РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1999

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов
(Новосибирск)

ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДНЫХ ШУМОВ НА ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА ПРИ ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Получены соотношения для оценки точности восстановления стационарного случайного сигнала при его периодически неравномерной дискретизации. Погрешность восстановления обусловлена как наличием амплитудного шума отсчетов, так и неограниченностью по частоте спектра мощности сигнала.

В [1, 2] рассмотрено восстановление сигнала с использованием набора весовых функций $\{w_k(\tau)\}$ в случае, когда отсчеты этого сигнала берутся в моменты времени, образующие периодически неравномерную последовательность:

$$t_{kn} = t_k + nN\Delta, \qquad k = \overline{0, N-1}, \;\; 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} \le N\Delta.$$

Показано, что сигнал $f(t)$ точно описывается рядом

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k + nN\Delta) w_k(t - t_k - nN\Delta), \tag{1}$$

если спектр сигнала вне полосы $|\omega| \le \pi/\Delta$ равен нулю, а весовые функции

$$w_k(\tau) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}\tau}{\frac{\pi}{N\Delta}\tau} \prod_{r=0,\, r\ne k}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(\tau + t_k - t_r)}{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_r)}, \qquad k = \overline{0, N-1}. \tag{2}$$

Соотношение (1) с весовыми функциями (2) является расширением теоремы отсчетов на случай, когда граничная частота спектра сигнала не превосходит величины π/Δ, где интервал Δ совпадает со средним значением интервала времени между отсчетами в периодически неравномерной последовательности моментов времени t_{kn}.

Ниже рассматривается ситуация, когда отсчеты сигнала содержат некоррелированный с ними аддитивный шум $\varphi(t_{kn})$ и частотные ограничения на спектр сигнала отсутствуют. Сигнал восстанавливается путем использования соотношения

$$f^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}(f(t_k+nN\Delta)+\varphi(t_k+nN\Delta))w_k(t-t_k-nN\Delta). \tag{3}$$

Оптимальная фильтрация при периодически неравномерной дискретизации. В качестве критерия близости между сигналом $f(t)$ и его восстановленным значением $f^*(t)$ используется средний по множеству и времени квадрат ошибки

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle=\frac{1}{N\Delta}\int_0^{N\Delta}dt\left\langle(f(t)-f^*(t))^2\right\rangle. \tag{4}$$

В предположении случайности и стационарности сигнала и шума величина $\langle\varepsilon^2\rangle$ (см., например, [3])

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle=\frac{1}{N\Delta}\times$$

$$\times\int_0^{N\Delta}dt\left[\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_f(\omega)\left|\exp\{-i\omega t\}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\{-i\omega(t_k+nN\Delta)\}w_k(t-t_k-nN\Delta)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_\varphi(\omega)\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\{-i\omega(t_k+nN\Delta)\}w_k(t-t_k-nN\Delta)\right|^2\right], \tag{5}$$

где $S_f(\omega)$ и $S_\varphi(\omega)$ – спектральные плотности сигнала и шума. Если в соотношении (5) произвести замену

$$w_k(t-t_k-nN\Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\exp\{-i\lambda(t-t_k-nN\Delta)\}\widetilde{w}_k(\lambda), \tag{6}$$

затем использовать формулу суммирования Пуассона [4]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{inN\Delta(\lambda-\omega)\}=\frac{2\pi}{N\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\lambda-\omega-\frac{2\pi}{N\Delta}n\right) \tag{7}$$

и проинтегрировать по частоте λ, учитывая фильтрующие свойства дельта-функции, то после интегрирования по времени оно может быть приведено к следующему виду:

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_f(\omega)\left(1-2\operatorname{Re}\widetilde{w}_\Sigma(0,\omega)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{w}_\Sigma\left(n,\omega+\frac{2\pi}{N\Delta}n\right)\right|^2\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{\varphi}(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widetilde{w}_{\Sigma}\left(n, \omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n \right) \right|^2, \qquad (8)$$

где

$$\widetilde{w}_{\Sigma}\left(n, \omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n \right) = \frac{2\pi}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N\Delta} n t_k \right\} \widetilde{w}_k\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n \right). \qquad (9)$$

Минимизация (8) по набору спектров весовых функций $\{\widetilde{w}_k(\omega)\}$ приводит после предварительных преобразований к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{w}_k(\omega) a_{lk}(\omega) = \frac{N\Delta}{2\pi} S_f(\omega), \qquad l = \overline{0, N-1}, \qquad (10)$$

где элемент матрицы A

$$a_{lk}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\Sigma}\left(\omega - \frac{2\pi}{N\Delta} n \right) \exp\left\{ i \frac{2\pi}{N\Delta} n (t_k - t_l) \right\}, \qquad (11)$$

а $S_{\Sigma}(\omega) = S_f(\omega) + S_{\varphi}(\omega)$.

При этом минимальный средний квадрат ошибки

$$\min_{\{\widetilde{w}_k(\omega)\}} \left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \left(1 - S_f(\omega) \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_{lk}}{|A|} \right). \qquad (12)$$

Здесь $|A|$ – определитель матрицы A, а величины A_{lk} – соответствующие алгебраические дополнения.

Спектры оптимальных весовых функций

$$\widetilde{w}_k(\omega) = \frac{N\Delta}{2\pi} S_f(\omega) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{A_{lk}}{|A|}, \qquad k = \overline{0, N-1}. \qquad (13)$$

Соотношение (12) позволяет оценить потенциальную точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации и наличии амплитудного шума. Соотношение (13) в принципе дает возможность получить весовые функции $\{w_k(\tau)\}$ оптимального интерполятора.

При равномерной дискретизации амплитудный шум отсчетов и наличие в спектре сигнала частот, превышающих по модулю величину π/Δ, оказывают минимальное влияние на точность восстановления. Так, например, использование для восстановления сигнала теоремы отсчетов дает величину среднего квадрата ошибки

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = 2 \int_{|\omega| > \pi/\Delta} d\omega S_f(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{\varphi}(\omega). \qquad (14)$$

При оптимальной интерполяции эта величина незначительно уменьшается и составляет

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\left(1 - \frac{S_f(\omega)}{\sum_{-\infty}^{\infty} S_\Sigma\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}n\right)}\right). \tag{15}$$

Для случая периодически неравномерной дискретизации ситуация может очень резко измениться. Рассмотрим для примера случай, когда период неравномерности равен 2Δ. Если $N=2$, то, как следует из (12), после очевидных преобразований

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\left(1 - \frac{2S_f(\omega)\sum_{-\infty}^{\infty} S_\Sigma\left(\omega - \frac{\pi}{\Delta}n\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\Delta}n\Delta_0\right)\right)}{\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} S_\Sigma\left(\omega - \frac{\pi}{\Delta}n\right)S_\Sigma\left(\omega - \frac{\pi}{\Delta}m\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\Delta}(n-m)\Delta_0\right)\right)}\right), \tag{16}$$

где интервал $\Delta_0 \le \Delta$.

Положим в (16), что шум отсутствует $(S_\Sigma(\omega) = S_f(\omega))$, а

$$S_f(\omega) = \sigma_f^2 \frac{\Delta}{2\pi}\left\{(1-(n+1)\alpha)1\left[\frac{\pi}{\Delta} - |\omega|\right] + \alpha 1\left[\frac{\pi}{\Delta}(n+1) - |\omega|\right]\right\}, \tag{17}$$

где величина $\alpha = \alpha_0/2n$, а величина $\alpha_0\sigma_f^2/2$ равна энергии сигнала при $|\omega| > \pi/\Delta$. Тогда после вычислений ($\alpha_0 \ll 1$)

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle \approx \frac{\alpha_0\sigma_f^2 C_1}{4n\left(2\left(1-\cos\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0\right) + \frac{\alpha_0 C_2}{2n}\right)}. \tag{18}$$

Здесь

$$C_1 = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\left(2-\cos\frac{\pi}{\Delta}k\Delta_0 - \cos\frac{\pi}{\Delta}(k+1)\Delta_0\right) + n\left(1-\cos\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0\right)\right),$$

$$C_2 = 4\left(\sum_{k=1}^{n}\left(2-\cos\frac{\pi}{\Delta}k\Delta_0 - \cos\frac{\pi}{\Delta}(k+1)\Delta_0\right) - n\left(1-\cos\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0\right)\right). \tag{19}$$

Полагая в (18) величины Δ_0 и Δ равными, получим $\langle\varepsilon^2\rangle \approx \alpha_0\sigma_f^2$, что соответствует дисперсии ошибки при равномерной дискретизации (15). При стремлении величины Δ_0 к нулю коэффициент усиления шума

$$\frac{\left\langle \varepsilon^2(\Delta_0 \to 0)\right\rangle}{\left\langle \varepsilon^2(\Delta_0 = \Delta)\right\rangle} \approx \left(\sum_{k=1}^{n}(k^2 + (k+1)^2) + n\right)\Big/2n. \tag{20}$$

Из (20) следует, что при $n = 1,2,3$ эта величина составляет 3,5 и 23/3 соответственно. Положим далее, что спектр мощности сигнала равномерен и лежит в полосе $|\omega| \le \pi/\Delta$, а спектр мощности шума также равномерен, но расположен в полосе частот $|\omega| \le (\pi/\Delta)(n+1)$, так что суммарный спектр мощности

$$S_\Sigma(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi}\sigma_f^2 \left\{ 1\left[\frac{\pi}{\Delta} - |\omega|\right] + \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_f^2(n+1)} 1\left[\frac{\pi}{\Delta}(n+1) - |\omega|\right] \right\}. \tag{21}$$

Если обозначить отношение $\sigma_\varphi^2/\sigma_f^2(n+1)$ величиной β, то

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \sigma_\varphi^2 \frac{\dfrac{C_1}{n+1} + \dfrac{C_2\beta}{n+1}}{2\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{\Delta}\Delta_0\right) + 2C_1\beta + C_2\beta^2}, \tag{22}$$

где

$$C_1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \left(2 - \cos\frac{\pi}{\Delta}k\Delta_0 - \cos\frac{\pi}{\Delta}(k+1)\Delta_0 \right) + 1 - \cos\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0 \right),$$

$$C_2 = 2\sum_{k=1}^{2n+1} \left(1 - \cos\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0 \right)(2n+2-k). \tag{23}$$

Как следует из (22), при малых β величина $\langle \varepsilon^2(\Delta_0 = \Delta) \rangle \approx \sigma_\varphi^2$, а при стремлении Δ_0 к нулю отношение

$$\frac{\left\langle \varepsilon^2(\Delta_0 \to 0) \right\rangle}{\left\langle \varepsilon^2(\Delta_0 = \Delta) \right\rangle} \approx \left(\sum_{k=1}^{n} (k^2 + (k+1)^2) + 1 \right) \Big/ (n+1). \tag{24}$$

Таким образом, коэффициент усиления амплитудного шума резко возрастает при расширении его частотной полосы, хотя и его энергия остается неизменной. Для $n = 1,2$ и 3 коэффициент усиления шума соответственно равен 3, 19/3 и 11.

Отметим, что при равномерной дискретизации и относительной малости энергии сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$ и относительной малости амплитудного шума теорема отсчетов оказывается практически эквивалентной алгоритму оптимальной фильтрации. Это обстоятельство позволяет надеяться на то, что при соблюдении вышеперечисленных условий теорема отсчетов для периодически неравномерной дискретизации будет близка к оптимальной процедуре восстановления сигнала.

Теорема отсчетов при периодически неравномерной дискретизации. Соотношения (8) и (9) определяют дисперсию ошибки восстановления сигнала при неравномерной дискретизации для произвольного набора спектров весовых функций $\{\widetilde{w}_k(\omega)\}$. Для теоремы отсчетов при периодически неравномерной дискретизации он может быть получен либо путем непосредственного вычисления преобразования Фурье от (2), либо путем модернизации соответствующего выражения из [1] и имеет следующий вид:

$$\{\widetilde{w}_k(\omega)\} = \frac{N\Delta}{2\pi}\sum_{r=0}^{N-1} 1\left[\frac{\pi}{N\Delta} - \left|\omega + \frac{\pi}{N\Delta}(N-2r-1)\right|\right] \times$$

$$\times(-1)^r z_k^r \left(\sum_{0\le i_1<\ldots<i_{N-1-r}\le N-1,\,\ne k} \prod z_{i_m}\right) \Bigg/ \left(\prod_{l=0,\,l\ne k}^{N-1} (z_l - z_k)\right), \qquad (25)$$

где $k=\overline{0, N-1}$; $z_p = \exp\{(-i2\pi/N\Delta)t_p\}$, $p = k, i_m, l$.

Заметим, что это соотношение является также решением системы линейных уравнений (10), если спектр мощности сигнала равномерен в полосе частот $|\omega| \le \pi/\Delta$, а амплитудный шум отсутствует.

Соотношение (25) определяет спектр усредненной весовой функции (9) для рассматриваемого случая. Если спектр мощности сигнала и амплитудного шума расположен в полосе $|\omega| \le \pi/\Delta$, то анализ (8) показывает, что при использовании теоремы отсчетов (2) дисперсия ошибки восстановления совпадает с дисперсией амплитудного шума. Иначе обстоит дело, когда спектр сигнала или шума не удовлетворяет этим условиям.

Рассмотрим в качестве примера случай $N=2$ в той же последовательности, что и в предыдущем разделе. Если шум отсутствует, а спектр сигнала не ограничен, то вычисления показывают, что

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{k\pi}{\Delta}\Delta_0 + \sin^2\frac{(k+1)\pi}{\Delta}\Delta_0}{\sin^2\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0} + 1\right)\int_{\frac{k\pi}{\Delta}}^{\frac{(k+1)\pi}{\Delta}} d\omega S_f(\omega). \qquad (26)$$

Эта величина для рассмотренного выше примера совпадает с (18), если ширина полосы сигнала $2(n+1)\pi/\Delta$ не слишком велика и энергия сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$ также относительно невелика. Из (25) следует, что величина дополнительной ошибки при $\Delta_0 \to 0$ остается конечной, если скорость убывания спектра мощности сигнала удовлетворяет определенным условиям, например существованию первой среднеквадратичной производной. Это обстоятельство обусловлено тем, что при $N=2$ и $\Delta_0 \to 0$ интерполяция по неравномерным отсчетам превращается в интерполяцию по значениям сигнала и его производной при вдвое низшей частоте дискретизации [2].

Когда спектр сигнала ограничен по частоте ($|\omega| \le \pi/\Delta$) и присутствует амплитудный шум, то увеличение дисперсии ошибки происходит только за счет энергии шума:

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = 2\int_{|\omega|<\frac{\pi}{\Delta}} d\omega S_\varphi(\omega) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{k\pi}{\Delta}\Delta_0 + \sin^2\frac{(k+1)\pi}{\Delta}\Delta_0}{\sin^2\frac{\pi}{\Delta}\Delta_0} + 1\right)\int_{\frac{k\pi}{\Delta}}^{\frac{(k+1)\pi}{\Delta}} d\omega S_\varphi(\omega). \qquad (27)$$

Это соотношение в асимптотике (малая дисперсия шума σ_φ^2 и не слишком большая ширина его частотной полосы $2(n+1)\pi/\Delta$) также совпадает для рассмотренного выше примера с (22). Относительно соотношения (27) справедливы те же замечания, что и относительно (26).

Таким образом, теорему отсчетов при определенных условиях, по-видимому, можно рассматривать как асимптотически оптимальное представление сигнала с неограниченным спектром и при наличии амплитудного шума.

Восстановление сигнала. Восстановление сигнала при периодически неравномерной дискретизации при помощи набора весовых функций $\{w_k(\tau)\}$ представляется не очень удобным. По-видимому, более желательными являются переход к равномерной дискретизации и последующее использование стационарного интерполяционного фильтра с весовой функцией $w(\tau)$. Естественно, это связано с вычислением значений сигнала при равноотстоящих значениях аргумента. Эта операция и последующее восстановление сигнала эквивалентны повторной дискретизации. Дисперсия ошибки восстановления после этой операции

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega)\left(1 - 2\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}(\omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\tilde{w}_\Sigma\left(mN, \omega + \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega (S_f(\omega) + S_\varphi(\omega)) \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\omega}_\Sigma\left(n, \omega + \frac{2\pi}{\Delta}n\right)\right|^2 \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right)^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}(\omega)\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_\eta\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}m\right), \tag{28}$$

где $S_\eta(\omega)$ – спектр мощности шума, сопровождающего повторную дискретизацию. Предполагается, что он некоррелирован с подвергающимся повторной дискретизации сигналом. Если в качестве стационарного фильтра при повторной равномерной дискретизации используется идеальный фильтр нижних частот, т. е. теорема отсчетов, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\right)^2 = 1. \tag{29}$$

Когда при этом для первичного восстановления сигнала по периодически неравномерной последовательности отсчетов используется теорема отсчетов с весовыми функциями $\{w_k(\tau)\}$, определенными в (2), то

$$2\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}(\omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\tilde{w}_\Sigma\left(mN, \omega + \frac{2\pi}{\Delta}m\right) = 2\frac{2\pi}{\Delta}\tilde{w}(\omega)\operatorname{Re}\tilde{w}_\Sigma(0,\omega) \tag{30}$$

и дисперсия ошибки восстановления увеличивается только за счет шума, сопровождающего повторную дискретизацию. Если этим шумом можно пренебречь, то соотношение (28) совпадает с (8).

Искажение сигнала при его восстановлении за счет амплитудных шумов и составляющей на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$ минимально при равномерной дискретизации. Увеличение дисперсии шума при периодически неравномерной дискретизации может быть весьма существенным и связано с периодом неравномерности N, неравномерностью шага дискретизации и дифференциальными свойствами сигнала. Теорема отсчетов для периодически неравномерной дискретизации [1, 2], получаемая в предположении ограниченности спектра сигнала частотой $\omega = \pi/\Delta$ и отсутствия амплитудных шумов, по-видимому, является асимптотически оптимальной и при нарушении этих условий, если в случае равномерной дискретизации ошибки, обусловленные этими нарушениями, невелики и сигнал обладает определенными дифференциальными свойствами. При определенных условиях переход от периодически неравномерной к равномерной дискретизации не вызывает особых дополнительных шумов, связанных с этой процедурой.

Автор признателен д-ру техн. наук А. Н. Касперовичу за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00610).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth limited signal // Trans. IRE. 1956. **CT-3**, N 4. P. 251.
2. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Методы теории целых функций в радиоразведке, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962. С. 117.
3. **Ефимов В. М.** Квантование по времени при измерении и контроле. М.: Энергия, 1969.
4. **Бохнер С.** Лекции об интегралах Фурье. М.: ГИФМЛ, 1962.

Поступила в редакцию 25 июня 1999 г.