

УДК 621.315.592 : 772.99

И. Г. Пальчикова, С. Г. Раутиан

(Новосибирск)

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ СИЛА КРУГЛОЙ И КВАДРАТНОЙ ДИАФРАГМ

С помощью трехпараметрической линейно-гиперболической интерполяции найдено выражение для оптической силы круглой и квадратной диафрагм и для величины дифракционного сдвига изображения.

Введение. Фокусирующее действие диафрагмы [1] тесно связано с хорошо известными особенностями дифракционной картины Френеля. Согласно теории дифракции волн на полуплоскости, в область геометрической тени проникает световое поле, интенсивность которого возрастает с приближением к границе тени, но на границе она достигает всего $1/4$ от оптико-геометрического значения. В освещенной области наблюдаются светлые полосы, самая яркая из них ближе всего к границе тени и отстоит от нее на расстоянии $0,86\sqrt{\lambda z}$ (λ – длина световой волны, z – расстояние от экрана), а ее интенсивность в тех же единицах составляет 1,37. В качественном виде эти особенности сохраняются в световом поле, дифрагированном на отверстии конечных размеров и произвольной формы: светлые полосы окаймляют границу тени, если только расстояние до первой светлой полосы не превышает половины размера отверстия (a), т. е. выполнено условие $\sqrt{\lambda z} \leq a$. Какая-либо более тонкая структура распределения освещенности в поперечном сечении пучка существовать не может, поскольку условие $\lambda z \sim a^2$ означает, что на отверстии укладывается лишь одна зона Френеля. Следовательно, когда первая светлая полоса дифракционной картины Френеля попадает на оптико-геометрическую ось дифрагированной волны, в поперечном сечении пучка имеет место почти бесструктурное распределение освещенности. Освещенность на оси пучка оказывается большей, чем ее оптико-геометрическое значение, и распределение освещенности в поперечном сечении пучка на расстоянии $z = a^2/\lambda$ – более узким, чем без учета дифракции. Этот факт интерпретируется как фокусирующее действие диафрагмы, которой приписывается определенная оптическая сила. В свою очередь, фокусирующее действие с очевидностью должно приводить к сдвигу изображения точечного источника. Таким образом, фокусирующее действие и дифракционный сдвиг изображения присущи диафрагмам произвольной формы.

Явление дифракционного затягивания, или дифракционного сдвига изображения (фокуса), подробно рассмотрено для гауссовых пучков [2, 3] и в настоящее время активно изучается для сферических и цилиндрических волн [4–9]. Однако до сих пор не найдены приближенные простые формулы, которые позволяли бы рассчитывать дифракционный сдвиг фокуса сходящейся сферической световой волны при различных числах Френеля N и формах отверстия. Вычисления по формулам, предложенным в [4–6], дают значительные ошибки. Принципиальный недостаток этих формул состоит в том, что их аналитические свойства существенно отличаются от свойств точного решения в интервале малых N . В настоящей работе мы обсуждаем концепцию дифракционной оптической силы круглой и квадратной диафрагм и предлагаем достаточно точные формулы для дифракционного сдвига фокуса.

1. Дифракция на отверстиях произвольной формы. Будем рассматривать модуль амплитуды дифрагированного поля $|E(\mathbf{0}, z)|$ на оси сферической падающей волны с радиусом кривизны R . В отличие от предыдущих работ, посвященных сдвигу фокуса, мы отказываемся от характеристики эффекта отношением $\delta z/R = (z - R)/R$, потому что величина $\delta z/R$ хороша при $N \gg 1$ и не отвечает существу дела при $N \sim 1$ и $N \ll 1$, а следовательно, физике общей задачи. Будем использовать глубину Δz фокуса сферической волны в качестве параметра, по отношению к которому и оценим величину δz сдвига фокуса. Кроме того, расположим начало координат в центре диафрагмы. При анализе интеграла Френеля – Кирхгофа в параболическом приближении будем использовать эффективные числа Френеля n и n_z , которые определим через радиус a_e круга, равновеликого с отверстием:

$$\pi a_e^2 = S, \quad n = a_e^2/\lambda R, \quad n_z = a_e^2/\lambda z, \quad (1)$$

причем разность

$$\zeta = n_z - n \quad (2)$$

будет служить основной безразмерной переменной.

В принятых обозначениях модуль амплитуды поля $|E(\mathbf{0}, z)|$ можно записать в следующем виде:

$$|E(\mathbf{0}, z)| = (1 + n/\zeta)f(\zeta), \quad f(\zeta) = \zeta \left| \int \exp(ip\zeta r^2) dr \right|. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор в плоскости диафрагмы, нормированный на a_e . Координата z отсчитывается от центра диафрагмы. Интеграл вычисляется по поверхности диафрагмы. В принятой нормировке оптико-геометрическое значение $|E| = 1$.

Можно видеть, что функция $|E(\mathbf{0}, z)|$ явно зависит от двух параметров n и ζ и неявным образом – от формы отверстия, которая определяет область интегрирования. Существенно, что функция $f(\zeta)$ зависит только от ζ и формы отверстия и явно не зависит от радиуса кривизны R волнового фронта падающей волны. В этом смысле $f(\zeta)$ универсальна, она в равной мере описывает дифракцию плоской, сходящейся и расходящейся волн. Величина R начинает влиять на $f(\zeta)$ лишь после перехода от ζ к переменной z по формулам (1) и (2). В переменных же n, ζ амплитуда поля зависит от R только из-за множителя $1 + n/\zeta$. Эффект дифракционного сдвига изображения связан именно с

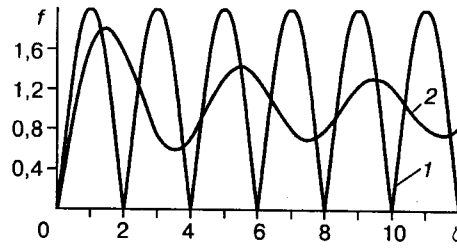


Рис. 1. Зависимость функции формы $f(\zeta)$ от разности чисел Френеля ζ : кривая 1 – для круглой диафрагмы, кривая 2 – для квадратной

множителем $1 + n/\zeta$. Ниже будет показано, что переменная ζ удобна и в вопросе о точности расчета дифракционного сдвига (см. соотношение (11) и его обсуждение).

2. Круглое отверстие. В случае круглого отверстия радиусом a распределение интенсивности $|E(\mathbf{0}, z/R)|^2 = I(\mathbf{0}, z/R)$ на оси дифрагированной сферической волны хорошо известно [4] и его можно записать в форме (3), используя вместо эффективных общепринятые числа Френеля для центра кривизны волнового фронта (N) и для текущей точки z (N_z):

$$|E(\mathbf{0}, z)| = (1 + N/\zeta) |2\sin(\pi\zeta/2)|, \quad f(\zeta) = |2\sin(\pi\zeta/2)|, \quad (4)$$

$$N = a^2/\lambda R, \quad N_z = a^2/\lambda z, \quad \zeta = N_z - N.$$

Вывод о фокусирующем действии диафрагмы непосредственно вытекает из соотношения (4). График функции $f(\zeta)$ приведен на рис. 1 (кривая 1). В случае плоской падающей волны ($N = 0$) главный максимум амплитуды обусловливается максимумом функции $f(\zeta)$, который появляется первым по мере увеличения ζ до значения $\zeta \equiv \zeta_0 = N_z = 1$ (или уменьшения z от бесконечности до величины $z = z_0 = a^2/\lambda$). В этой точке $|E(\mathbf{0}, z)| = 2$, т. е. в 2 раза превосходит оптико-геометрическое значение, а интенсивность – в 4 раза, и поперечное распределение обладает примерно в 2 раза меньшей шириной, чем определяемое по геометрической оптике. Указанное обстоятельство и означает чисто дифракционную фокусировку.

Положение максимумов интенсивности $|E(\mathbf{0}, z)|^2$ определяется корнями трансцендентного уравнения [4]:

$$\operatorname{tg}(u) = u \left(1 + \frac{2u}{\pi N} \right), \quad u = \pi\zeta/2. \quad (5)$$

Вследствие периодичности $\operatorname{tg}(u)$ уравнение (5) имеет бесконечное число решений, отвечающих максимумам модуля амплитуды. Нас интересует главный максимум, которому соответствует корень, расположенный в интервале $0 < \zeta \leq 1$. Этот корень уравнения (5) будем обозначать как ζ_m .

Корни уравнения (5) зависят от N , и основной вопрос, обсуждаемый в статье, состоит в выяснении характера зависимости $\zeta_m = \zeta_m(N)$. Явный вид обратной функции $N(\zeta_m)$ непосредственно следует из формулы (5):

$$N(\zeta_m) = \pi \zeta_m^2 / \{2[\operatorname{tg}(\pi \zeta_m / 2) - \pi \zeta_m / 2]\}. \quad (6)$$

Расчет $N(\zeta_m)$ по формуле (6) с достаточно малым шагом позволяет затем легко найти $\zeta_m(N)$ графически либо с помощью линейной интерполяции.

Выделим два предельных случая: малое дифракционное смещение, когда $\zeta_m \ll 1$ ($N \gg 1$), и большое дифракционное смещение, когда ζ_m расположено вблизи ζ_0 и выполняется неравенство $1 - \zeta_m \ll 1$ ($N \ll 1$). Поведение $N(\zeta_m)$ в предельных случаях легко определить, если в соотношении (6) заменить $\operatorname{tg}(\pi \zeta_m / 2)$ соответствующими степенными разложениями:

$$N = 12/(\pi^2 \zeta_m), \quad \zeta_m \ll 1; \quad N = \pi^2(1 - \zeta_m)/4, \quad |1 - \zeta_m| \ll 1. \quad (7)$$

Результат (7) совпадает с полученным в [4, 8] другим способом.

Для аналитического описания зависимости ζ_m от N предлагаем аппроксимирующую формулу, которая опирается на асимптотические значения (7) и в которой вместо тригонометрической функции, входящей в соотношение (6), фигурируют степенные функции:

$$N = -d\zeta_m + c + \frac{b}{\zeta_m}. \quad (8)$$

Три коэффициента b , c , d определяются по предельным значениям (7):

$$b = 12/\pi^2 = 1,21585, \quad d = \pi^2/4 - b = 1,25155, \quad c = d - b = 0,03570. \quad (9)$$

Формула (8) позволяет получить аналитическое выражение для функции $\zeta_m(N)$:

$$\zeta_m = \frac{2b}{N - c + \sqrt{(N - c)^2 + 4bd}}. \quad (10)$$

Обычно важно не абсолютное значение неопределенности положения изображения δz , но его отношение к дифракционной глубине резкости Δz (длине шейки пучка):

$$\Delta z = \frac{\lambda z^2}{a^2} = \frac{z}{N_z}, \quad \frac{\delta z}{\Delta z} = N_z \frac{\delta z}{z} = -\delta \zeta. \quad (11)$$

Следовательно, непосредственный интерес представляет точность нахождения $\zeta_m(N)$. Результаты численного расчета приведены на рис. 2: кривая 1 есть график функции $\zeta_m(N)$, рассчитанный по формуле (6); приближенные значения $\zeta_m(N)$ вычисляются по уравнению (10) и в масштабе рис. 2 не отличаются от кривой 1. На рисунке кривой 2 показана разность результатов первого и второго расчетов, увеличенная в 100 раз. Максимальная ошибка выражения (10) имеет место при $N = 2$ и составляет $\approx -0,0019$. Иными словами, ошибка вычисления положения изображения по формуле (10) не превышает 0,19 % от дифракционной глубины резкости в области $\infty > N \geq -0,37$, что во многих

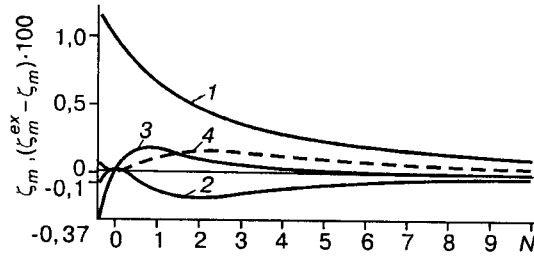


Рис. 2. Результаты численного расчета функции $\zeta_m(N)$

случаях более чем достаточно (значения $N < 0$ соответствуют расходящейся волне).

Можно применять и более простую формулу

$$\zeta_m = \frac{2b}{N + \sqrt{N^2 + 4b^2}} = \frac{24/\pi^2}{N + \sqrt{N^2 + (24/\pi^2)^2}}, \quad (10a)$$

получающуюся из (10) при $c = 0$, $b = d$. На рис. 2 дано графическое сопоставление ошибок приближения (10) и (10a): кривая 3 – разность точных и приближенных значений, вычисленных по формуле (10a), умноженная на 10^2 . Максимальная ошибка вычисления ζ_m по формуле (10a) для положительных значений N составляет 0,0016, а для отрицательных резко нарастает, составляя -0,0035 для $N = -0,37$.

Отметим некоторые физические выводы из равенства (10). Перейдем к размерным переменным и запишем (10) следующим образом:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R} + \Phi_D, \quad \Phi_D = \frac{\lambda}{a^2} \frac{2b}{N - c + \sqrt{(N - c)^2 + 4bd}}. \quad (12)$$

Соотношение (12) имеет вид формулы линзы, причем величину Φ_D можно рассматривать как оптическую силу диафрагмы дифракционного происхождения. Помимо множителя λ/a^2 , она содержит дополнительный фактор, описывающий зависимость Φ_D от $N = a^2/(\lambda R)$ или кривизны волнового фронта $1/R$. В предельных условиях $N \gg 1$ и $N \ll 1$ из формул (12) и (7) находим:

$$\Phi_D = \lambda b / (Na^2) = 12R(\lambda/(\pi a^2))^2, \quad N \gg 1; \quad (13)$$

$$\Phi_D = (1 - 4N/\pi^2)\lambda/a^2, \quad N \ll 1. \quad (14)$$

В случае (13) дифракционный сдвиг изображения $\delta z = z_m - R$ из центра кривизны волнового фронта составляет малую долю дифракционной глубины резкости Δz :

$$|\delta z| = R^2 \Phi_D = 12\Delta z / (\pi^2 N), \quad \Delta z = \lambda R^2 / a^2, \quad (15)$$

что, например, для $N = 10$ дает $|\delta z| \approx 0,12\Delta z$.

Выражение (14) соответствует слабо сходящейся волне, когда ее центр кривизны находится далеко в зоне Фраунгофера ($R \gg a^2/\lambda$) и фокусирующее действие кривизны исходного волнового фронта существенно слабее чисто дифракционной фокусировки. Обращает на себя внимание следующий, отмеченный в [8] факт: уменьшение оптической силы Φ_D с ростом $1/R$ как бы снижает суммарную роль «геометрической фокусировки»:

$$1/z = (1/R)(1 - 4/\pi^2) + \lambda/a^2, \quad (16)$$

причем это снижение составляет $1 - 4/\pi^2 = 0,595$, т. е. вполне заметно.

Соотношение (16) противоречит известному результату Рэлея, полученному в связи с анализом безлинзового изображения, в частности, в камере-обскуре [10, 11]. Согласно Рэлею, величины z , a и $|R|$ (в этом случае $R < 0$) связаны следующим равенством, записанным в наших обозначениях:

$$1/z + 1/|R| = \lambda/a^2, \quad (17)$$

которое отражает только фазовые свойства волн. Слагаемое $4/(\pi^2|R|)$ в формуле (16), дополняющее (17), обусловлено дифракционным сдвигом из-за изменения амплитуд интерферирующих волн.

3. Квадратное отверстие. Для квадратного отверстия функция $f(\zeta)$ в формуле (3) выражается через интегралы Френеля:

$$f(\zeta) = 2|C(\sqrt{\zeta}) + iS(\sqrt{\zeta})|^2 = 2[C^2(\sqrt{\zeta}) + S^2(\sqrt{\zeta})], \quad (18)$$

$$C(\sqrt{\zeta}) = \int_0^{\sqrt{\zeta}} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad S(\sqrt{\zeta}) = \int_0^{\sqrt{\zeta}} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt.$$

Здесь удобным параметром оказывается радиус описанной окружности $a_0 = \sqrt{2}a_k$, где $2a_k$ – сторона квадрата. Числа Френеля записываются как

$$n_z = \frac{a_0^2}{\lambda z}, \quad n = \frac{a_0^2}{\lambda R}, \quad a_0^2 = 2a_k^2, \quad \zeta = n_z - n = \frac{a_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right). \quad (19)$$

Главный максимум $f(\zeta)$ находится при

$$\zeta = \zeta_0 = 1,4629, \quad (20)$$

и в этой точке

$$f(\zeta_0) = 1,801, \quad f^2(\zeta_0) = 3,244. \quad (21)$$

Следовательно, дифракционное фокусирующее действие квадратного отверстия несколько меньше (19%), чем круглого. На рис. 1 приведен график $f(\zeta)$ (кривая 2). Предельное значение $f(\zeta)$ и $|E(0, z)|^2$ при $\zeta \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$) равно 1. В отличие от круглого отверстия осцилляции $f(\zeta)$ затухают по мере приближения к диафрагме. Этот вывод не специфичен для квадратного отверстия, но, как показано в [1], является общим для любых некруглых диафрагм.

Положение максимумов интенсивности дается корнями уравнения $|E(0, z)|' = 0$, из которого следует явный вид обратной функции $n(\zeta_m)$:

$$n(\zeta_m) = \frac{\zeta_m^{3/2} [C(\sqrt{\zeta_m}) \cos(\pi\zeta_m/2) + S(\sqrt{\zeta_m}) \sin(\pi\zeta_m/2)]}{C(\sqrt{\zeta_m})^2 + S(\sqrt{\zeta_m})^2 - \sqrt{\zeta_m} [C(\sqrt{\zeta_m}) \cos(\pi\zeta_m/2) + S(\sqrt{\zeta_m}) \sin(\pi\zeta_m/2)]}. \quad (22)$$

Интересующая нас функция $\zeta_m(N)$ находится линейной интерполяцией из расчетных значений $n(\zeta_m)$.

Поведение $n(\zeta_m)$ в предельных случаях малого и большого дифракционных смещений выводится из соотношения (22) с использованием соответствующих степенных разложений подынтегральных тригонометрических функций:

$$n = \frac{45}{2\pi^2 \zeta_m}, \quad \zeta_m \ll 1; \quad (23)$$

$$n = \gamma(\zeta_0 - \zeta_m), \quad \zeta_0 - \zeta_m \ll 1, \quad (24)$$

где коэффициент

$$\gamma = \frac{\zeta_0 [\pi\sqrt{\zeta_0} \sqrt{C^2(\sqrt{\zeta_0}) + S^2(\sqrt{\zeta_0})} - 1]}{2[C^2(\sqrt{\zeta_0}) + S^2(\sqrt{\zeta_0})]} = 2,1157.$$

По аналогии с разд. 2 предлагаем приближенные формулы для $n(\zeta_m)$ и $\zeta_m(n)$:

$$n = -d_k \zeta_m + c_k + \frac{b_k}{\zeta_m}, \quad (25)$$

$$\zeta_m = \frac{2b_k}{n - c_k + \sqrt{(n - c_k)^2 + 4b_k d_k}}. \quad (26)$$

Коэффициенты b_k, c_k, d_k определяются по предельным значениям (23), (24):

$$b_k = 45/2\pi^2 = 2,2797, \quad d_k = \gamma - b_k/\zeta_0^2 = 1,0500, \quad c_k = d_k \zeta_0 - b_k/\zeta_0 = -0,0230. \quad (27)$$

На рис. 2 дано графическое сопоставление точных и приближенных значений $\zeta_m(n)$, найденных числовым расчетом по (22) и (26). Разность точных и приближенных значений, умноженная на 10^2 , изображена кривой 4. Максимальная ошибка выражения (26) имеет место при $n = 2,3$ и составляет 0,0015. Следовательно, предлагаемая аппроксимация для дифракционного сдвига изображения с данной точностью хороша и в случае квадратного отверстия.

С другой стороны, заманчивая попытка свести сдвиг при квадратном отверстии к сдвигу при некотором эффективном круглом в действительности оказывается довольно грубой. Форма зрачка проявляется, в частности, в различии знаков параметра s . Мы пытались применить формулу (8) с численными значениями коэффициентов (9) для определения сдвига фокуса в случае квадратного отверстия путем замены N на αl , где коэффициент α находился

методом наименьших квадратов. Оптимальная подгонка дает ошибку определения ζ_m , равную -0,083, если $n > 2,68$, и 0,4, если $n \rightarrow 0$ ($\alpha = 0,3758$). Иными словами, только с такой точностью дифракционные сдвиги при квадратном и эффективном круглом отверстиях эквивалентны. В то же время аппроксимационные формулы (25) и (26) обеспечивают гораздо более высокую точность ($\sim 0,0015$).

Заключение. В данной работе понятие оптической силы диафрагмы, введенное Рэлеем при рассмотрении камеры-обскуры, распространено на случай круглых и квадратных отверстий и положительных чисел Френеля.

Для приближенного аналитического описания дифракционного сдвига мы использовали трехпараметрическую линейно-гиперболическую интерполяцию, сводя к нулю разность значений $\zeta_m^{ex} - \zeta_m$ в двух точках и разность производных в одной из них.

Основные закономерности дифракционного сдвига изображения предопределены множителем $1 + n/\zeta$ в общем выражении (3) для амплитуды поля. Поэтому в качественной форме они должны быть присущи диафрагмам с различными формами. Анализ круглых и квадратных диафрагм наглядно продемонстрировал эту общность эффекта. Интерполяционная формула (25) для оптической силы квадратных диафрагм построена по тому же алгоритму, что и ее аналог (8) для круглых, и максимальная ошибка вычисления ζ_m не превышает $\approx 0,15$ % при надлежащем выборе коэффициентов b, c, d . Высокая точность аппроксимации убедительно подтверждает правильность составленной нами физической картины фокусирующего действия диафрагм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раутиан С. Г., Пальчикова И. Г. Дифракционный сдвиг изображения // Оптика и спектроскопия. 1999. 97, № 3.
2. Kogelnik H. // Bell Syst. Tech. J. 1965. 44. P. 465.
3. Исаев А. А., Казарян М. А., Петраш Г. Г. и др. Эволюция гауссовых пучков и импульсная генерация в лазерах с неустойчивыми резонаторами // Квантовая электроника. 1975. 2, № 6. С. 1125.
4. Li Y., Wolf E. Focal shifts in diffracted converging spherical waves // Opt. Commun. 1981. 39, N 4. P. 211.
5. Szapiel S. Marechal intensity formula for small-Fresnel-number systems // Opt. Lett. 1983. 8, N 6. P. 327.
6. Li Y. Focal shift formulae // Optik. 1984. 69, N 1. S. 41.
7. Li Y. A high-accuracy formula for fast evaluation of the effect of focal shift // Journ. Modern Optics. 1991. 38, N 9. P. 1815.
8. Jiang X., Lin Q., Wang S. Optimum image plane of the pinhole camera // Optik. 1994. 97, N 1. P. 41.
9. Wang W., Wolf E. Far-zone behavior of focused fields in systems with different Fresnel numbers // Opt. Commun. 1995. 119, N 5, 6. P. 453.
10. Lord Rayleigh. On Pinhole Photography. Scientific Papers III. Cambridge U. Press, 1902. P. 429.
11. Wood R. W. Physical Optics. N. Y.: Macmillian Company, 1934.

Поступила в редакцию 24 июня 1999 г.