

УДК 681.513

А. В. Лапко, В. А. Лапко, С. В. Ченцов

*(Красноярск)***НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ
В УСЛОВИЯХ МАЛЫХ ВЫБОРОК***

С позиций принципов имитации систем и последовательных процедур принятия решений рассматриваются направления решения проблем анализа малых выборок. Предлагаются оригинальные непараметрические методы классификации статистических данных, модели стохастических зависимостей и самообучающиеся алгоритмы оптимизации статических объектов, развивающие теорию непараметрических обучающихся систем.

Введение. Внимание исследователя всегда привлекали методы обработки данных, ориентированные на достаточно низкий уровень априорной информации, что объясняется не только распространенностью в практике подобных условий, но и возможностью построения универсальных алгоритмов, не зависящих от природы анализируемых объектов. Указанные особенности свойственны непараметрическим моделям и алгоритмам. Их применение не требует введения системы предположений для подгонки объективной реальности под узкие рамки конкретного метода. Основываясь в значительной степени на обучающихся выборках, можно получить результаты, максимально адекватные действительности.

Актуальным направлением развития теории непараметрической статистики является разработка методов принятия решений в условиях малых выборок.

В данном случае применение традиционных подходов не обосновано. Для решения проблемы анализа малых выборок предлагается, используя принципы имитации систем и последовательные процедуры принятия решений, искусственно увеличить объем исходных данных либо отношение объем выборки/размерность, что позволяет воспользоваться хорошо разработанным аппаратом непараметрической статистики.

С этих позиций синтезированы непараметрические модели распознавания образов и нестационарных временных зависимостей, рассмотрены задачи оптимизации и идентификации систем в условиях малых выборок.

1. Непараметрическая оценка плотности вероятности в условиях малых выборок. Для решения проблемы малых выборок при оценивании плотностей вероятности $p(x)$ увеличим объем исходных данных $x^i, i=1, n$, за счет результатов статистического моделирования. С этой целью в β -окре-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-01043).

стности каждой i -й точки выборки осуществим m имитаций с законом распределения $p_2(x_2)$. Полученная статистическая выборка $x^i + x_2^j$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, при равновероятных значениях x^i , $i = \overline{1, n}$, соответствует смеси плотностей вероятности

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_2^i(x_2). \quad (1)$$

Нетрудно заметить, что непараметрическая оценка (1) имеет вид

$$\tilde{p}(x) = (nmc)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Phi \left(\frac{x - x^i - x_2^j}{c} \right), \quad (2)$$

где $\Phi(\cdot) \in H$ – положительные, нормированные и симметричные ядерные функции; $c = c(n)$ – последовательность положительных чисел (коэффициентов размытости) [1].

Рассмотрим асимптотические свойства статистики (2). Введем обозначения: $\bar{x}^\nu = \int x^\nu p(x) d(x)$, $\bar{x}_2^\nu = \int x_2^\nu p_2(x_2) dx_2$, $\nu = \overline{1, 4}$, где ν – показатель степени.

Предположим, что $p(x)$ ограничена и непрерывна со всеми своими производными до порядка k включительно на $\Omega(x)$, причем $\|p^{(k)}(x)\| < \infty \forall x \in \Omega(x)$. Эти условия, налагаемые на $p(x)$, обозначим через G_k . Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Пусть 1) $p(x)$ и $p_2(x_2)$ удовлетворяют условиям G_2 , причем $p_2(x_2)$ является симметричной функцией, $\Phi(u) \in H$; 2) последовательности $c > 0$, $\beta > 0$, $\beta > c$ такие, что при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ значения $c \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, а $\bar{x}_2^2 (nmc)^{-1} \rightarrow 0$.

Тогда смещение

$$\mu\{\tilde{p}(x) - p(x)\} \approx \frac{p^{(2)}(x)}{2} (c + \bar{x}_2^2),$$

квадратическое отклонение

$$\begin{aligned} \mu\{(\tilde{p}(x) - p(x))^2\} \approx & \frac{p^{(2)}(x) \|\Phi(u)\|^2}{2nmc} \bar{x}_2^2 + \frac{1}{n} \left[p_2^2(x_2) - 2p_2(x_2)p_2^{(1)}(x_2)\bar{x} + \right. \\ & \left. + ((p_2^{(1)}(x_2))^2 + p_2(x_2)p_2^{(2)}(x_2))\bar{x}^2 - p_2^{(1)}(x_2)p_2^{(2)}(x_2)\bar{x}^3 + \frac{(p_2^{(2)}(x_2))^2}{4} \bar{x}^4 \right] + \\ & + \frac{1}{m} \left[p^2(x) + (p^{(1)}(x))^2 \bar{x}_2^2 + \frac{(p^{(2)}(x))^2}{4} \bar{x}_2^4 + p(x)p^{(2)}(x)\bar{x}_2^2 \right] + \\ & + \frac{(p^{(2)}(x))^2}{4} (c^2 + \bar{x}_2^2)^2. \end{aligned}$$

Отметим естественную зависимость асимптотических свойств $\tilde{p}(x)$ от объема исходной информации и результатов статистического моделирования. Причем условия конечных n и $m \rightarrow \infty$ не обеспечивают сходимость $\tilde{p}(x)$ к $p(x)$.

Учитывая, что непараметрические алгоритмы распознавания образов являются статистическими оценками линейных функционалов от плотности вероятности, появляется возможность их синтеза и анализа на основе предложенной статистики (2).

Разработанная непараметрическая оценка плотности вероятности имеет самостоятельное значение в имитационном моделировании. Доказательство теоремы обосновывает методику продолжения случайных последовательностей в соответствии с правилом синтеза оценки плотности вероятности.

2. Многоуровневые системы распознавания образов. Основным показателем малых выборок служит низкий уровень отношения объем выборки/размерность пространства признаков (n/k). Для обеспечения приемлемого отношения (n/k) предлагается условно-последовательная процедура принятия решений. Исходная задача распознавания образов (РО) разбивается на T взаимосвязанных задач РО $m(x) = \{m_t(x(t)), t=1, T\}$ по ограниченным наборам признаков сигнала $x = (x(t), t=1, T)$.

Решающее правило на каждом последующем этапе формируется в пространстве признаков $x(t+1)$ по данным ошибочных ситуаций предыдущего этапа:

$$m_t(x(t)) : \begin{cases} x \in \Omega_j(x), \text{ если } f_{jj}(x(t)) < 0 \text{ и } p_j(x(t)) = 0, \\ \text{использовать } m_{t+1}(x(t+1)), \text{ если } x(t) \in \Omega_{jj}(x(t)). \end{cases}$$

Здесь алгоритм $m_{t+1}(x(t+1))$ осуществляет классификацию в пространстве признаков $x(t+1)$ при условии принадлежности $x(t)$ области пересечения классов $\Omega_{jj}(x(t)) = \Omega_j(x(t)) \cap \Omega_{jj}(x(t))$; $f_{jj}(\cdot)$ – уравнение разделяющей поверхности между j -м классом и областью $\Omega_{jj}(x(t))$.

Очевидно, что на первых этапах последовательностью алгоритмов $\{m_t(x(t)), t=1, T-1\}$ решения принимаются однозначно, а ошибка распознавания образов формируется на заключительном этапе.

Использование иерархических структур в процессах классификации создает предпосылки рационального учета дополнительной информации о ранее вскрытых закономерностях в пространстве признаков сигнала $x(t)$, $t=1, T$, и позволяет существенно снизить время q_n решения задачи классификации по сравнению со временем q прямой обработки сигнала x . Показано, что

$$q_n/q = \sum_{t=1}^T k(t) P\{x(t) \in \overline{\Omega_{jj}}(\bar{x}(t))\} / k < 1, \quad x(t) = (x_v(t), v=1, \overline{k(t)}), \quad k = \sum_{t=1}^T k(t),$$

и при равных размерностях $k(t) = k/T$ наборов признаков $x(t)$ сигнала x не превышает величины

$$(1 - P^T(1)) / [T(1 - P(1))], \quad P(1) = P\{x(1) \in \Omega_{jj}(x(1))\}.$$

Для обеспечения минимального среднего времени классификации необходимо на первых этапах обработки данных располагать наборы признаков с меньшими значениями ошибки распознавания образов.

Формирование информативных наборов признаков осуществляется с помощью оригинального метода минимизации описания.

Пусть выбрано семейство решающих правил при заданном алфавите классов и проведен вычислительный эксперимент, в результате которого получены последовательности $(\bar{\rho}_v, v=1, k, v \neq t)$, $(\bar{\rho}_{v,t}, v, t=1, k)$ значений оценок ошибки распознавания образов в пространстве только одного признака $x_v, v=1, k$, сигнала и их парных сочетаний $(x_v, x_t), v, t=1, k, t \neq v$. Данный этап будем называть обучением минимизации описания, так как полученная при этом информация оказывается достаточной для целенаправленного формирования наборов признаков более чем два.

Построим граф $\Gamma(X, R)$ взаимосвязи между признаками сигнала, где $X = (x_v, v=1, k)$; $R = \{r_{vt}\}$ – множество ребер графа. Между двумя вершинами (x_v, x_t) существует ребро, т. е. $r_{vt} \in R$, если значение $\bar{\rho}_{vt}$ и произведение $\bar{\rho}_v \bar{\rho}_t$ достоверно (с некоторым уровнем доверия β) не отличаются. Из определения ошибки распознавания образов следует, что это возможно лишь в случае, если признаки (x_v, x_t) сигнала статистически независимы.

Применяя методы аппарата теории графов, проведем декомпозицию $\Gamma(X, R)$ на подграфы $\Gamma_j(X_j, R_j)$, которые обладают свойством сильной связности и не содержатся в других подграфах с таким же свойством. Множество $X_j \subset X$ составляют вершины исходного графа, которые попарно взаимодостижимы длиной пути, равной единице, т. е. между любыми двумя вершинами (x_v, x_t) существует ребро. Но тогда признаки из набора $x(j)$, соответствующего множеству вершин X_j подграфа $\Gamma_j(X_j, R_j)$, являются статистически независимыми, а ошибка распознавания образов на их основе пересчитывается по формуле

$$\rho(x(j)) = \prod_{v \in I_j} \bar{\rho}_v, \quad x(j) = (x_v, v \in I_j),$$

где I_j – множество номеров признаков, входящих в набор $x(j)$. С другой стороны, исходя из методики построения графа $\Gamma(X, R)$, наборы признаков $x(j)$, $j=1, T$, статистически взаимосвязаны в процессе решения задачи распознавания образов. Поэтому они в значительной мере содержат одинаковый объем «полезной» информации о задаче классификации сигналов.

С этих позиций $x(j)$, $j=1, T$, представляют собой варианты наборов информативных признаков, наилучший $x(j^*)$ из которых определяется условием

$$\bar{\rho}(x(j^*)) = \min_j \bar{\rho}(x(j)), \quad j = \overline{1, T}. \quad (3)$$

Если размерность вектора $x(j)$ значительна и не устраивает исследователя, то проводятся дополнительная декомпозиция подграфов $\Gamma_j(X_j, R_j)$, $j=1, T$, и анализ элементов полученной структуры в процессе решения задачи (3).

3. Непараметрические алгоритмы автоматической классификации. Определим точки исходной выборки V как статистические оценки центров «блуждания» унимодальных классов, количество M которых неизвестно.

Построим для каждой точки V доверительный интервал с уровнем доверия h . Пусть V – однородная выборка, т. е. $M = 1$. Тогда существует такой h , когда вероятность принадлежности точек V максимальной области взаимного пересечения доверительных интервалов равна либо превышает $1 - h$. Если V неоднородная выборка ($M > 1$), то ее классификация осуществляется путем решения последовательности задач проверки статистических гипотез однородности исходной либо промежуточных выборок, получаемых в процессе декомпозиции V . Предложенный подход допускает обобщение на случай разнотипных данных [2].

4. Непараметрические модели распознавания образов на основе метода коллективного оценивания. Принципы коллективного оценивания нашли широкое распространение на завершающем этапе формирования теории адаптивных систем, когда возникла необходимость обобщения либо получения интегрированных знаний в задачах исследования систем.

В предлагаемом подходе составляющие коллектива представляют собой упрощенные варианты решающих правил, количество которых соизмеримо с объемом обучающей выборки. Следует ожидать, что подобные алгоритмы принятия решений адекватны уровню априорной неопределенности, соответствующему локальным аппроксимациям, и обобщают последние.

Метод коллективного оценивания. Пусть задана выборка $V = (x^i, y^i, i = \overline{1, N})$ из статистически независимых наблюдений неизвестной зависимости

$$y = f(x) \forall x \in R^k. \quad (4)$$

Поставим в соответствие ряду точек обучающей выборки (x^i, y^i) некоторую аппроксимацию $\varphi_i(x, \alpha^i)$ зависимости (4), параметры которой удовлетворяют условиям

$$y^i = \varphi_i(x^i, \bar{\alpha}^i), \quad (5)$$

$$\bar{\alpha}^i = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (y^j - \varphi_i(x^j, \alpha))^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \ll N.$$

Тогда непараметрический коллектив представляется в виде

$$\bar{y} = \bar{f}(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, \bar{\alpha}^i) \lambda^i(x), \quad (6)$$

где положительная, ограниченная значением единица функция $\lambda^i(x)$ определяет «вес» правила $\varphi_i(x, \alpha^i)$ при формировании решения в ситуации x .

Пример функции $\lambda^i(x)$ – нормированное расстояние между точками (x, x^i) либо «весовая» функция

$$\lambda^i(x) = \frac{\prod_{v=1}^k \Phi\left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v}\right)}{\sum_{j=1}^n \prod_{v=1}^k \Phi\left(\frac{x_v - x_v^j}{c_v}\right)}, \quad (7)$$

составленная из «ядерных» функций $c_v^{-1} \Phi \left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v} \right)$.

Алгоритмы распознавания образов. Пусть $V = (x^i, \sigma(x^i), i = \overline{1, N})$ – обучающая выборка, составленная из параметров складывающейся ситуации x^i и соответствующих им «указаний учителя» $\sigma(x^i)$ о принадлежности i -й ситуации к одному, например, из двух классов.

Следуя методике синтеза коллективов решающих правил, для каждой опорной точки построим линейное уравнение разделяющей поверхности $\phi_{12}^i(x, \bar{\alpha}^i)$ между классами. Тогда решающее правило, построенное на ее основе, имеет вид

$$m^i(x): \begin{cases} x \in \Omega_1, & \text{если } \phi_{12}^i(x, \bar{\alpha}^i) \leq 0, \\ x \in \Omega_2, & \text{если } \phi_{12}^i(x, \bar{\alpha}^i) > 0. \end{cases}$$

Параметры i -й решающей функции находятся из условия минимума эмпирической ошибки распознавания образов.

С этих позиций непараметрический коллектив уравнений разделяющих поверхностей в двухальтернативной задаче распознавания образов запишется как

$$\bar{f}_{12}(x) = \left(n \prod_{v=1}^k c_v \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \phi_{12}^i(x, \bar{\alpha}^i) \prod_{v=1}^k \Phi \left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v} \right).$$

Отличие от традиционной непараметрической байесовской оценки разделяющей поверхности заключается в замене «указаний учителя»

$$\delta(x^i) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in \Omega_1, \\ +1, & \text{если } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

на упрощенные решающие функции $\phi_{12}^i(x, \bar{\alpha}^i)$, $i = \overline{1, n}$.

Обобщенное решение формируется с учетом знака функции $\bar{f}_{12}(x)$.

Статистика $\bar{f}_{12}(x)$ может быть представлена в виде непараметрической оценки уравнения разделяющей поверхности и слагаемого, которое стремится к нулю с ростом n . При этом вид упрощенных решающих функций оказывает несущественное влияние на качество распознавания образов.

5. Самообучающийся алгоритм поиска глобального экстремума. Поиск глобального экстремума является классической проблемой математической кибернетики, имеющей важное прикладное значение в задачах управления. Сложность ее решения возрастает при неполной информации о виде целевой функции $y = \varphi(x, u)$, представляемой часто с помощью статистической выборки наблюдений $V = (x^i, u^i, y^i, i = \overline{1, n})$.

В этих условиях для поиска относительного экстремума $\varphi(x, u)$ по u при фиксированном x применяются непараметрические алгоритмы оптимизации, основанные на итерационной процедуре статистического оценивания условного математического ожидания $M(y/x, u)$. Предлагаемые алгоритмы используют случайную стратегию выбора начальных точек u процедуры оптимизации и специальную организацию поисковых шагов, что не гарантирует

ет нахождения относительного глобального экстремума и требует значительных вычислительных затрат.

Рассмотрим принципиально новые самообучающиеся непараметрические методы поиска относительного глобального экстремума, основанные на декомпозиции исходной задачи с помощью алгоритмов классификации, с последующим решением задач локальной оптимизации и сравнением их результатов.

В предлагаемом подходе непосредственной оптимизации предшествует этап системного анализа статистической выборки V с целью выделения множеств точек V_t , соответствующих областям $\Omega_t(u, x), t = \overline{1, M}$, t -го максимума критерия $y = \varphi(x, u)$. Тем самым может быть осуществлена кусочная аппроксимация критерия

$$y = \varphi(x, u) = \varphi_t(x, u) \forall (x, u) \in \Omega_t, \quad t = \overline{1, M},$$

по выборкам $V_t, t = \overline{1, M}$.

Для реализации данного этапа построим статистическую оценку плотности вероятности $\bar{p}_\varphi(x, u)$, вид которой с точностью до константы не отличается от целевой функции $\varphi(x, u)$. Синтез $\bar{p}_\varphi(x, u)$ возможен, например, при равномерном законе распределения (x, u) по выборке

$$\left(x^i, u^i, y^i / \sum_{j=1}^n y^j, i = \overline{1, n} \right)$$

с помощью оценки плотности вероятности регрессионного типа [3]. Далее по оценке $\bar{p}_\varphi(x, u)$ построим датчик случайной величины (x, u) и сформируем статистическую выборку $V1 = (x^i, u^i, i = \overline{1, N})$.

Нетрудно заметить, что области $\Omega_t, t = \overline{1, M}$, соответствуют локальным экстремумам-максимумам функции $y = \varphi(x, u)$ и одномодальным фрагментам оценки плотности вероятности $\bar{p}_\varphi(x, u)$.

Для их обнаружения по выборке $V1$ может быть использован непараметрический алгоритм автоматической классификации [2].

По данным классификации разобьем исходную выборку V на группы точек $V_t, t = \overline{1, M}$, и на их основе построим прямые $\bar{y} = \bar{\varphi}_t(x, u)$ и инверсные $\bar{u} = \bar{\varphi}'_t(y, x)$ модели в виде непараметрической регрессии для каждой из областей $\Omega_t, t = \overline{1, M}$. Наличие моделей целевой функции в пределах локальных экстремумов позволяет организовать простую эффективную итерационную процедуру их поиска.

Изложенные принципы этапа самообучения проводятся однажды, а его результаты используются при поиске относительных локальных глобальных экстремумов-максимумов, соответствующих различным значениям x .

Для определения областей локальных экстремумов, соответствующих конкретному значению $x = x'$, по данным классификации синтезируются непараметрические алгоритмы распознавания образов в пространстве (x, u) .

Оценивание областей локальных экстремумов при конкретных условиях оптимизации осуществляется с помощью непараметрических алгоритмов распознавания образов, исходная информация для синтеза которых формируется на первых этапах самообучения.

После этапов обучения система настроена на поиск относительных глобальных экстремумов. Рассмотрим идею поиска t -го локального экстремума u_t^* при $x = x'$. В силу выпуклости фрагментов $y = \varphi_t(x', u)$ целевой функции $\varphi(\cdot)$ непараметрическая модель

$$\bar{u}_t^*(s) = \bar{\varphi}'_t(x', y(s)) = \frac{\sum_{i \in I_t} u^i \beta^i(x', y(s))}{\sum_{i \in I_t} \beta^i(x', y(s))}, \quad (8)$$

$$\beta^i(x', y(s)) = \Phi\left(\frac{x' - x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{y(s) - y^i}{c}\right)$$

инверсной зависимости позволяет при некотором значении $y(s)$ получить s -е приближение к локальному экстремуму u_t^* . Здесь $\beta(\cdot)$ – многомерные ядерные функции в пространстве (x, u) [2]; I_t – множество номеров точек из исходной выборки V , принадлежащих области Ω_t . Если $\varphi_t(x', u)$ – симметричная функция, то $\bar{u}_t^*(s)$ совпадает с u_t^* .

Иначе, принимая $y(s+1) = \varphi_t(x', \bar{u}_t^*(s)) + \Delta$, можно на основе (8) организовать быстросходящийся итерационный процесс поиска u_t^* (Δ – некоторая положительная величина, значения которой в общем случае зависят от объема исходной информации и параметра s).

Полученные результаты допускают распространение на проблему условной и векторной оптимизации статических систем при неполной информации.

6. Рандомизированный метод идентификации непараметрических моделей. Существующий парадокс традиционных методов идентификации стохастических моделей состоит в сопоставлении случайной выборки наблюдений изучаемого объекта с конкретным набором параметров модели, оптимальных в некотором смысле. Рассмотрим рандомизированный подход к определению параметров размытости c непараметрических моделей, основанный на процедуре случайного выбора, что позволяет заменить трудоемкую задачу оптимизации на задачу нахождения законов распределения $p(c)$.

Введем обозначения: $N(x)$ – оператор нормировки компонент вектора $x = (x_1, \dots, x_k)$ зависимости $y = \varphi(x)$; $D(c)$ – датчик случайных чисел с законом распределения $p(c)$ на интервале $(0, h)$; $B(c^i = c)$ – оператор присвоения i -й ядерной функции непараметрической модели параметра $c^i = c, i = \overline{1, n}$, где n – объем обучающей выборки; V, V_1 – логические условия, считающиеся выполненными, если $i < n, j < k$.

Тогда процедура рандомизированной идентификации представляется в операторной форме записи:

$$A(P(c)): N(x)(i=1) \downarrow^1 (j=1) \downarrow^2 D(c) B(c^i = c)(j=j+1) V_1 \uparrow^2 (i=i+1) V \uparrow^1.$$

Операторы алгоритма $A(\cdot)$ функционируют слева направо, при выполнении логического условия происходит переход по стрелке, в противном случае управление передается последующему оператору.

Рассмотрим задачу восстановления плотности вероятности $p(x), x \in R^1$, на основе непараметрической оценки $\bar{p}(x)$ типа Розенблатта – Парзена [1].

Примем $p(c) = dc$, где $d = (t+1)/h^{t+1}$. Из условия минимума асимптотических разложений среднеквадратических критериев точности аппроксимации $p(x)$ найдем оптимальные значения h^* . Можно показать, что отношение указанных критериев для традиционного и рандомизированного методов идентификации $\bar{p}(x)$ равно $d' = (1+5t^{-1})^{1/5}/(1+t^{-1})^{-1}$, которое при $t \rightarrow \infty$ стремится к 1. Данный факт подтверждает возможность решения проблемы идентификации стохастических моделей. Анализ полученного отношения позволяет выбрать рациональный вид плотностей вероятности. Значения d' увеличиваются с ростом t (при $t=1$ $d' = 0,716$, при $t=2$ $d' = 0,86$).

При конечных объемах обучающих выборок наблюдается достоверное превышение статистических оценок: $d' > 1$. Причем отношение d' увеличивается по мере роста уровня помех и сложности восстановления зависимости.

Заключение. Рассмотренные направления анализа малых выборок объединяют две основные идеи: создание условий для применения традиционных непараметрических методов статистики и проведение предварительной обработки информации с целью обнаружения дополнительных сведений, повышающих эффективность решения поставленных задач. Выбор того или иного метода зависит от конкретного приложения и особенностей априорной информации. При этом, учитывая системный характер проблем анализа малых выборок, не исключается использование одновременно нескольких подходов для их преодоления.

Перспективным является развитие исследований по следующим направлениям: синтез и анализ решающих правил на основе непараметрической оценки плотности в условиях малых выборок; разработка непараметрических моделей коллективного типа при восстановлении многомерных стохастических зависимостей и их систем. Успешное продвижение в данных направлениях позволит создать теоретическую основу исследования уникальных систем в медицине и экологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапко А. В., Ченцов С. В., Крохов С. И., Фельдман Л. А. Обучающиеся системы обработки информации и принятия решений (непараметрический подход). Новосибирск: Наука, 1996.
2. Лапко А. В. Непараметрические методы классификации и их применение. Новосибирск: Наука, 1993.
3. Лапко А. В., Ченцов С. В. Многоуровневые непараметрические системы принятия решений. Новосибирск: Наука, 1997.

Поступила в редакцию 16 февраля 1999 г.