3) и (4) вычисляются калмановская оценка вектора состояния системы и значение вектора нормализованной обновляющей последовательности на данном шаге k .

2. Составляется нормализованная матрица обновления фильтра Калмана при заданных $n \geq 2$ и $m \geq 2$, в частности, при $m=2$ $A(k) = [\tilde{v}(k-1), \tilde{v}(k)]$, $k \geq m$.

3. Определяются собственные значения матрицы $A^T(k)A(k)$ как корни уравнения

$$\det[A^T(k)A(k) - \lambda I] = 0 \quad (12)$$

и спектральная норма матрицы $A(k)$ с помощью формулы (5).

4. На основе выражения (6) вычисляется статистика математического ожидания спектральной нормы матрицы $A(k)$.

5. Проверяется выполнение неравенства (10), и принимается решение об обнаружении неполадки в фильтре Калмана на основании решающего правила (11).

6. Последовательность вычислений повторяется, начиная с операции 1, для следующего момента времени $k+1$.

Этот алгоритм назовем алгоритмом 1.

С целью проверки предложенного алгоритма контроля фильтра Калмана в приложении в качестве иллюстрации приведен пример 1. Результаты моделирования на ЭВМ подтвердили практическую возможность одновременной проверки в реальном времени математического ожидания и дисперсии нормализованной обновляющей последовательности с помощью введенной статистики (6).

Основной недостаток предложенного подхода к контролю фильтра Калмана заключается в том, что он не позволяет осуществить проверку недиагональных элементов ковариационной матрицы последовательности обновления. Несмотря на это, благодаря своей простоте и легкой реализуемости, данный подход может быть широко использован в различных отраслях промыш-

ленности при решении задач оперативного контроля и диагностики технологических процессов.

2. Алгоритм контроля многоканального фильтра Калмана. Рассмотрим динамическую систему, заданную уравнением состояния (1).

Процесс $X(k)$ наблюдается многоканальной системой, состоящей из m измерительных каналов, причем уравнение измерений для i -го канала имеет следующий вид: $Z_i(k) = H_i(k)X(k) + V_i(k)$, где все величины определены в уравнениях (1) и (2). Шумы измерений i -го канала имеют нулевой вектор средних и корреляционную матрицу $E[V_i(k)V_i^T(j)] = R_{ii}(k)\delta(kj)$, причем в отдельных каналах они не коррелированы между собой.

Такая ситуация характерна для комплексных систем навигации, высоконадежных многоканальных измерительных систем и т. п., использующих для оценивания информацию от нескольких датчиков. Совместная обработка всей имеющейся информации позволяет повысить точность оценивания вектора состояния и надежность обработки этой информации.

При этом оценка вектора состояния $\hat{X}(k/k)$ и корреляционная матрица ошибок оценок $P(k/k)$ находятся с помощью следующего многоканального фильтра Калмана [4]:

$$\hat{X}(k/k) = \hat{X}(k/k-1) + \sum_{i=1}^m P(k/k)H_i^T(k)R_{ii}^{-1}(k)v_i(k),$$

$$v_i(k) = Z_i(k) - H_i(k)\hat{X}(k/k-1),$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) \left[I + \sum_{i=1}^m H_i^T(k)R_{ii}^{-1}(k)H_i(k)P(k/k-1) \right]^{-1}, \quad (13)$$

$$P(k/k-1) = \Phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1) + \\ + G(k, k-1)Q(k-1)G^T(k, k-1),$$

где все обозначения определены в уравнениях (3).

Многоканальный фильтр, соответствующий уравнениям (13), называется параллельным, так как оптимальная оценка в указанном случае получается путем одновременного весового суммирования обновляющих последовательностей $v_i(k)$ всех каналов с использованием общего экстраполятора.

Как видно из (13), при реализации параллельного способа вычисления оценки вектора состояния требуется иметь m фильтров, для каждого из которых необходимо рассчитывать матричный коэффициент усиления, корреляционную матрицу ошибок фильтрации и т. п.

Если многоканальный фильтр Калмана (13) функционирует нормально, то нормализованные последовательности обновления различных каналов

$$\tilde{v}_i(k) = [H_i(k)P(k/k-1)H_i^T(k) + R_{ii}(k)]^{-1/2} v_i(k) \quad (14)$$

подчинены распределению $N(0, 1)$.

Введем следующие определения.

Определение 3. Матрицей обновления m -канального фильтра Калмана назовем прямоугольную матрицу размером $n \times m$ (n – размерность вектора обновления; $n \geq 2$; $m \geq 2$), столбцами которой являются векторы обновления различных каналов, соответствующих одному и тому же моменту времени (предполагается, что размерности векторов обновлений различных каналов совпадают).

Определение 4. Матрицу обновления размером $n \times m$, составленную из нормализованных обновляющих векторов m различных каналов $\tilde{v}_1(k), \tilde{v}_2(k), \dots, \tilde{v}_m(k) \in R^{n \times 1}$, соответствующих одному и тому же моменту времени, назовем нормализованной матрицей обновления m -канального фильтра Калмана.

Таким образом, нормализованная матрица обновления, по которой будем осуществлять контроль многоканального фильтра Калмана в момент времени k , записывается в следующем виде:

$$A(k) = [\tilde{v}_1(k), \tilde{v}_2(k), \dots, \tilde{v}_m(k)]. \quad (15)$$

С целью проверки гипотез γ_0 и γ_1 предлагается использовать одномерную статистику математического ожидания спектральной нормы случайной матрицы $A(k)$, которая определяется с помощью выражения (6). При этом контроль многоканального фильтра Калмана будет осуществляться по выполнению неравенства (9), которое с учетом того, что $\sigma = 1$, будет записываться в более простой форме:

$$\sqrt{\max(n, m)} < E\{\|A\|_2\} < 2\sqrt{\max(n, m)}, \quad (16)$$

где m показывает число используемых измерительных каналов.

Тогда при решении поставленной задачи контроля многоканального фильтра Калмана решающее правило относительно введенных гипотез должно иметь вид:

$$\gamma_0 : \sqrt{\max(n, m)} < E\{\|A(k)\|_2\} < 2\sqrt{\max(n, m)} \quad \text{для } \forall k, \quad (17)$$

$$\gamma_1 : \text{если } \exists k, \text{ где } E\{\|A(k)\|_2\} \leq \sqrt{\max(n, m)} \text{ или } E\{\|A(k)\|_2\} \geq 2\sqrt{\max(n, m)}.$$

Найденные границы для математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления m -канального фильтра Калмана достаточно просты и позволяют осуществить одновременную проверку математических ожиданий и дисперсий обновляющих последовательностей всех каналов.

В реальных условиях эксплуатации системы разработанный алгоритм контроля многоканального фильтра Калмана сводится к следующей последовательности вычислений, выполняемых на каждом шаге измерений.

1. С помощью (13) и (14) вычисляются многоканальная калмановская оценка вектора состояния системы и значения векторов нормализованных обновляющих последовательностей различных каналов на данном шаге k .

2. Составляется нормализованная матрица обновления m -канального фильтра Калмана при заданных $n \geq 2$ и $m \geq 2$ в виде (15).

3. Определяются собственные значения матрицы $A^T(k)A(k)$ как корни уравнения (12) и спектральная норма матрицы $A(k)$ с помощью формулы (5).

4. Вычисляется статистика математического ожидания спектральной нормы $\|A(k)\|_2$ на основе выражения (6).

5. Проверяется выполнение неравенства (16), и принимается решение о нормальном функционировании m -канального фильтра Калмана на основании решающего правила (17).

6. Последовательность вычислений повторяется, начиная с операции 1, для следующего момента времени $k + 1$.

Указанный алгоритм назовем алгоритмом 2.

Отметим, что, кроме рассмотренной параллельной реализации многоканального фильтра Калмана, существуют еще другие способы оптимальной многоканальной фильтрации вектора состояния $X(k)$. К ним относятся последовательная реализация многоканальной фильтрации, использующая фильтрацию, рекуррентную по номеру канала, а не по времени, и многоканальная фильтрация с предварительным сжатием входных данных, где осуществляется предварительная обработка измерений различных измерительных каналов [4]. В первом случае оцениваемый вектор состояния будет одним и тем же на входе всех m каналов, т. е. экстраполированная оценка $\hat{X}(k/k-1)$ подается на вход только первого фильтра, а все последующие фильтры в качестве оценки экстраполяции используют величину $\hat{X}_{i-1}(k/k)$.

Нетрудно показать, что при нормальном функционировании последовательной процедуры многоканального оценивания нормализованные обновляющие последовательности различных каналов будут иметь распределение $N(0, 1)$. Тогда для контроля последовательного многоканального фильтра Калмана может быть использован алгоритм 2, разработанный для параллельной реализации многоканального оценивания.

Так как для реализации многоканального фильтра с предварительным сжатием входных данных потребуется лишь один вектор измерений, являющийся линейным преобразованием векторов измерений различных каналов, то контроль такого фильтра может осуществляться с помощью изложенного выше алгоритма 1, предназначенного для контроля одноканального фильтра Калмана.

В приложении в качестве иллюстрации приведен пример 2 для проверки разработанного алгоритма контроля многоканального фильтра Калмана. Полученные результаты подтверждают простоту и высокую оперативность реализации предложенного подхода. Данный подход легко приспособливается к изменению числа каналов фильтрации m , что делает его универсальным средством контроля многоканальных фильтров.

3. Диагностирование многоканального фильтра. Допустим, что в результате контроля многоканального фильтра Калмана (13) справедлива гипотеза γ_1 , т. е. имеет место неполадка в многоканальном фильтре. Рассмотрим задачу идентификации отказавшего канала оценивания. С этой целью используем предложенные в данной работе алгоритмы контроля фильтра Калмана (в том числе многоканального), основанные на статистике математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления. При этом предположим, что вероятности появления отказов в различных каналах оценивания не известны или равны, равно также время на проверку различных каналов.

С целью диагностирования в указанном случае используем самый простой метод поиска неисправностей – метод половинного разбиения. Имеющиеся m фильтров Калмана, по которым осуществляется многоканальное оценивание, разобьем на две равные группы по $m/2$ фильтров в каждой и для одной из них применим алгоритм контроля многоканального фильтра Калмана (алгоритм 2). В результате принятия с помощью решающего правила (17) решений для одной из групп будет справедлива гипотеза γ_1 . Указанную группу фильтров опять разобьем на две равные части и применим алгоритм 2 для одной из них. Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока полученный после разбиения многоканальный фильтр не будет состоять из двух каналов фильтрации. Далее для обнаружения отказа предлагается применить алгоритм контроля одноканального фильтра Калмана (алгоритм 1). В результате решающего правила (11) будет идентифицирован отказавший канал фильтрации.

При диагностировании последовательного многоканального фильтра Калмана «обнаружитель отказа» (в данном случае алгоритм 2) целесообразно поставить после $m/2$ -го канала оценивания, т. е. на первом шаге диагностирования проверяется первая группа из $m/2$ фильтров Калмана. При справедливости гипотезы γ_1 первая группа, а гипотезы γ_0 вторая группа фильтров разбиваются пополам. Такое разбиение продолжается до получения последовательного двухканального фильтра Калмана. Далее с помощью алгоритма 1 обнаруживается отказавший канал фильтрации.

Таким образом, совместное использование алгоритмов 1 и 2 позволяет осуществить диагностирование многоканального фильтра Калмана, идентифицируя отказавший канал фильтрации.

Заключение. На основе введенной статистики математического ожидания спектральной нормы нормализованной матрицы обновления предложен подход к контролю фильтра Калмана, который позволяет осуществить одновременную проверку математического ожидания и дисперсии обновляющей последовательности в реальном времени и не требует априорной информации о величинах изменения ее статистических характеристик в случае отказа. При этом найдены верхние и нижние границы контролируемой статистики, которые определяются размерностью вектора измерения (одноканальный случай) и (или) количеством используемых каналов фильтрации (многоканальный случай).

Разработанный алгоритм контроля многоканального фильтра Калмана легко приспособляется к изменению числа каналов оценивания, а также к применяемому способу реализации многоканальной фильтрации, что делает его универсальным средством контроля многоканальных фильтров.

Совместное использование полученных в работе алгоритмов контроля позволяет осуществить диагностирование многоканального фильтра Калмана, идентифицируя отказавший канал фильтрации.

Основной недостаток предложенного подхода к контролю фильтра Калмана заключается в том, что он не позволяет осуществить проверку недиагональных элементов корреляционной матрицы последовательности обновления. Несмотря на это, благодаря своей простоте и легкой реализуемости, данный подход может быть широко использован при решении задач оперативного контроля и диагностики многомерных многоканальных динамических систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример 1. Рассмотрим двумерную динамическую систему вида (1), (2), определяемую параметрами:

$$\Phi(k+1, k) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,816 \\ -0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что обработка измерений проводилась с помощью фильтра Калмана (3), позволяющего на каждом k -м шаге определить оценку вектора состояния и корреляционную матрицу ошибок оценок.

Покажем, что с помощью алгоритма 1 можно обнаружить возникшие в фильтре Калмана неполадки в реальном времени.

В численных расчетах по мере вычисления оценки вектора состояния системы определялись значения нормализованной обновляющей последовательности с помощью (4), спектральной нормы матрицы $A(k) = [\tilde{v}(k-1), \tilde{v}(k)]$ с помощью (5) и математического ожидания спектральной нормы $\|A(k)\|_2$ с помощью (6).

Решения об обнаружении неполадки в фильтре Калмана принимались на основе решающего правила, написанного для случая $n=2, m=2$:

$$\gamma_0: \sqrt{2} < E\{\|A(k)\|_2\} < 2\sqrt{2} \quad \text{для } k=2,3,\dots, \quad (\text{П1})$$

$$\gamma_1: \text{если } \exists k, \text{ где } E\{\|A(k)\|_2\} \leq \sqrt{2} \text{ или } E\{\|A(k)\|_2\} \geq 2\sqrt{2}.$$

Результаты расчетов показаны на рис. 1, *a-c*. На рис. 1, *a* приведены допустимые границы контролируемой статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ и график ее поведения в случае нормального функционирования фильтра Калмана. Как видно из приведенного графика, значения статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ находятся в пределах допустимой области (между допустимыми прямыми $E\{\|A(k)\|_2\} = \sigma\sqrt{2}$ и $E\{\|A(k)\|_2\} = 2\sigma\sqrt{2}$).

С целью проверки действенности предложенного алгоритма контроля фильтра Калмана, начиная с шага $k=20$, введено постоянное смещение к последовательности обновления $\tilde{v}(k)$. Полученные результаты показаны на рис. 1, *b*. Как видно из приведенных результатов, значение статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$, начиная с 20-го шага, резко возрастает и на шаге $k=23$ становится больше верхней допустимой границы, что свидетельствует об обнаружении неполадки фильтра Калмана.

С целью подтверждения возможности проверки дисперсии нормализованной последовательности обновления с помощью алгоритма 1, начиная с шага $k=20$, изменена дисперсия последовательности (4) (значения $\tilde{v}(k)$ умножены на 3).

Из приведенных на рис. 1, *c* графиков видно, что значение статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ в этом случае после 20-го шага резко возрастает и на шаге $k=22$ пересекает свою верхнюю допустимую границу. В результате на основе решающего правила (П1) фиксируется неполадка в фильтре Калмана.

Полученные результаты подтвердили возможность одновременной проверки с помощью алгоритма 1 математического ожидания и дисперсии нормализованной последовательности обновления.

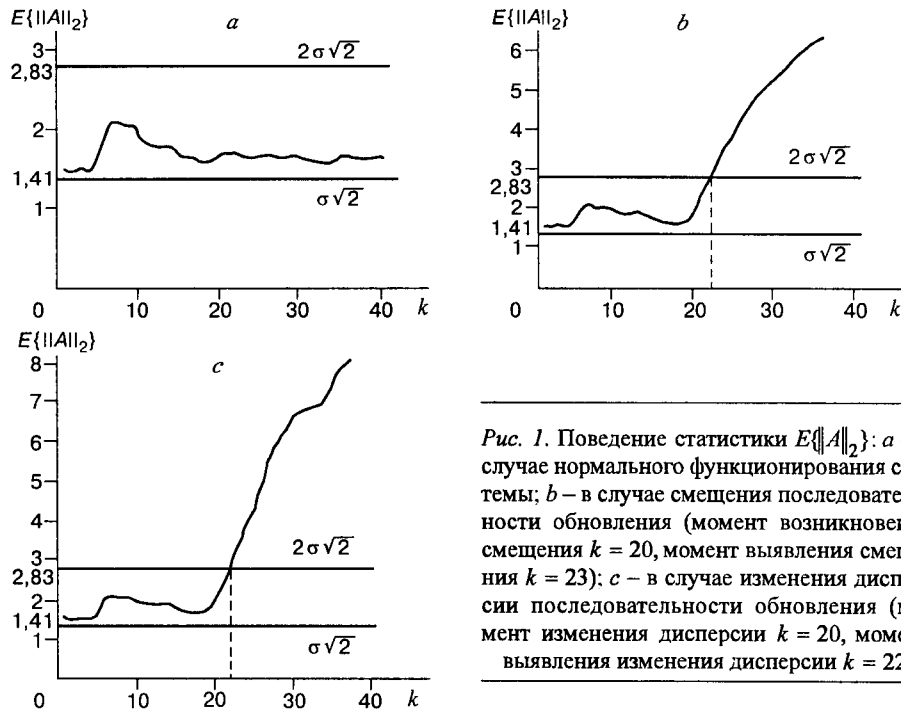


Рис. 1. Поведение статистики $E\{\|A\|_2\}$: a – в случае нормального функционирования системы; b – в случае смещения последовательности обновления (момент возникновения смещения $k = 20$, момент выявления смещения $k = 23$); c – в случае изменения дисперсии последовательности обновления (момент изменения дисперсии $k = 20$, момент выявления изменения дисперсии $k = 22$)

Пример 2. Пусть рассматривается двумерная двухканальная динамическая система, заданная уравнением состояния (1) и измерений для i -го канала: $Z_i(k) = H_i(k)X(k) + V_i(k)$, $i=1,2$.

Параметры указанной системы записываются в следующем виде:

$$\Phi(k+1, k) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,816 \\ -0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad H_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i=1,2;$$

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad R_{ii}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i=1,2.$$

Обработка измерений проводилась с помощью многоканального фильтра Калмана (13) (в данном случае двухканального) параллельной реализацией, т. е. оптимальная оценка вектора состояния получилась путем одновременного весового суммирования обновляющих последовательностей $v_i(k)$, $i=1,2$, двух каналов с использованием общего экстраполятора.

Покажем, что с помощью алгоритма 2 можно обнаружить возникшие в многоканальном фильтре Калмана неполадки в реальном времени.

При моделировании указанной задачи на ЭВМ по мере вычисления двухканальной калмановской оценки вектора состояния системы определялись значения нормализованной обновляющей последовательности с помощью (14). Далее в соответствии с определением 4 формировалась нормализованная матрица обновления размером 2×2 двухканального фильтра Калмана: $A(k) = [\tilde{v}_1(k), \tilde{v}_2(k)]$. Спектральная норма полученной матрицы обновления

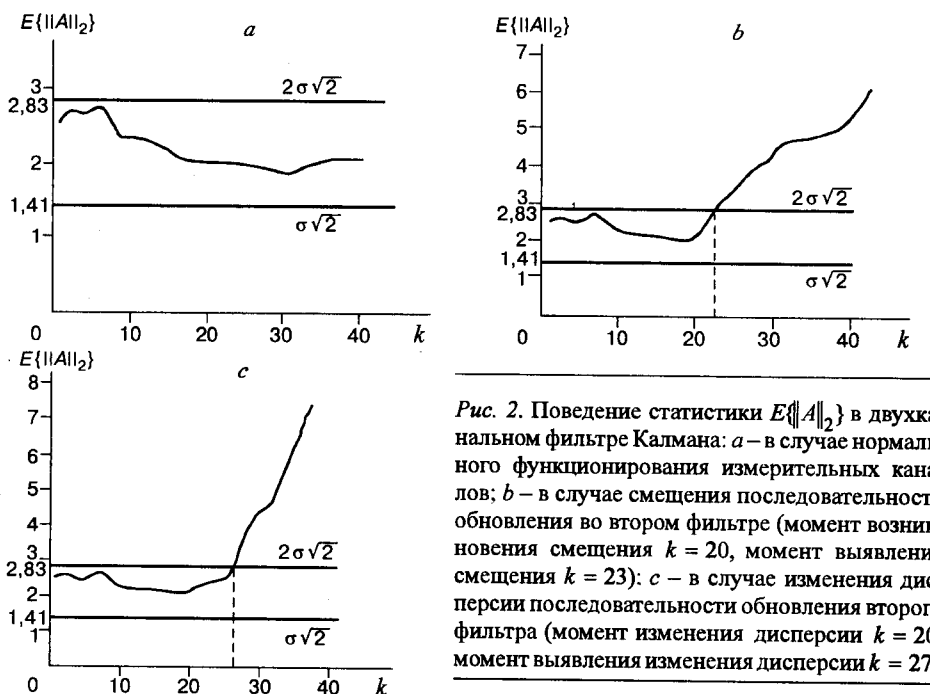


Рис. 2. Поведение статистики $E\{\|A\|_2\}$ в двухканальном фильтре Калмана: a – в случае нормального функционирования измерительных каналов; b – в случае смещения последовательности обновления во втором фильтре (момент возникновения смещения $k = 20$, момент выявления смещения $k = 23$); c – в случае изменения дисперсии последовательности обновления второго фильтра (момент изменения дисперсии $k = 20$, момент выявления изменения дисперсии $k = 27$)

и ее математическое ожидание вычислялись соответственно с помощью (5) и (6).

Правило принятия решения для рассматриваемого случая $n=2$, $m=2$ (здесь m – число каналов) записывается в виде (П1).

Полученные результаты приведены на рис. 2, $a-c$. На рис. 2, a показаны допустимые границы контролируемой статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ и график ее поведения в случае нормального функционирования обоих каналов фильтрации. Как видно из приведенного графика, в этом случае значения статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ находятся между верхней и нижней допустимой границей.

С целью проверки действенности предложенного алгоритма 2, начиная с шага $k = 20$, смоделирован отказ во втором канале, введено постоянное смещение, прибавлено к вычисленным значениям последовательности обновления $\tilde{v}_2(k)$ число 3. Из приведенных на рис. 2, b соответствующих результатов видно, что значение статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$, начиная с 20-го шага, резко возрастает и на шаге $k = 23$ становится больше верхней допустимой границы, что свидетельствует об обнаружении неполадки двухканального фильтра Калмана.

На рис. 2, c показаны полученные результаты при изменении с 20-го шага дисперсии последовательности обновления второго канала фильтрации (значения последовательности $\tilde{v}_2(k)$ умножены на 3). Из приведенных графиков видно, что значение статистики $E\{\|A(k)\|_2\}$ в этом случае после 20-го шага возрастает и на шаге $k = 27$ пересекает свою верхнюю допустимую границу. В результате на основе решающего правила (П1) фиксируется неполадка в двухканальном фильтре Калмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Willsky A. S.** A survey of design methods for failure detection in dynamic systems // Automatica. 1976. 12. P. 602.
2. **Chang C. B., Dunn R. P.** On GLR detection and estimation of unexpected inputs in linear discrete systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1979. AC-24, N 3. P. 499.
3. **Голован А. А., Мироновский Л. А.** Алгоритмический контроль фильтра Калмана // АиТ. 1993. № 7. С. 173.
4. **Гришин Ю. П., Казаринов Ю. М.** Динамические системы, устойчивые к отказам. М.: Радио и связь, 1985.
5. **Абдуллаев А. А., Гаджиев Ч. М.** Многоканальная идентификация параметров математической модели ППБУ в реальных условиях ее эксплуатации // ДАН Азерб. ССР. 1989. № 9. С. 10.
6. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
7. **Мартин У., Стабберуд А.** Процесс обновления в задачах идентификации // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980. С. 123.
8. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
9. **Hansen P. C.** The 2-norm of random matrices // Journ. Comput. and Appl. Mathematics. 1988. 23. P. 117.

Поступила в редакцию 25 марта 1997 г.

Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!