

В. С. Бартош, М. М. Лаврентьев

(Новосибирск)

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОМОБИЛЯ
В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ**

Приводится динамическая модель автомобиля, основные теоретические посылки, используемые при ее построении, система дифференциальных уравнений, описывающая поведение автомобиля, реализация динамической модели в виде программного приложения на базе РС. Особое внимание уделено описанию решения практических проблем, связанных с конечно-разностным способом решения дифференциальных уравнений динамической модели. Описан прием восстановления трехмерной поверхности в реальном времени.

Введение. В настоящее время стоимость автотренажеров очень высока по сравнению со стоимостью автомобиля [1]. Автотренажеры включают в себя дорогостоящие механические устройства, высокопроизводительные графические станции типа SGI/ONYX с трехмерными базами данных об окружающей обстановке, а также динамическую модель автомобиля, которая определяет поведение автомобиля в зависимости от его технических характеристик, действий водителя, дорожных условий. Не всякая автомобильная компания может позволить себе такие тренажеры, поэтому исследования новых автоусовершенствований проводятся с помощью компьютерных программ. Тщательный расчет сложного динамического поведения автомобиля требует значительных вычислительных ресурсов, поэтому существующие коммерческие программные пакеты моделирования [2, 3] работают медленно, не отвечая требованиям реального времени при использовании универсальных компьютеров.

В настоящей работе поставлена цель: на РС-платформе при упрощении требований к моделированию реальных физических процессов разработать динамическую модель автомобиля. Для реализующего ее программного приложения должны выполняться требования реального времени. Под этими требованиями понимаем максимальное сохранение правдоподобности и «плавности» движения автомобиля. Кроме того, время, потраченное на расчет положения автомобиля на новом кадре, должно быть меньше времени, отведенного на подготовку этого кадра. Считается, что для обеспечения «плавности» движения достаточно 20 кадров в секунду, т. е. необходимо тратить не более 50 мс на подготовку одного кадра.

Для этого проведены теоретические исследования по математическому моделированию реальных физических процессов, происходящих при движении автомобиля. В результате построена математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений. Вследствие наличия изначально неопределенных факторов (например, рельеф местности под колесами автомобиля в каждый момент времени) решение этих уравнений в аналитическом виде не представляется возможным. Однако их численное решение оказывается вполне приемлемым при дискретности времени 30 мс. Численное решение реализовано в виде пакета процедур динамической модели. Функциональные возможности пакета включают в себя антиблокировочную систему для тормозов, изменяющуюся массу, прокалывание колеса, противозаносную систему при рулении и т. д.

В сочетании с программными средствами визуализации в реальном времени Virtual World Inventor (VWI), разрабатываемыми фирмой "SoftLab-Nsk", создано программное приложение на базе PC, позволяющее рассчитывать поведение автомобиля в требуемом режиме реального времени.

Динамическая модель. Для построения динамической модели выбрана следующая механическая схема. Автомобиль – это твердое тело, обладающее массой, моментом инерции, положением в пространстве (два трехмерных вектора – точка и ориентация) и скоростью (также два трехмерных вектора – линейная и угловая скорости).

При построении динамической модели сделан ряд упрощающих предположений. Например, у всех колес независимая подвеска и масса колес равны нулю. Это приводит к тому, что у системы остается всего шесть степеней свободы (координаты центра масс автомобиля и ориентация автомобиля). Далее предполагалось, что автомобиль не подвержен деформациям, возникающим, например, при переезде через крупные валуны, т. е. ход подвесок не смещается относительно центра масс ни при каких условиях. Еще одно упрощение – радиус колес считается равным нулю. В предложенной схеме колесо – точка на конце пружины подвески. Это, например, упрощает вычисление точек касания колес поверхности.

На автомобиль действует набор сил (рис. 1): а) сила тяжести, приложенная в точке центра масс; б) силы ускорения, торможения и трения (скольжения и качения), приложенные параллельно поверхности в точке касания каждого колеса поверхности; в) силы пружин и силы амортизаторов, направленные перпендикулярно поверхности.

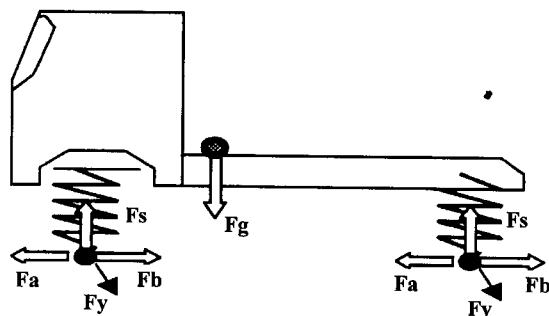


Рис. 1. Набор сил, действующих на автомобиль

Реализация этой механической схемы в соответствии с принципами, изложенными в [4], приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{X}/dt,$$

$$\mathbf{W} = d\mathbf{A}/dt,$$

$$\mathbf{X}'' = d\mathbf{V}/dt,$$

$$\mathbf{A}'' = d\mathbf{W}/dt,$$

$$\mathbf{X}'' \text{ mass} = \mathbf{Fg} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{N}_i (k\mathbf{N}_i * (\mathbf{Rs}_i - \mathbf{Pgr}_i)) / (\mathbf{N}_i * \mathbf{Z}) - c(\mathbf{W} \times \mathbf{Rs}_i + \mathbf{V}) * \mathbf{N}_i) + \quad (1)$$

$$+ ((fa - fb)\mathbf{C}_i - \beta\mathbf{Uw}_i)(k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i),$$

$$\mathbf{A}'' \mathbf{I} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Rs}_i - \mathbf{Zh}_i) \times (\mathbf{N}_i (k\mathbf{N}_i * (\mathbf{Rs}_i - \mathbf{Pgr}_i)) / (\mathbf{N}_i * \mathbf{Z}) - c(\mathbf{W} \times \mathbf{Rs}_i + \mathbf{V}) * \mathbf{N}_i) +$$

$$+ ((fa - fb)\mathbf{C}_i - \beta\mathbf{Uw}_i)(k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i).$$

Здесь жирным шрифтом отмечены трехмерные векторы; * – символ скалярного произведения векторов; \times – символ векторного умножения векторов; \mathbf{X} – координаты центра масс автомобиля; \mathbf{A} – вектор эйлеровых углов, определяющий ориентацию автомобиля (см. [4]); i – индекс колеса/пружины/амортизатора; n – количество колес у автомобиля; $\mathbf{V} = \mathbf{X}'$ – скорость центра масс; $\mathbf{W} = \mathbf{A}'$ – угловая скорость; $\mathbf{F} = \mathbf{V}' \text{ mass}$ – сумма всех сил, действующих на автомобиль:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Fg} + \sum_i \mathbf{F}_i,$$

где \mathbf{Fg} – сила тяжести; $\mathbf{F}_i = \mathbf{Fs}_i + \mathbf{Fh}_i + \mathbf{Fa}_i + \mathbf{Fb}_i + \mathbf{Fy}_i$ – сумма сил, действующих на i -е колесо; \mathbf{Fs}_i – сила i -й пружины; \mathbf{Fh}_i – сила сопротивления i -го амортизатора; \mathbf{Fa}_i – сила двигателя, переданная через трансмиссию автомобиля на i -е колесо; \mathbf{Fb}_i – сила торможения на i -м колесе; \mathbf{Fy}_i – перпендикулярная сила трения на i -м колесе;

$$\mathbf{Fs}_i = k_i h_i \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Fh}_i = -c_i h'_i \mathbf{Z},$$

где k_i – коэффициент жесткости i -й пружины; h_i – изменение длины i -й пружины в результате сжатия: $h_i = \mathbf{N}_i * (\mathbf{Rs}_i - \mathbf{Pgr}_i) / (\mathbf{N}_i * \mathbf{Z})$; $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{A})$ – вектор в мировой системе координат, который в системе координат центра масс автомобиля есть единичный вектор вдоль оси Z : $(0, 0, 1)$; \mathbf{N}_i – вектор нормали к поверхности земли в точке касания i -го колеса; \mathbf{Rs}_i – вектор из центра масс в наиниžшую точку колеса при максимальном ходе подвески вверх; \mathbf{Pgr}_i – точка на земле, которой касается колесо; c_i – коэффициент сопротивления амортизатора; h'_i – скорость сжатия i -й пружины: $h'_i = (\mathbf{W} \times \mathbf{Rs}_i + \mathbf{V}) * \mathbf{Z}$.

$\mathbf{Fw}_i = (\mathbf{Fs}_i + \mathbf{Fh}_i) * \mathbf{N}_i = (k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i)$ – сила, с которой колесо давит на землю. Тогда

$$\mathbf{Fa}_i = fa\mathbf{C}_i \mathbf{Fw}_i = fa\mathbf{C}_i (k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i),$$

$$\mathbf{Fb}_i = -fb\mathbf{C}_i \mathbf{Fw}_i = -fb\mathbf{C}_i (k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i),$$

$$\mathbf{Fy}_i = -\beta\mathbf{Uw}_i \mathbf{Fw}_i = -\beta\mathbf{Uw}_i (k_i h_i - c_i h'_i)(\mathbf{Z} * \mathbf{N}_i),$$

fa – коэффициент акселерации, зависящий от крутящего момента двигателя, степени нажатия педали акселератора и т. д.; $fb1$ – коэффициент торможения, зависящий от коэффициента трения с дорогой и степени нажатия педали тормоза; β – коэффициент, зависящий от коэффициента трения колеса с дорогой и угла между C_i и Vw_i (эту зависимость см. на рис. 3); C_i – вектор направления колеса, параллельный земле и учитывающий поворот передних колес и ориентацию автомобиля в целом: $C_i = N_i \times (C \text{Rot}_{N_i}(\alpha)) \times N_i$, при $\alpha = 0$ $C_i = C$; C – направление продольной оси автомобиля; $C \text{Rot}_{N_i}(\alpha)$ – поворот вектора C вокруг оси N_i на угол α ; Vw_i – скорость колеса параллельно поверхности земли:

$$Vw_i = N_i \times (W \times R w_i + V) \times N_i,$$

Uw_i – нормализованный вектор, перпендикулярный C_i ; $Rw_i = Rs_i - Zh_i$ – вектор из центра масс в точку, в которой колесо касается земли; K – момент суммы сил, действующих на автомобиль:

$$K = \sum_{i=1}^n R w_i \times F_i = \sum_{i=1}^n R w_i \times (F s_i + F h_i + F a_i + F b_i),$$

$$I_x \quad 0 \quad 0$$

$W'I = K$, $W' = KI^{-1}$, где $I = \begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{matrix}$ – момент инерции.

$$0 \quad 0 \quad I_z$$

Таким образом, получена система (1), описывающая динамику автомобиля. Эта система состоит из 18 дифференциальных уравнений, характеризуется наличием степенных нелинейностей и большим набором параметров, значения которых определяются характеристиками дорожного покрытия и дорожным рельефом под каждым колесом. В системе учитываются возможности заносов, отрывов колес от грунта, а также вертикальные ограничения хода подвесок. Как отмечалось выше, вследствие наличия таких неопределенных факторов, как, например, рельеф поверхности под колесами автомобиля в данный момент времени, решение системы уравнений (1) в аналитическом виде не представляется возможным.

Устойчивость дискретного решения. Серьезная проблема, возникшая при численной реализации этой модели, – проблема устойчивости дискретного решения. При решении этой системы уравнений используется явная схема дискретизации. Поясним суть проблемы на простейшем примере

$$x'' = -\beta(t)x', \quad (2)$$

когда итерационная формула скорости имеет вид

$$x'(t_{k+1}) = x'(t_k)(1 - \beta(t_k)dt_k), \quad (3)$$

где $dt_k = t_{k+1} - t_k$. Очевидно, что при $\beta(t_k)dt_k > 1$ на каждой следующей итерации знак скорости x' будет меняться на противоположный (этот эффект назовем биениями), а при $\beta dt_k > 2$, кроме того, возникнет экспоненциальный рост амплитуды x' . Возникновение биений связано с заменой дифференциальных операторов конечно-разностными и не имеет никакого отношения к реальным физическим процессам. Этих проблем можно избежать, уменьшая

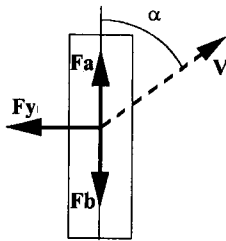


Рис. 2. Силы, действующие на колесо при «боковом проскальзывании» под углом α : V – скорость колеса, направленная под углом α к продольной оси; F_a – сила ускорения от двигателя; F_b – сила торможения; $F_y(\alpha)$ – поперечная сила трения, возникающая при поперечной составляющей скорости V

dt_k , но это приводит к неприемлемому увеличению числа итераций и времени расчетов, т. е. в конечном итоге к нарушению требований реального времени.

Эта проблема «устойчивости» характерна для всех сил трения. Для ее решения силы трения выделяются из общего набора сил и рассматриваются в отдельности в каждом конкретном случае. При этом новое значение $x'(t_{k+1})$ выбирается, исходя из соображений устойчивости всей системы.

Так, например, на колесо действует сила трения, зависящая от угла «бокового проскальзывания» α (рис. 2). Для представления поперечной силы трения принято использовать формулу

$$F_y(\alpha) = \beta(\alpha)F_z, \quad (4)$$

где F_z – сила, с которой колесо давит на грунт.

Зависимость коэффициента $\beta(\alpha)$, влияющего на «устойчивость» системы, исследована различными центрами и компаниями в практических измерениях. Характерные кривые для $\beta(\alpha)$ или $F_y(\alpha)/F_z$ представлены на рис. 3. Их можно найти также в [5, 6].

Сумма сил, действующих на каждое колесо, а также сумма моментов сил, приложенных к каждому колесу, рассматриваются в модели в каждый момент времени, чтобы ответить на вопрос, смогут ли они удержать машину от заноса или вывести из него в управляемое движение по радиусу, определяемому углом поворота передних колес.

Выражение (3) служит, скорее, для того, чтобы показать проблему в чистом виде, потому что реальные расчеты значительно сложнее. Рассмотрим пример с трением колеса более подробно. Пусть F_r – сумма сил трения, действующих на колеса:

$$F_r = \sum_{i=1}^n F_{r_i}, \quad (5)$$

где $F_{r_i} = F_{y_i}(\alpha_i) + F_{b_i}(V_i, \alpha_i)$, $F_{y_i}(\alpha_i)$ – боковая сила трения на i -м колесе из уравнения (4); $F_{b_i}(V_i, \alpha_i)$ – сила трения, возникающая при торможении i -го

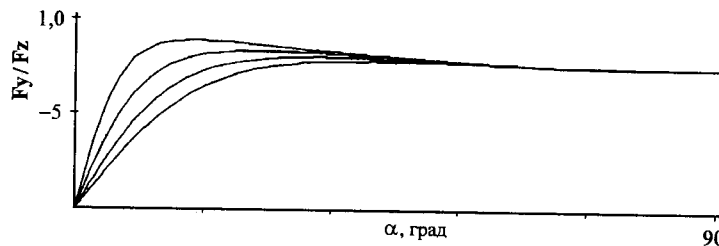


Рис. 3. Зависимость боковой силы трения колеса от угла «бокового проскальзывания» при различных значениях продольного проскальзывания

колеса, двигающегося со скоростью V_i . Сумма моментов этих сил

$$\mathbf{KFr} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{Fr}_i, \quad (6)$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор из центра масс автомобиля в точку соприкосновения i -го колеса с землей. Пусть также автомобиль имеет импульс \mathbf{P} и момент импульса \mathbf{M} . На $k+1$ -м шаге итерации импульс вычисляется как

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k + \mathbf{Fr}_k dt_k, \quad (7)$$

где dt_k – интервал времени между $k+1$ -м и k -м шагом итерации, а момент импульса

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_k + \mathbf{KFr}_k dt_k. \quad (8)$$

Проблема устойчивости для импульса может возникнуть при разных знаках у скалярных произведений $(\mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{Fr}_k)$ и $(\mathbf{P}_k, \mathbf{Fr}_k)$, а проблема устойчивости для момента импульса – при разных знаках у произведений $(\mathbf{M}_{k+1}, \mathbf{KFr}_k)$ и $(\mathbf{M}_k, \mathbf{KFr}_k)$. Требование устойчивости для импульса заключается в замене в этот момент правильного значения компоненты \mathbf{Fr}_k , параллельной импульсу \mathbf{P}_k , на новое значение $(-\mathbf{P}_k / dt_k)$ для того, чтобы не изменился знак $(\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{k+1})$ после исполнения итерационного шага (7), что гарантирует отсутствие биений импульса \mathbf{P} . Аналогично для \mathbf{M}_k необходимо выделить из \mathbf{KFr}_k компоненту, параллельную \mathbf{M}_k , и присвоить ей новое значение $-\mathbf{M}_k / dt_k$ для того, чтобы не изменился знак $(\mathbf{M}_k, \mathbf{M}_{k+1})$ после исполнения итерационного шага (8), что гарантирует отсутствие биений момента импульса \mathbf{M}_k . Получаемая при изменении реальных значений векторов погрешность не выходит за рамки погрешности одного итерационного шага.

Проблема устойчивости возникает и в другом случае: при расчете амортизаторов автомобиля. Силы трения в амортизаторах зависят от вертикальной скорости колеса. Рассматривать биения как результат действия суммы амортизационных сил нельзя, поскольку силы в амортизаторах изменяют свои значения гораздо быстрее, чем происходят изменения сил в вышеизложенном примере, на временах, уже сравнимых с dt . Разработан простой алгоритм, который можно в случае формулы скорости (3) интерпретировать как уменьшение коэффициента β , гарантирующее, что значение βdt не превысит 1. Следует заметить, что амортизатор работает по-разному в зависимости от того, сжимается он или растягивается. Когда амортизатор растягивается, сила его сопротивления выражается формулой

$$Fh1_i = -vsh_i |vsh_i| csh1_i,$$

а когда сжимается –

$$Fh2_i = -vsh_i csh2_i,$$

где vsh_i – скорость растяжения/сжатия i -го амортизатора; $csh1_i, csh2_i$ – коэффициенты амортизации. Поскольку сопротивление амортизатора не может превышать приложенной к нему силы, ограничим $Fh1_i$ силой сжатия i -й пружины на текущий момент. Ограничивая $Fh2_i$ половиной от максимальной силы сжатия i -й пружины, мы вновь избегаем биений, не выходя за рамки погрешности итерационной схемы.

Вышеизложенные приемы с выделенными из общего рассмотрения силами трения легли в основу разработанных процедур, стабилизирующих итерационный процесс.

В целом построенная динамическая модель и средства ее численной реализации отвечают поставленным задачам. Так, при использовании возможностей современного РС с процессором Pentium-233 дискретная модель устойчива, что обеспечивает плавное изменение визуальной обстановки (генерируемой средствами системы VWI, упомянутой выше) в широком диапазоне режимов движения автомобиля.

Представление рельефа. Отдельного внимания заслуживает вопрос о представлении информации о рельефе дорожной поверхности для модели. VWI позволяет получить данные о форме поверхности в виде двух параметров: точки пересечения поверхности заданным лучом и вектора нормали поверхности в данной точке. Перемещение модели автомобиля по поверхности проходит в два этапа. На первом этапе исследуется пространство в точке предполагаемого перемещения каждого колеса на следующей стадии итерационного процесса. Для этого используется упрощенный алгоритм предварительного расчета нового положения автомобиля, не учитывающий ряд факторов, влияющих на его движение. Вместе с предыдущими значениями параметров дороги под колесами новые значения служат для построения простой поверхности на каждой итерации, состоящей из ломаной плоскости. Исходные данные о поверхности представляются в виде двух пар (точка и нормаль к поверхности). Первая пара определяется предыдущим квантом времени, а вторая – получается из упрощенного алгоритма движения модели автомобиля. Для каждого колеса на основе соответствующей пары точка–нормаль строится поверхность из трех плоскостей. Второй этап перемещения модели автомобиля – это тщательный расчет движения с учетом всех сил. На этом этапе каждое колесо движется по своей построенной ломаной поверхности, состоящей из трех плоскостей. Первая плоскость задается первой парой точка–нормаль, вторая – второй парой, а промежуточная рассчитывается для того, чтобы соединить первую точку со второй.

На рис. 4 показана ломаная плоскость для одного колеса, по которой в действительности будет рассчитываться траектория колеса между соседни-

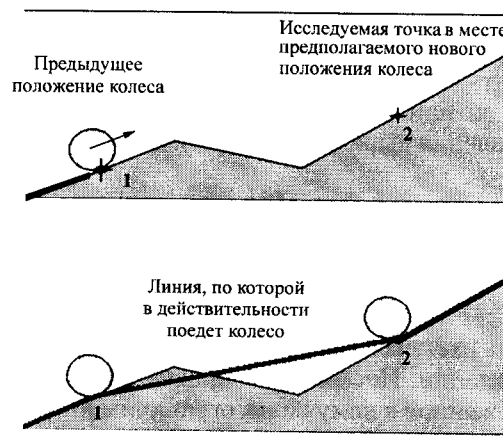


Рис. 4. Пример построения временной поверхности под колесом на отдельно взятом шаге итерационного процесса

ми квантами времени, но во вторую точку может не попасть, так как длина отрезка, соединяющего точки 1 и 2, не всегда соответствует реальной скорости автомобиля. Такое построение поверхности в реальном времени в виде трех плоскостей на основе только двух точек приносит вполне приемлемые результаты для всевозможных форм поверхностей.

При исследовании поверхности через механизмы VWI на каждом участке поверхности задается тип поверхности, который определяет коэффициенты трения скольжения и трения качения.

Заключение. Разработана сравнительно простая динамическая модель автомобиля. Реализующий ее пакет процедур не только удовлетворяет требованиям реального времени на РС, но и позволяет процессору основную часть своего времени направить на генерирование внешней обстановки средствами VWI. Так, на процессоре Pentium-233 при характерном требовании «плавности» движения осуществляется смена кадра через 50 мс (20 Гц), а при генерации кадра средствами VWI – за 30 мс. Тогда оставшиеся 20 мс достаточны для того, чтобы рассчитать новое положение 15 автомобилей. В сочетании с VWI это позволяет создавать высокореалистичные автомобильные симуляторы на РС, которые можно использовать в автошколах и компьютерных играх. По оценкам специалистов в области преподавания вождения у разработанного приложения с большой степенью достоверности сохранены такие присущие автомобилям особенности реального поведения, как крен, заносы, перевороты. Способность модели по-разному реагировать на различные типы дорожных покрытий и различные погодные условия очень сильно приближает виртуальное вождение к вождению в реальном мире [7–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NADS Functional Specification Document. National Advanced Driving Simulator (NADS). <http://www.nhtsa.dot.gov/people/perform/nads/studres.htm#doc6>
2. **The SIMPACK** Software Package is a Tool to Assist Engineers to Model, Simulate, Analyse and Design all Types of Mechanical System, for Instance Vehicles, Robots, Machines and Mechanisms. http://129.247.181.191/A_SIM.html
3. **CarSim** Software Package for Predicting the Braking and Handling Behaviour of Vehicles with Four Wheels and Independent Suspension. <http://www.umtri.umich.edu/erd/software/>
4. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988.
5. **VDANL** (Vehicle Dynamics Analysis, Non Linear). The STI Vehicle Dynamics Simulation Program. <http://www.systemstech.com/vdanll.htm>
6. **Dr. Hans В. Pacejka**. <http://www.rrci.com/pacejka96.html>
7. **Intrepid@gamerscentral.net**. Hard Truck – Preview. <http://www.gamerscentral.net/articles/98/10/hardtruck/frames.html>
8. **Навигатор** игрового мира. 1998. № 12.
9. **Эстрин Д.** Hard truck: Road to Victory // Страна игр. 1998. № 4(23). С. 138. <http://magazine.gameland.ru/si/023/138/1.asp>
10. **Pseudo@dsnet.net**. <http://www.game-over.net/review/october/hardtruck/index.html>