

УДК 519.68

С. Г. Пудов

*(Новосибирск)***ВЛИЯНИЕ СМЕЩЕНИЯ ПОРОГА НА ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА
КЛЕТОЧНО-НЕЙРОННОЙ АССОЦИАТИВНОЙ ПАМЯТИ**

Работа посвящена проблеме выбора модели нейрона для бистабильной клеточно-нейронной ассоциативной памяти. Исследуются две модели: с внешним смещением (или порогом) и без него. Показано, что сеть, в которой нейроны имеют внешнее смещение, обладает лучшими способностями по хранению информации, а также при некоторых ограничениях на хранимые образы лучшей устойчивостью к их искажениям. Предлагается метод обучения такой сети, основанный на алгоритме обучения персептрона и ориентированный на повышение устойчивости ассоциативной памяти. Приводятся результаты экспериментов.

Введение. Клеточно-нейронная ассоциативная память (КНАП) представляет собой ассоциативную память Хопфилда [1] со структурой связей клеточного автомата. Уменьшение числа связей нейронов и их локализация существенно упрощают реализацию КНАП по сравнению с полносвязными сетями, но при этом происходит ухудшение ее свойств. В первую очередь это касается способностей сети хранить информацию и исправлять искажения хранимых образов. Если нет возможности изменять конфигурацию связей в зависимости от исходных данных, т. е. если структура межнейронных соединений в сети уже задана, то повлиять на характеристики ассоциативной памяти можно тремя путями. Первый – это использовать подходящий метод обучения (например, [2, 3]). Второй – корректировать веса автосвязи нейронов после завершения процесса обучения [5, 4], что для некоторых методов дает существенный выигрыш в устойчивости к искажениям хранимых образов. Третий путь состоит в том, чтобы либо полагать порог нейрона равным нулю, либо рассчитывать (или обучать) величину порога (смещения) наравне с другими весами связей. Следует отметить, что, во-первых, все три пути не исключают друг друга и, во-вторых, первые два из них изучены наиболее полно, в то время как величина смещения в модели нейрона определяется в зависимости от используемого метода обучения.

Цель работы – изучение и сравнение свойств двух моделей КНАП, в которых нейроны имеют нулевое или ненулевое смещение. Основной акцент сделан на исследовании локальных свойств нейронов, а не глобального поведения нейросети. При этом исследуемые модели нейронов не имеют связи «сам с собой», поскольку вес автосвязи нейрона можно рассчитать исходя из хранимых образов и весов его связей с соседями [4]. Для достижения цели в

разд. 2 определяются условия локальной различимости прототипов в КНАП. В разд. 3 будет предложен метод обучения нейронов, имеющих ненулевое смещение, как модификация алгоритма обучения персептрона с параметрами. Разд. 4 посвящен исследованию устойчивости КНАП к искажениям для моделей нейронов как с ненулевым порогом, так и без него. В разд. 5 будут приведены результаты экспериментов.

1. Формальное описание моделей. Опишем рассматриваемые модели ассоциативной памяти с помощью формализмов клеточно-нейронных сетей [6]. Следуя принятым обозначениям, определим КНАП тройкой: $\mathbf{N} = \langle \mathbf{C}, \mathbf{W}, \Phi \rangle$, где \mathbf{C} – прямоугольный массив, состоящий из m строк и n столбцов клеток (или нейронов) с состояниями $c_{ij} \in \{-1, 1\}$; $\mathbf{W} = \{W_{ij}\}$ – множество весовых векторов вида $W_{ij} = (w_1, \dots, w_q)$, где w_k является вещественным числом, определяющим вес связи между нейроном с координатами (i, j) и его k -м соседом; Φ – правило функционирования КНАП.

Множество пар координат формирует пространство имен M , на котором определены именуемые функции $\phi(i, j): M \rightarrow M$, каждая из которых по имени нейрона выдает имя одного из его соседей. Множество всех клеточных массивов с одним и тем же пространством имен M обозначается как $\mathbf{C}(M)$. Для каждой клетки (i, j) множество других клеток, которые связаны с ней, составляют ее соседство, определяемое шаблоном связей:

$$T(i, j) = \{\phi_1(i, j), \dots, \phi_q(i, j)\}, \quad (1)$$

где $\phi_k(i, j) \neq \phi_l(i, j)$ для каждого $(i, j) \in M$ и для всех $k, l = 1, \dots, q, k \neq l$. Таким образом, каждый нейрон имеет ровно q различных соседей, причем «сам с собой» он не связан (как упоминалось во введении, нейроны не имеют автосвязи).

Для массива $C \in \mathbf{C}(M)$ состояния всех соседей нейрона (i, j) представляются в виде вектора $C_{ij} = (c_{\phi_1(i, j)}, \dots, c_{\phi_q(i, j)})$, или, для краткости, $C_{ij} = (c_1, \dots, c_q)$. В дальнейшем также будет использоваться вектор

$$D_{ij} = c_{ij} C_{ij} = (d_1, \dots, d_q), \quad (2)$$

называемый приведенным соседством нейрона (i, j) . Оба вектора C_{ij} и W_{ij} состоят из q элементов каждый, нумерация которых порождена нумерацией именуемых функций в (1), и их скалярное произведение определяется как $\langle C_{ij}, W_{ij} \rangle = \sum_1 c_l w_l$.

Правило Φ функционирования КНАП описывает следующая итеративная

Процедура. Пусть $C(t) \in \mathbf{C}(M)$ обозначает массив после итерации t , C_{ij} и W_{ij} – состояния соседей и весовой вектор нейрона (i, j) соответственно. Тогда

Шаг 1. Все клетки в $C(t)$ синхронно вычисляют следующую функцию:

$$f(C_{ij}, W_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } g_{ij} \geq 0, \\ -1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

и результат вычислений становится состоянием соответствующей клетки в $C(t+1)$.

Шаг 2. Если $C(t+1) = C(t)$, то $C(t) = \Phi(C(0))$ есть результат вычислений, который соответствует стабильному состоянию КНАП.

Модели ассоциативной памяти, которые будут исследоваться ниже, различаются только функциями g_{ij} , которые в общем виде записываются как $\langle C_{ij}, W_{ij} \rangle + I_{ij}$, I_{ij} – величина смещения порога нейрона. Причем в одной модели все $I_{ij} = 0$, тогда как в другой они могут принимать ненулевые значения. Для единообразия внешнее смещение (или порог) нейрона (i, j) заменим на фиктивную связь, имеющую вес смещения $w_{ij} = I_{ij}$ и на которую подается фиксированный сигнал, равный +1. Далее под моделью 1 (клеточно-нейронной ассоциативной памятью с нейронами без внешнего смещения, в дальнейшем КНАП без смещения) будем иметь в виду вышеописанную модель, в которой функция g_{ij} выглядит следующим образом:

$$g_{ij} = \langle C_{ij}, W_{ij} \rangle;$$

в модели 2 (КНАП со смещением) соответствующая функция имеет вид:

$$g_{ij} = \langle C_{ij}, W_{ij} \rangle + w_{ij}.$$

Поскольку функции нейронов различаются между собой, то для модели 2 будем использовать обозначения со штрихом: f'_{ij} и g'_{ij} .

2. Влияние смещения на информационную емкость. Целью этого раздела будет изучение и сравнение ограничений, накладываемых структурой связей обеих моделей на множество одновременно хранимых образов (прототипов). В частности, здесь мы ограничимся только условиями индивидуальной устойчивости и линейной различимости прототипов. Более подробно свойства модели 1 изложены, например, в [7]. В дальнейшем будем предполагать, что в КНАП необходимо хранить L прототипов P^0, \dots, P^{L-1} . Состояние соседства нейрона (i, j) на прототипе P^K будем обозначать как P_{ij}^K , а состояние приведенного соседства – как D_{ij}^K .

Будем считать, что образ P^K индивидуально устойчив в КНАП, если $\Phi(P^K) = P^K$. Из определения процедуры функционирования ассоциативной памяти можно извлечь условия индивидуальной устойчивости образа P^K в модели 1

$$\forall (i, j) \in M \langle D_{ij}^K, W_{ij} \rangle > 0 \quad (4)$$

и в модели 2

$$\forall (i, j) \in M \langle D_{ij}^K, W_{ij} \rangle + w_{ij} p_{ij}^K > 0. \quad (5)$$

Образы P^0, \dots, P^{L-1} линейно различимы, если существует такой набор весовых векторов W_{ij} и весов смещения w_{ij} , что для всех $K = 0, \dots, L-1$ выполняется (4) для модели 1 или соответственно (5) для модели 2.

Теперь сравним условия, записанные для разных моделей, между собой. Нашей дальнейшей целью будет показать, что КНАП со смещением обладает большей способностью по хранению информации, а именно докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если образы P^0, \dots, P^{L-1} линейно различимы в модели 1 (т. е. выполнено (4)), то они линейно различимы и в модели 2. Обратное неверно.

Докажем вначале первую часть утверждения. Пусть выполнено условие теоремы, тогда по определению существует такой набор весовых векторов W_{ij} , что для всех $(i, j) \in M$ выполняется (4). Очевидно, что для этих прототипов будут справедливы неравенства (5), так как подходящий набор весов связей существует (например, те же весовые векторы W_{ij} (из (4)) и нулевые значения весов смещения $w_{ij} = 0$). Таким образом, эти прототипы линейно различимы также и в модели 2.

Для доказательства второй части утверждения достаточно привести пример таких образов, которые линейно различимы в модели 2 и в то же время линейно неразличимы в модели 1. Рассмотрим нейрон (i, j) и два образа P^1 и P^2 , в которых состояние соседства P_{ij}^1 является инверсией P_{ij}^2 (т. е. $P_{ij}^1 = -P_{ij}^2$), а состояния нейрона (i, j) равны, т. е., например, $p_{ij}^1 = p_{ij}^2 = +1$. Причем для всех остальных нейронов выполнено условие (4). Тогда очевидно, что для этих двух прототипов условие (4) не выполняется на нейроне (i, j) , потому что иначе приходим к противоречию:

$$0 < \langle P_{ij}^1, W_{ij} \rangle = -\langle P_{ij}^2, W_{ij} \rangle < 0.$$

В то же время в модели 2 они будут линейно различимы, поскольку для нейрона (i, j) достаточно взять $W_{ij} = (0, \dots, 0)$ и $w_{ij} > 0$, а для остальных нейронов это следует из первой части доказательства.

Итак, справедливо следующее

У т в е р ж д е н и е. Клеточно-нейронная ассоциативная память со смещением может хранить больше информации, чем КНАП без смещения.

Кроме того, модель 2 обладает следующим хорошим свойством, которого нет у модели 1: инверсия прототипа не является хранимым образом, что уменьшает число химер (ложных хранимых образов).

3. Метод обучения КНАП с учетом смещения. Существует относительно мало методов обучения (или синтеза) КНАП со смещением. Это связано, вероятно, с тем, что они основаны на теории устойчивости сложных динамических систем и представляют собой порой сложные матричные преобразования, включая сингулярные разложения [2] или вычисление псевдообратных матриц [8]. Поэтому их сложно исследовать и реализовывать, при этом производимые преобразования матриц носят глобальный, а не локальный характер, что противоречит духу КНАП.

В этом разделе для модели 2 будет предложен метод обучения, описанный в [3], но учитывающий при этом наличие смещения у нейронов. Он основан на алгоритме обучения персептрона [9], поэтому в алгоритме все проводимые преобразования носят локальный характер. Чтобы обосновать произведенные изменения, рассмотрим, как можно применить метод персептрона для обучения модели 2. Сначала выпишем его общую схему: все образы выстраиваются в бесконечную последовательность $P^0, \dots, P^{L-1}, P^0, \dots, P^{L-1}, P^0, \dots$, полученную из исходного множества прототипов его циклическим повторением, и вводится сквозная нумерация всех членов данной последовательности, т. е. формируется цепочка образов $\{P^t \mid P^t = P^S \text{ при}$

$t \equiv S(\text{mod}L)$ }. Затем весовые векторы меняются согласно следующей итеративной процедуре:

$$\begin{cases} W_{ij}^0 & \text{произвольно,} \\ t > 0: \\ W_{ij}^{t+1} = W_{ij}^t, & \text{если } f_{ij}^t > 0, \\ W_{ij}^{t+1} = W_{ij}^t + D_{ij}^t & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Обучение прекращается, когда в течение одной макроитерации – периода, во время которого на вход сети подается все исходное множество прототипов, веса не изменялись. Было доказано [9], что для сходимости этого метода за конечное число итераций необходимо и достаточно выполнения условия линейной различимости прототипов.

Покажем, как этот метод применить к модели 2. Для этого следует в процессе обучения изменять не только весовые векторы W_{ij} , но и веса смещения w_{ij} , причем таким образом, чтобы можно было обеспечить завершаемость алгоритма. Поступим следующим образом: векторы W_{ij} будем менять так, как описано выше, а w_{ij} – по аналогии: $w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t + p_{ij}^t$, т. е. процедура изменения весов в модели 2 будет выглядеть таким образом:

$$\begin{cases} W_{ij}^0, w_{ij}^0 & \text{произвольно,} \\ t > 0: \\ \left. \begin{aligned} W_{ij}^{t+1} &= W_{ij}^t, \\ w_{ij}^{t+1} &= w_{ij}^t, \end{aligned} \right\} & \text{если } (f'_{ij})^t > 0, \\ \left. \begin{aligned} W_{ij}^{t+1} &= W_{ij}^t + D_{ij}^t, \\ w_{ij}^{t+1} &= w_{ij}^t + p_{ij}^t, \end{aligned} \right\} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Метод обучения модели 2 завершается за конечное число итераций тогда и только тогда, когда прототипы в ней линейно различимы.

Для доказательства этой теоремы достаточно переписать метод обучения (7) и условия линейной различимости (5) с помощью новых обозначений. Положим $X_{ij} = (W_{ij}, w_{ij})$ – новый вектор весов длиной $q+1$, а $Y_{ij}^K = (D_{ij}^K, p_{ij}^K)$ – новое состояние соседства. Тогда, записывая вышеперечисленные формулы через X_{ij} и Y_{ij} , получаем с точностью до обозначений соответственно метод (6) и условия (4). Таким образом, условия теоремы Розенблатта о сходимости процесса обучения выполнены.

Отсюда следует, что если прототипы были линейно различимы в модели 2, то в обученной по методу Розенблатта КНАП прототипы будут индивидуально устойчивыми. Аналогично можно модифицировать метод обучения с параметрами [3].

Метод обучения модели 2 с параметрами. Пусть даны прототипы P^0, \dots, P^{L-1} , которые должны храниться в модели 2.

Шаг 1. Из данных прототипов составляется бесконечная последовательность $P^0, \dots, P^{L-1}, P^0, \dots, P^{L-1}, P^0, \dots$, полученная их циклическим повторением, и вводится сквозная нумерация всех членов данной последовательности, т. е. формируется цепочка образов $\{P^t \mid P^t = P^S \text{ при } t \equiv S \pmod{L}\}$.

Шаг 2. Начальные значения компонент векторов W_{ij}^0 выбираются произвольно для всех $(i, j) \in M$, параметр обучения $\alpha_{ij}^0 = 0$, $\tau = 0$ – счетчик макроитераций.

Шаг 3. Начало макроитерации; $\mu_{ij}^\tau(t) = \infty$; выполнение шага 4 для всего исходного множества прототипов.

Шаг 4. Весовые векторы изменяются согласно следующей итеративной процедуре для каждого $(i, j) \in M$:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ij}^{t+1} = W_{ij}^t \\ w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t \end{array} \right\} \quad \text{если } (g'_{ij})^t > \alpha_{ij}^\tau,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ij}^{t+1} = W_{ij}^t + D_{ij}^t \\ w_{ij}^{t+1} = w_{ij}^t + p_{ij}^t \end{array} \right\} \quad \text{иначе,}$$

$$\mu_{ij}^\tau(t+1) = \min(\mu_{ij}^\tau(t), (g'_{ij})^t).$$

Шаг 5. Если выполнено условие остановки и весовые векторы в течение макроитерации не менялись, то вычисления прекращаются; если весовые векторы менялись, то на шаг 3; если условие остановки не выполнено, то новый параметр обучения вычисляется по формуле

$$\alpha_{ij}^{\tau+1} = \max(\alpha_{ij}^\tau, \mu_{ij}^\tau(t))$$

и переход на шаг 3.

Условия остановки выбираются в соответствии с желаемым результатом: чем больше проведено макроитераций, тем точнее достигается величина $\max(\min_K(\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle + w_{ij} p_{ij}^K))$. (Более подробно про условия остановки см. [3].)

4. Влияние смещения на аттрактивность (устойчивость к искажениям). Теперь посмотрим, как влияет смещение на устойчивость ассоциативной памяти к искажениям. При этом будем предполагать, что модель 2 отличается от модели 1 только наличием смещения (т. е. имена соседей у соответствующих нейронов совпадают). Сначала определим понятие «устойчивости КНАП к искажениям». Пусть ассоциативная память обучена хранить L прототипов P^0, \dots, P^{L-1} . Тогда образ $P^K(s)$ называется s -искажением прототипа P^K , если он для любого нейрона отличается от P^K состояниями не более чем s соседей. Вообще говоря, если некоторый образ P не совпадает ни с одним прототипом, то его формально можно рассматривать как искажение любого из них (для достаточно больших s). В дальнейшем, используя s – рас-

стояние по Хэммингу – в качестве метрики, будем считать P искажением ближайшего к нему прототипа.

Каждый прототип P^K в обученной сети имеет бассейн аттракции – множество таких $P^K(s)$, что $\Phi(P^K(s)) = P^K$. Будем считать, что ассоциативная память устойчива к искажениям, если для любого прототипа бассейн его аттракции не пуст (отсюда сразу следует, что все прототипы индивидуально устойчивы). Теперь величину устойчивости к искажениям конкретного образа можно определить как размер его бассейна аттракции: чем больше бассейн, тем лучше устойчивость, а значит, тем большее число искажений может быть исправлено. Однако выяснить величины бассейнов аттракции в уже обученной сети, кроме как прямым перебором, на сегодняшний день невозможно. Поэтому используем более практичное понятие: сильную устойчивость [7] или способность сети исправлять искажения за один такт функционирования. При этом будем предполагать, что чем лучше сильная устойчивость, тем лучше устойчивость к искажениям.

Исследование сильной устойчивости всей сети тоже является достаточно трудоемким занятием, но его уже можно (в некотором смысле) свести к изучению сильной устойчивости нейрона (i, j) к искажениям соседства P_{ij}^K , которую определим как «уверенность» нейрона при определении своего следующего состояния. Неформально это можно пояснить так: чем нейрон (i, j) «увереннее» определяет свое состояние в прототипе P^K , тем меньше на него влияют искажения. Формальное определение будет дано ниже, а перед этим несколько важных замечаний:

1) «уверенность» нейрона для разных прототипов может сильно различаться, поэтому качество обучения сети будем оценивать по ее минимальному значению;

2) будем предполагать, что увеличение «уверенности» нейронов улучшает сильную устойчивость всей сети, а значит, в силу сделанного предположения должна улучшиться устойчивость сети (насколько это предположение верно, покажут эксперименты).

Таким образом, задача свелась к сравнению «уверенности» соответствующих нейронов для разных моделей на одном и том же множестве прототипов. Как упоминалось в [3], «уверенность» нейрона для модели 1 на прототипе P^K полностью характеризуется величиной $\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle$. Эта величина сильно зависит как от метода обучения, так и от исходного множества хранимых образов, поэтому в силу сделанного выше замечания будем сравнивать минимальную (по всем прототипам) «уверенность» нейронов в обеих моделях, причем предполагается, что она имеет максимально возможное значение (это позволяет исследовать нейросеть без привязки к конкретному методу обучения).

Итак, осталось сравнить между собой две величины:

$$r_{ij} = \max_{\|W_{ij}\|=1} \left[\min_{K=1, \dots, L} (\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle) \right] \quad (8)$$

и

$$r'_{ij} = \max_{\|W_{ij}, w_{ij}\|=1} \left[\min_{K=1, \dots, L} (\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle + w_{ij} P_{ij}^K) \right]. \quad (9)$$

Нормировка весовых векторов вызвана тем, что от их длины (линейно) зависят величины сравниваемых выражений. Докажем теперь, что в модели 2 (со смещением) величина (9) будет не меньше, а в некоторых случаях и строго больше (это зависит от выбора прототипов), чем величина (8) для модели 1. Интуитивно этот результат очевиден, поскольку количество соседей нейрона на единицу больше в первом случае, чем во втором. Для доказательства потребуется следующая

Лемма. Для векторов W , D^1 и D^2 размерностью q ($\|D^1\|$ и $\|D^2\|$ и $D^1 + D^2 \neq 0$) в выражении

$$\max_{\|W\|=1} \left(\min_{K=1,2} (\langle W, D^K \rangle) \right) \quad (10)$$

максимум достигается при $W = W'$, где $W' = (D^1 + D^2) / \|D^1 + D^2\|$.

Доказательство. Если $D^1 = D^2$, то все очевидно. Для $D^1 \neq D^2$ доказательство будет проведено в два этапа.

1. В плоскости S , проходящей через векторы D^1 , D^2 , максимум в выражении (10) достигается при $W = W'$. Это следует из того, что если W искомым, то $\langle W, D^1 \rangle = \langle W, D^2 \rangle$ и на плоскости есть только один вектор W , удовлетворяющий свойствам $\|W\| = 1$, и проекции векторов D^1 , D^2 на него равны и максимальны.

2. Если вектор W не лежит в плоскости S , то значение выражения (10) для него меньше, чем для W' . Это, очевидно, следует из $W = W^S + W^T$, где W^S лежит в плоскости S , W^T ортогонален S , причем $\|W^S\| < 1$, и $\langle W, D^K \rangle = \langle W^S, D^K \rangle < \langle W', D^K \rangle$ (из п. 1).

Теорема 3. На одном и том же множестве прототипов минимальная «уверенность» нейрона (i, j) в модели 2 не меньше чем в модели 1.

Доказательство. От противного: пусть максимум в (8) достигается на векторе W_{ij}^0 и $r_{ij} > r'_{ij}$. Тогда, подставляя в (9) W_{ij}^0 вместо W_{ij} и нуль вместо веса смещения w_{ij} , получаем противоречие, поскольку в этом случае новое значение $r'_{ij} = r_{ij}$ больше старого, которое по определению было максимально возможным.

Теперь приведем пример, когда переход к модели 2 улучшает минимальную «уверенность» нейрона (i, j) по сравнению с моделью 1. Это очень легко сделать для двух хранимых образов: пусть состояния соседства нейрона равны соответственно P_{ij}^1 и P_{ij}^2 и пусть состояния самого нейрона в этих образах равны (для определенности положим $p_{ij}^1 = p_{ij}^2 = +1$). Из предыдущей леммы следует, что для двух прототипов правило обучения $W_{ij} = D_{ij}^1 + D_{ij}^2$, $w_{ij} = p_{ij}^1 + p_{ij}^2 = 2$ даст весовые векторы, обеспечивающие максимальную «уверенность» нейронов. Поэтому для моделей 1 и 2 соответственно имеем

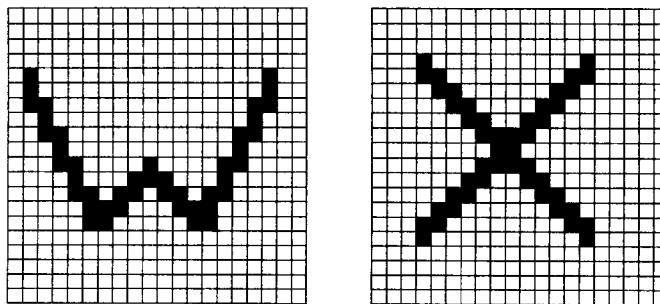
$$r_{ij} = \frac{\langle P_{ij}^1 + P_{ij}^2, P_{ij}^1 \rangle}{\|P_{ij}^1 + P_{ij}^2\|} = \frac{q + \langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}{\sqrt{2q + 2\langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{q + \langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}}{\sqrt{2}},$$

$$r'_{ij} = \frac{\langle P_{ij}^1 + P_{ij}^2, P_{ij}^1 \rangle + 2}{\|(P_{ij}^1 + P_{ij}^2, 2)\|} = \frac{q + 2 + \langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}{\sqrt{2q + 4 + 2\langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{q + 2 + \langle P_{ij}^1, P_{ij}^2 \rangle}}{\sqrt{2}}$$

$(\|(P_{ij}^1 + P_{ij}^2, 2)\|$ – длина вектора весов нейрона со смещением). Таким образом, доказано, что при переходе к ассоциативной памяти со смещением минимальная «уверенность» нейрона не только не уменьшается, но и может увеличиться.

5. Результаты экспериментов. Эксперименты проводились в системе ALT (Animating Language Tools), которая предназначена для моделирования вычислительных процессов в клеточных структурах размерностью до $3D$ [10]. Система имеет текстовое и графическое представления информации, а также средства визуализации. Все объекты в системе ALT представляются в виде трехмерных массивов. Клеточно-нейронная сеть, не имеющая автосвязи, представляется в виде массива из $q + 1$ слоев (q – число соседей нейрона), в котором на нулевом (лицевом) слое находятся клетки, содержащие состояния нейронов сети, а в k -м слое расположены веса связи w_k . При этом если нейрон имеет координаты (i, j) на лицевом слое, то компоненты его весового вектора располагаются на соответствующих слоях под ним (моделируется вектор регистров, содержащий веса связей нейрона). Более подробно про моделирование КНАП в системе ALT можно узнать в [3].

Все эксперименты проводились на одном и том же клеточно-нейронном массиве размером 20×20 нейронов с шаблоном связей размером 5×5 , т. е. каждый нейрон имел 24 соседа (без автосвязи). В моделировании использовались прототипы, представляющие собой символы латинского алфавита, нарисованные «цветом» +1 толщиной в одну клетку (см. рисунок). Все исходное множество прототипов насчитывало 26 символов, причем в экспериментах использовались разные подмножества этого множества. Основная цель – выявление устойчивости обеих моделей к 1-искажениям хранимых образов. Тест на устойчивость к 1-искажениям выбран потому, что для каждого прототипа можно перебрать все 1-искаженные образы, поэтому результаты моделирования не будут зависеть от алгоритма внесения помех. Обучение проводилось с помощью алгоритма с параметрами, описанного в разд. 3, поскольку он обеспечивает итеративное повышение минимальной сильной устойчивости нейронов. Число итераций выбрано равным 50, чтобы получить необходимые весовые векторы с достаточной точностью (см. результаты экспериментов в [3]).



Пример двух прототипов, использовавшихся в моделировании

Прототипы	Модель 1	Модель 2
A	4	4
B	0	0
C	8	7
D	6	6
E	4	4
F	13	11
G	6	6
H	6	3
I	15	13
J	12	10
K	11	10
L	17	13
Среднее	8,5	7,25

1-искажениям хранимых образов. В нижней строке таблицы подсчитаны средние значения (по всем образам), и в дальнейшем именно они и будут приводиться как результаты подобных экспериментов (эти значения имеют смысл общей неустойчивости к искажениям – в среднем такое число 1-искажений не исправляется сетью). Как видно из результатов моделирования, модель 2 более устойчива к искажениям, чем модель 1 для выбранных прототипов.

Эксперимент 2. В этом эксперименте обе модели обучались хранить следующие 12 букв латинского алфавита: с **M** по **X** включительно. Значения средних неустойчивостей для первой и второй моделей равны 9,6 и 9,5 соответственно. Причем при переходе от одной модели к другой устойчивость у одной половины образов падала, в то время как у другой – росла. Таким образом, выигрыша в устойчивости при переходе к модели 2 в этом случае не произошло.

Эксперимент 3. Из множества прототипов, описанного в предыдущем эксперименте, были убраны два последних образа (**W**, **X**, показанные на рисунке), обладающих наихудшей устойчивостью к искажениям по результатам вышеописанного эксперимента. После этого сети обучались заново на оставшихся 10 образах. Средние значения неустойчивостей стали равны 6,7 и 6,1 соответственно для первой и второй моделей.

Эксперимент 4. Наконец, обе модели обучались хранить все 26 букв латинского алфавита: с **A** по **Z**. Значения средних неустойчивостей для первой и второй моделей равны 49 и 51,5 соответственно. Таким образом, при переходе к модели 2 в этом случае устойчивость даже ухудшилась.

Содержание экспериментов: на вход обученной сети подаются поочередно для распознавания по 400 1-искажений каждого прототипа, и она пытается восстановить исходный образ. Для каждого прототипа затем подсчитывается, сколько раз сеть не смогла его распознать (из 400 попыток), и это число записывается в строку таблицы, соответствующую тестируемому прототипу, и в тот столбец, который соответствует проверяемой модели (первый столбец таблицы – модели 1, второй столбец – модели 2). Чтобы количество неисправленных искажений было не слишком большим (не больше чем 10–15 %) и в то же время больше нуля, число хранимых образов находилось в диапазоне от 10 до 26.

Эксперимент 1. В этом эксперименте обе модели обучались хранить 12 первых букв латинского алфавита: с **A** по **L** включительно. В таблице приведены полные результаты тестирования нейросетей на предмет устойчивости к

Как можно объяснить несколько противоречивые результаты проведенных экспериментов? Из теории (теорема 3) следует, что на нейроне (i, j) устойчивость не ухудшается только для тех образов P^K , для которых скалярное произведение $\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle + w_{ij} p_{ij}^K$ в модели 2 равно $\min_K (\langle W_{ij}, D_{ij}^K \rangle + w_{ij} p_{ij}^K)$. Поэтому если прототипов довольно много и/или состояния P_{ij}^K линейно зависимы, то такое равенство будет выполнено не для всех P_{ij}^K , а значит, при переходе к модели 2 устойчивость может ухудшиться.

Заключение. Исследовано влияние смещения на основные свойства клеточно-нейронной ассоциативной памяти. Показано, во-первых, что введение смещения в КНАП улучшает ее способности хранить информацию (теорема 1). Во-вторых, установлено, что смещение может улучшить устойчивость сети к искажениям при некоторых ограничениях на прототипы (теорема 3). В-третьих, предложен итеративный метод обучения, ориентированный на повышение устойчивости КНАП к искажениям, а также доказана его сходимость (теорема 2). Проведен ряд экспериментов по изучению влияния смещения на устойчивость к 1-искажениям хранимых образов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тэнк Д. У., Хопфилд Д. Д. Коллективные вычисления в нейроподобных электронных схемах // В мире науки. 1988. № 2. С. 44.
2. Liu D., Michel A. N. Sparsely interconnected neural networks for associative memories with applications to cellular neural networks // IEEE Trans. on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Process. 1994. 41, N 4. P. 295.
3. Пудов С. Г. Обучение клеточно-нейронной ассоциативной памяти // Автометрия. 1997. № 2. С. 107.
4. Пудов С. Г. Влияние автосвязи на устойчивость клеточно-нейронной ассоциативной памяти // Автометрия. 1998. № 1. С. 90.
5. Gorodnichy D. O. Desaturating coefficient for projection learning rule // Lecture Notes in Computer Sci. 1996. 1112. P. 469.
6. Bandman O. L. Cellular-neural computations, formal model and possible applications // Lecture Notes in Computer Sci. 1995. 964. P. 21.
7. Bandman O. L., Pudov S. G. Stability of stored patterns in cellular-neural associative memory // Bull. Novosibirsk Computer Center. Ser. Computer Sci. 1996. N 4. P. 1.
8. Brucoli M., Carnimeo L., Grassi G. A global approach to the design of discrete-time cellular-neural networks for associative memories // Internat. Journ. Circuit Theory and Applicat. 1996. 24. P. 489.
9. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. М.: Мир, 1971.
10. Achasova S., Bandman O., Markova V., Piskunov S. Parallel substitution algorithm // Theory and Applicat. Singapore: World Sci., 1995.