РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 2000

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.51

В. В. Захаров

(Одесса, Украина)

ОЦЕНКА ЭВОЛЮЦИОННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Предлагается рекурсивный алгоритм оценки мгновенных эволюционных спектральных характеристик для стационарных и нестационарных временных рядов произвольной природы с использованием алгоритма калмановской фильтрации.

При спектральном анализе временных рядов возникает задача оценки мгновенных эволюционных спектральных характеристик ряда. Для этого, как правило, используют рекурсивные вычислительные процедуры [1].

Так, в работе [2] для рекурсивной оценки спектральных характеристик временных рядов предложено использовать фильтр первого порядка. В [1] такие же оценки получены для фильтра произвольного порядка.

В настоящей работе предлагается рекурсивный алгоритм оценки эволюционных спектральных характеристик как для стационарных, так и для нестационарных временных рядов произвольной природы с использованием алгоритма калмановской фильтрации, позволяющего более гибко изменять параметры модели в зависимости от изменений статистик входного процесса.

Рассмотрим класс нестационарных временных рядов, описываемых моделью

$$y(n)=\sum_{i=1}^{r}a(i)y(n-i)+\sum_{i=1}^{q}b(i)x(n-i)+e(n), \tag{1}$$

где $a(i),\ i=1,\dots,r;\ b(i),\ i=1,\dots,q,$ – неизвестные параметры; $x(n-i), y(n-i)$ – наблюдаемые переменные; $e(n)$ – ненаблюдаемый шум, $n=r+1,\dots,N+r+1$; N – число отсчетов временного ряда.

Полагая $r\ge 1,\ q\ge 0,\ r+q=m$, выражение (1) запишем в виде векторно-матричного уравнения

$$\mathbf{Y}=\mathbf{XV}+\mathbf{E}, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{X}=\begin{vmatrix} y(r),\dots,y(1), & & x(r),\dots,x(r-q+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+r),\dots,y(N+1), & & x(N+r),\dots,x(N+1+r-q) \end{vmatrix}$$

– матрица размером $N\times m$; $\mathbf{Y}=|y(r+1),\dots,y(N+r),y(N+r+1)|^T$ – вектор размерностью N; $\mathbf{V}=|a(1),\dots,a(r),\ b(1),\dots,b(q)|^T$ – вектор размерностью m; $\mathbf{E}=|e(r+1),\dots,e(N+r+1)|^T$ – вектор размерностью N; T – знак транспонирования.

Применительно к модели (2) модель Калмана запишем в виде

$$\xi(k)=\varphi(k)\Theta(k)+\varepsilon(k). \tag{3}$$

Здесь $\varphi(k)=|\xi(k-1),\dots,\xi(k-r),\ x(k-1),\dots,x(k-q)|$; $\Theta(k)=|a(1),\dots,a(r),$ $b(1),\dots,b(q)|^T$; $\xi(k)=y(k)$; $\varepsilon(k)=e(k)$.

При этом оптимальные оценки коэффициентов вектора состояний фильтра Калмана описываются соотношением

$$\Theta_{\text{opt}}(k+1)=\Phi(k+1/k)\,\Theta_{\text{opt}}(k), \tag{4}$$

где $\Theta_{\text{opt}}(0)=\Theta(0)$, $\Theta_{\text{opt}}(k)$ – оптимальная оценка вектора параметров Θ на k-й итерации; $\Phi(k+1/k)$ – переходная матрица состояния между k-м и $(k+1)$-м дискретным моментом времени, элементы которой зависят от статистических характеристик входного процесса. Так, если входная последовательность (временной ряд) является представительной выборкой стационарного случайного процесса (даже в широком смысле), тогда матрицу $\Phi(k/k-1)$ можно выбрать единичной, так как оптимальные параметры $\Theta_{\text{opt}}(k)$ будут постоянны. Для процесса с медленно меняющейся нестационарностью можно принять [1]:

$$\Phi(k/k-1)=I_N\,\omega^{N-k}(k), \tag{5}$$

где I_N – единичная матрица размером N; $\omega^{N-k}(k)$ – некоторый действительный коэффициент, лежащий в интервале $0<\omega\le 1$ и значение которого зависит от эффективной памяти фильтра Калмана $\tau_{\text{эф}}$ и определяется из условия [1, 4]

$$\omega(k)=1-1/\tau_{\text{эф}}(k). \tag{6}$$

В случае же быстро меняющихся нестационарностей матрица $\Phi\,(k/k+1)$ может быть произвольной структуры и необязательно диагональной.

На основе результатов теории калмановской фильтрации оптимальная оценка вектора состояний $\Theta_{\text{opt}}(k)$ по критерию минимума СКО определяется выражением

$$\hat{\Theta}_{\text{opt}}(k/k)=\hat{\Theta}_{\text{opt}}(k/k-1)+G(k)[\xi(k)-\varphi^{T}(k)\hat{\Theta}_{\text{opt}}(k/k-1)], \tag{7}$$

где $\hat{\Theta}_{\text{opt}}(k/k)$ – оценка величины $\Theta_{\text{opt}}(k)$, основанная на предыдущих наблюдениях вплоть до момента времени k; $\hat{\Theta}_{\text{opt}}(k/k-1)$ – оценка величины

$\Theta_{opt}(k)$, базирующаяся на наблюдениях вплоть до момента времени $k-1$ (прогноз для $\Theta_{opt}(k)$); $G(k)$ – матрица коэффициентов передачи калмановского фильтра.

Предлагается следующий рекуррентный алгоритм с использованием калмановской модели, позволяющий получить эволюционный спектр как для стационарных, так и для нестационарных (представляющих процессы с медленной нестационарностью) временных рядов.

1. Задаем начальные условия:

$$\Theta_{opt}(0/0)=E\{\Theta_{opt}\}, \qquad P(0/0)=E\{\Delta\Theta(0)\Delta\Theta^T(0)\},$$

где $\Delta\Theta(0)=\hat{\Theta}(0/0)-\Theta_{opt}$, а величина Θ_{opt} соответствует оптимальному решению $\Theta_{opt}=R_{\varphi}^{-1}(k)r_{\varphi\xi}(k)$; $R_{\varphi}(k)$ – корреляционная матрица последовательности $\varphi(k)$; $r_{\varphi\xi}(k)$ – вектор взаимной корреляции между $\varphi(k)$ и $\xi(k)$.

Если вектор Θ_{opt} неизвестен, тогда величины $\Theta_{opt}(0/0)$ и $P(0/0)$ выбираем единичными.

2. Вычисляем вспомогательные величины до фильтрации. Для $k=1,\dots,N$ вычисляем оптимальную оценку вектора $\hat{\Theta}_{opt}$, ковариационную матрицу ошибки прогноза $P(k/k-1)$ и оптимальный прогноз k-го отсчета $\hat{\xi}(k)$:

$$\hat{\Theta}_{opt}(k/k-1)=\Phi(k/k-1)\hat{\Theta}_{opt}(k-1/k-1), \tag{8}$$

$$P(k/k-1)=\Phi(k/k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k/k-1), \tag{9}$$

$$\hat{\xi}(k)=\varphi(k)\hat{\Theta}_{opt}(k/k-1). \tag{10}$$

3. Вычисляем ошибку предсказания k-го отсчета:

$$\varepsilon(k)=\xi(k)-\hat{\xi}(k). \tag{11}$$

4. Вычисляем оптимальную оценку вектора $\hat{\Theta}_{opt}$ после фильтрации:

$$\hat{\Theta}_{opt}(k/k)=\hat{\Theta}_{opt}(k/k-1)+\Delta\hat{\Theta}(k), \tag{12}$$

где $\Delta\hat{\Theta}(k)=G(k)\varepsilon(k)=|\Delta a(1),\Delta a(2),\dots,\Delta a(r),\ \Delta b(1),\dots,\Delta b(q)|$;$G(k)$– матрица коэффициентов передачи фильтра Калмана, которая определяется выражением

$$G(k)=\frac{P(k/k-1)\varphi(k)}{\varphi^T(k)P(k/k-1)\varphi(k)+\varepsilon^2(k)}. \tag{13}$$

5. Находим ковариационную матрицу ошибки вектора $\Theta_{opt}(k)$ после фильтрации:

$$P(k/k)=P(k/k-1)-G(k)\varphi^T(k)P(k/k-1), \tag{14}$$

или же, подставив (13) в (14),

$$P(k/k)=P(k/k-1)-\frac{P(k/k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P^T(k/k-1)}{\varphi^T(k)P(k/k-1)\varphi(k)+\varepsilon^2(k)}. \tag{15}$$

6. Получаем эволюционные спектральные компоненты:

$$\Delta S_f^a(k)=e_f\Delta a, \tag{16}$$

$$\Delta S_f^b(k)=e_f\Delta b, \tag{17}$$

где $\Delta a=|\Delta a(1),\ \dots,\ \Delta a(r)|^T$; $\Delta b=|\Delta b(1),\ \dots,\ \Delta b(q)|^T$; $e_f=|1, \exp(j2\pi f\Delta t,\ \dots$ $\dots,\ j2\pi fN\Delta t)|$ – вектор комплексных синусоид; $j=\sqrt{-1}$; Δt – интервал дискретизации временного ряда; $\Delta S_f^a(k)$, $\Delta S_f^b(k)$ – эволюционные спектральные компоненты.

7. Находим спектральные характеристики временного ряда по истечении k-й итерации:

$$S_f^{\ominus}(k)=\frac{S_f^a(k)}{S_f^b(k)}. \tag{18}$$

Здесь

$$S_f^a(k)=S_f^a(k-1)+\Delta S_f^a(k), \tag{19}$$

$$S_f^b(k)=S_f^b(k-1)+\Delta S_f^a(k). \tag{20}$$

8. Определяем характер нестационарности (быстрая, медленная), для этого находим текущий интервал корреляции трендовой составляющей $\tau_{\text{т}}(k)$ и входной последовательности $\tau_{\varphi}(k)$ [3]:

$$\tau_{\text{т}}(k)=\frac{\sum\limits_{p=0}^{N}R_{\text{т}}(k,p)}{R_{\text{т}}(k,0)}, \tag{21}$$

$$\tau_{\varphi}(k)=\frac{\sum\limits_{p=0}^{N}R_{\varphi}(k,p)}{R_{\varphi}(k,0)}, \tag{22}$$

где $R_{\text{т}}(k,p)$, $R_{\varphi}(k,p)$ – текущие корреляционные функции трендовой составляющей и входной последовательности.

Если отношение $\tau_{\text{т}}(k)/\tau_{\varphi}(k)\gg N$, то имеем практически стационарный процесс, если $1\ll\tau_{\text{т}}(k)/\tau_{\varphi}(k)<N$, то процесс с медленной нестационарностью, если $\tau_{\text{т}}(k)/\tau_{\varphi}(k)\cong 1$, то процесс с быстрой нестационарностью.

9. Определяем эффективную память фильтра Калмана, при этом $\tau_{\text{эф}}(k)=$ $=\min[\tau_{\text{т}}(k),\ \tau_{\varphi}(k)]$ при обработке данных без удаления тренда и $\tau_{\text{эф}}(k)=$ $=\tau_{\varphi}(k)$ при удалении трендовой составляющей.

10. Определяем коэффициент $\omega(k)$ из выражения

$$\tau_{эф}(k) = 1/(1-\omega(k)), \tag{23}$$

откуда следует:

$$\omega(k) = 1 - 1/\tau_{эф}(k). \tag{24}$$

11. Формируем матрицу $\Phi(k+1/k)$ согласно выражению (5).

Использование фильтра Калмана в представленном алгоритме (выражения (8)–(24)) позволяет найти эволюционные спектральные компоненты заданного временного ряда. При стационарности характеристик вектора $\varphi(k)$ фильтр является оптимальным и гарантируется сходимость к оптимальному решению вектора Θ_{opt} за $2m$ шагов (в этом случае $\Delta\Theta(k)$ в (12) стремится к нулю), а следовательно, получение спектральных характеристик $S_f^{\Theta}(k)$ временного ряда, стремящихся к истинным, $-\bar{S}_f^{\Theta}$ по истечении $k = 2m$ итераций.

В случае же нестационарности входной последовательности данных получение оптимальных оценок крайне затруднительно. Это связано с тем, что, как правило, априори неизвестны характер нестационарности и закон ее изменения во времени. Поэтому возможно получение лишь мгновенных спектральных компонент, отражающих спектральные характеристики временного ряда в интервале $\tau_{эф}$.

Таким образом, в работе предложена рекурсивная процедура нахождения эволюционного спектра для стационарных и нестационарных временных рядов с использованием фильтра Калмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марпл-мл. С. П.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. **Амин М. Г.** О применении фильтра первого порядка для рекурсивной оценки спектра мощности // ТИИЭР. 1987. **75**, № 5. С. 244.
3. **Котюк А. Ф., Цветков Э. И.** Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. М., 1970.

Одесский политехнический университет

Поступило в редакцию 30 июля 1998 г.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 2000

УДК 539.23 : 539.216

В. В. Атучин, К. К. Зилинг, Д. В. Ибрагимов, И. Саватинова

(Новосибирск, Россия – София, Болгария)

ИЗМЕНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ВОЛНОВОДНЫХ СЛОЯХ $H_xLi_{1-x}NbO_3$

Впервые экспериментально исследованы изменения показателя преломления в волноводных слоях $H_xLi_{1-x}NbO_3$ при температурах закалки от 20 до 320 °C в концентрационном интервале $0{,}44 \le x \le 0{,}48$. Оценен фазовый состав этих структур. Обнаружено понижение концентрационной границы существования β-фазы в протонно-обменных слоях.

Введение. Протонно-обменные слои $H_xLi_{1-x}NbO_3$ являются базовыми структурами для реализации ряда элементов интегральной оптики. Перспективы практического использования данных структур во многом определяются стабильностью и воспроизводимостью их оптических параметров. Найдено, что при температурах $T \sim 20$ °C приращение необыкновенного показателя преломления Δn таких слоев меняется со временем t. За время от нескольких дней до месяца уменьшение Δn достигает $(3\text{–}10)\cdot 10^{-3}$ [1–5]. Показано также, что величина Δn зависит от скорости охлаждения после термообработок: для быстрого (q) и медленного (s) охлаждений выполняется соотношение $\Delta n(q) > \Delta n(s)$ [5, 6] и разница $\Delta n(q) - \Delta n(s)$ имеет тот же порядок величины, что и изменение Δn при хранении в условиях комнатной температуры.

Для объяснения этих эффектов, наряду с неподтвержденной экспериментально гипотезой о потере слоем части водорода, использовалось предположение о фазовых переходах из стабильных при повышенной температуре фаз в фазы, стабильные при комнатной температуре. В этом случае изменения Δn должны быть непосредственно связаны с видом фазовой диаграммы $LiNbO_3 - HNbO_3$. В [4], действительно, обнаружено изменение фазового состава протонно-обменного слоя при релаксации $\Delta n(q)$ к равновесному значению $\Delta n(s)$. В [7] установлено, что в области значений x, соответствующей β-фазе переменного состава $(0{,}56 \le x \le 0{,}76$ [8]), количество экстремумов на зависимости $\Delta n(q)$ от температуры закалки соответствует количеству известных фазовых переходов [8]. Кроме того, в [7] показано, что разница $\Delta n(q)$ и $\Delta n(s)$, указывающая на наличие метастабильных при $T \sim 20$ °C фаз, существует и для $x < 0{,}56$, т. е. в области, где данные разных авторов о фазовом составе значительно расходятся [5, 8].