

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 535.8 + 621.37 : 621.391

В. С. Соболев
(Новосибирск)

**К ОЦЕНКЕ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА
ЛАЗЕРНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО АНЕМОМЕТРА**

Найдена оценка частоты доплеровского сигнала из решения уравнения правдоподобия для случая, когда лазерная доплеровская измерительная система работает в многочастичном режиме, а доплеровский сигнал можно считать нормальным узкополосным процессом.

Методы лазерной доплеровской анемометрии [1–5] получают все более широкое распространение, причем не только в области научного эксперимента, но и в промышленности [6]. В связи с этим представляют интерес попытки совершенствования как аппаратной части лазерных доплеровских измерительных систем (ЛДИС), так и их алгоритмического обеспечения. Настоящая работа посвящена отысканию алгоритма оптимальных по точности оценок доплеровской частоты (скорости) для случая, когда ЛДИС работает в многочастичном режиме. Поскольку в большинстве случаев применения ЛДИС распределение исследуемых скоростей неизвестно, то в качестве критерия оптимальности нами принято достижение максимума функции правдоподобия доплеровской частоты.

Интенсивность получаемого сигнала в режиме многочастичного рассеяния обычно достаточно велика, поэтому влиянием дробового шума на точность измерений можно пренебречь. Основной источник ошибок измерений в этой ситуации, как показано в [1, 3, 7], – фазовый шум, являющийся следствием случайного положения рассеивающих частиц в измерительном объеме ЛДИС.

Высокочастотная часть многочастичного доплеровского сигнала имеет вид [1]:

$$i(t) = \sum_{i=1}^N A_i \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t - t_i)^2] \cos[\omega_D (t - t_i)] = A(t) \cos[\omega_D t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где A_i – амплитуды парциальных сигналов; $A(t)$ – амплитуда суммарного сигнала; ω_D – доплеровская частота; $\varphi(t)$ – случайная фаза, производная которой определяет значение фазового шума; N – общее число частиц, прошедших через измерительный объем за время наблюдения; $\xi = \sqrt{2}/\pi M$ – пара-

метр оптической схемы; M – число интерференционных полос в измерительном объеме, отсчитанном на уровне $\exp(-2)$ максимума интенсивности. Как показано в [3], если в измерительном объеме одновременно в среднем находится более 13 частиц, сигнал (1) можно считать нормальным случайным узкополосным процессом.

Мгновенная частота сигнала (1), несущая информацию об интересующей нас скорости, может быть определена в соответствии с известным алгоритмом

$$\omega(t) = \frac{U(t)V'(t) - V(t)U'(t)}{U^2(t) + V^2(t)} = \omega_D + \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (2)$$

где $U(t)$ и $V(t)$ – квадратурные компоненты аналитического сигнала, построенного на основе (1). Как следует из (2), мгновенная частота представляет собой аддитивную комбинацию собственно доплеровской частоты и фазового шума $\phi(t)$. Спектральная плотность значений $\phi(t)$ для нормальных узкополосных случайных процессов вида (1) известна [8] и определяется следующим выражением:

$$S(\omega) = \xi\omega_D \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{4n} \left(\frac{\omega}{\xi\omega_D}\right)^2\right], \quad (3)$$

$$S(0) = 4,612\xi\omega_D. \quad (4)$$

К сожалению, дисперсия фазового шума $\phi(t)$ бесконечна, а его плотность вероятности не подчиняется нормальному закону. Поэтому, чтобы измерения доплеровской частоты (скорости) стали возможны с приемлемой погрешностью, сигнал после частотного детектирования обычно пропускают через фильтр нижних частот с полосой, большей или равной наивысшей частоте флуктуаций скорости. Анализ (3) показал [3], что спектр фазового шума обычно шире спектра доплеровского сигнала и значительно шире спектра турбулентных или иных пульсаций скорости исследуемого объекта. В этой ситуации можно считать, что статистические характеристики сигнала на выходе НЧ-фильтра будут практически совпадать с характеристиками профильтрованного этим фильтром белого шума со спектральной плотностью, равной спектральной плотности фазового шума в нуле $S(0)$.

Далее задачу оптимальной оценки доплеровской частоты будем решать для случая, когда в качестве НЧ-фильтра используется интегрирующая RC-цепь. Инерционные свойства этой цепи позволяют утверждать, что в отличие от мгновенной частоты исходного доплеровского сигнала профильтрованный после частотного демодулятора сигнал будет являться нормальным случайным процессом. Это утверждение справедливо во всех случаях, когда ширина спектра входного сигнала или шума существенно шире полосы пропускания фильтра. Из (3) следует, что ширина спектра на уровне 0,5 его максимума составляет $0,8\xi\omega_D$, тогда условие нормализации выходного сигнала НЧ-фильтром с полосой пропускания ΔF можно записать в виде

$$0,8\xi\omega_D > \Delta F > 1/RC. \quad (5)$$

Если условие (5) выполнено, то корреляционная функция сигнала на выходе фильтра будет определяться его импульсной реакцией, а дисперсия –

значением корреляционной функции в нуле. В случае RC -фильтра первого порядка корреляционная функция имеет вид:

$$B(\tau) = \frac{S(0)\alpha}{4} \exp(-\alpha\tau) = 1,153\alpha\xi\omega_D \exp(-\alpha\tau), \quad (6)$$

где $\alpha = 1/RC$.

С учетом вышеизложенного задача оптимального определения доплеровской частоты (скорости) сводится к оценке значения сигнала неизвестной постоянной величины на фоне нормального шума с корреляционной функцией (6).

Если сигнал на выходе частотного дискриминатора обозначить $\omega(t)$, то в соответствии с (2)

$$\omega(t) = \omega_D(t) + \dot{\phi}(t), \quad (7)$$

где $\omega_D(t)$ – оцениваемая доплеровская частота; $\dot{\phi}(t)$ – значения фазового шума.

Выбирая интервал оценивания T таким образом, чтобы доплеровская частота на нем оставалась неизменной, можно утверждать, что спектральная плотность, корреляционная функция и дисперсия фазового шума на этом интервале также останутся неизменными. В этой ситуации, как известно [9], функционал совместной плотности вероятности значений сигнала (мгновенной частоты $\omega(t)$) будет иметь вид:

$$P[\omega(t) | \omega_D] = k \exp \left[-\omega_D \int_0^T \omega(t) v(t) dt - \frac{\omega_D^2}{2} \int_0^T v(t) dt \right], \quad (8)$$

где k – нормировочный множитель; $v(t)$ – решение интегрального уравнения вида

$$\int_0^T B(\tau) v(t) dt = \omega_D. \quad (9)$$

Для функции корреляции (6) это решение известно [9]:

$$v(x) = \frac{\alpha}{2\sigma_\phi^2} \left[S(t) - \frac{1}{\alpha^2} S''(t) \right] + \frac{1}{\sigma_\phi^2} \left[S(t) - \frac{1}{\alpha} S'(t) \right] \delta(0) + \frac{1}{\sigma_\phi^2} \left[S(t) - \frac{1}{\alpha} S'(t) \right] \delta(T). \quad (10)$$

Здесь $S(t)$ – значение сигнала в отсутствие шума; σ_ϕ^2 – дисперсия шума. В нашем случае, когда доплеровская частота остается постоянной на интервале измерения, $S(t) = \omega_D$, а $\sigma_\phi^2 = 1,153\alpha\xi\omega_D$, как это следует из (6).

Подставляя (10) в (9) и полагая, что производные на краях интервала T равны нулю, найдем

$$v(t) = 1/2,306\xi\omega_D. \quad (11)$$

Подставляя далее (11) в (8) и действуя традиционным путем, приравняем нулю производную логарифма выражения (8) по ω_D . В результате получим следующее уравнение правдоподобия:

$$\int_0^T \omega(t) dt = \hat{\omega}_D T, \quad (12)$$

откуда интересующая нас оценка доплеровской частоты

$$\hat{\omega}_D = \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt. \quad (13)$$

При дискретной обработке доплеровского сигнала, как это следует из (13), оптимальная оценка доплеровской частоты определяется как среднее арифметическое значение мгновенной частоты:

$$\hat{\omega}_D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i, \quad (14)$$

где N – число полученных значений мгновенной частоты $\omega(t)$ на интервале T .

Как следует из (13) и (14), алгоритм максимально правдоподобной оценки доплеровской частоты (скорости) сводится к вычислению ее среднего значения на интервале наблюдения.

Чтобы охарактеризовать качество полученной оценки, найдем ее математическое ожидание и дисперсию. Из (13) для математического ожидания имеем

$$\langle \hat{\omega}_D \rangle = \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\omega_D + \langle \phi(t) \rangle] dt = \omega_D, \quad (15)$$

так как для нормального узкополосного процесса с симметричным спектром, каким является многочастичный доплеровский сигнал, величина $\langle \phi(t) \rangle$ равна нулю. Таким образом, математическое ожидание оценки $\hat{\omega}_D$ не смещено.

Дисперсия оценки $\hat{\omega}_D$ с учетом (15) по определению равна

$$\sigma_{\omega_D}^2 = \left\langle \left(\frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt \right)^2 \right\rangle = \omega_D^2 + \left\langle \left(\int_0^T \phi(t) dt \right)^2 \right\rangle. \quad (16)$$

Учитывая, что $\phi(t)$ – стационарный случайный процесс, интеграл в (16) можно вычислить. Его значение, как показано в [10, с. 287], имеет вид:

$$\sigma^2(\hat{\omega}_D) = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-u) B(u) du - \langle \omega(t) \rangle^2. \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражение для функции корреляции сигнала на выходе фильтра $B(\tau)$ (6), получим

$$\sigma^2(\hat{\omega}_D) = \frac{2,306\xi\omega_D}{T} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) \right]. \quad (18)$$

Это очень интересный результат. Первый член не зависит от параметров фильтра и определяет значение дисперсии, которое она имела бы в его отсутствие. Второй член показывает, насколько уменьшится дисперсия за счет фильтра. Если полоса пропускания сглаживающего фильтра, включенного после частотного дискриминатора, как это обычно делается, будет шире высшей частоты спектра изменений скорости, т. е. $\alpha T > 1$, то относительная среднеквадратичная ошибка, как это следует из (18), будет равна

$$\frac{\sigma_{\omega}}{\omega_D} = \left(\frac{2,306\xi}{\omega_D T} \right)^{0,5}. \quad (19)$$

Если число интерференционных полос M выбрать равным 30 (т. е. $\xi = 0,015$), а $\omega_D T = 2\pi \cdot 1000$, то $\sigma_{\omega}/\omega_D = 0,23\%$. При времени осреднения, равном десяти доплеровским периодам, ошибка составит уже 2,3 %.

На рис. 1 представлена функциональная схема доплеровской системы, реализующей предложенный алгоритм оценки скорости, а на рис. 2 показаны квадратурные компоненты оцифрованного реального доплеровского сигнала и результаты оценок доплеровской частоты, полученные в эксперименте. В качестве объекта измерений использовалась боковая поверхность массивного (25 кг) металлического диска диаметром 300 мм, который вращался прецизионным приводом с фазовой стабилизацией скорости. Опорным генератором привода являлся кварцованный синтезатор частоты типа ГЗ-110. Таким образом, нестабильность средней скорости вращения привода была не хуже 10^{-6} , так как срывов слежения не наблюдалось. Для получения более надежных данных нестабильность средней скорости вращения диска проверялась с помощью стандартного прецизионного частотомера-периодомера Ч-3-41А. Результаты измерения одного периода вращения диска, получен-

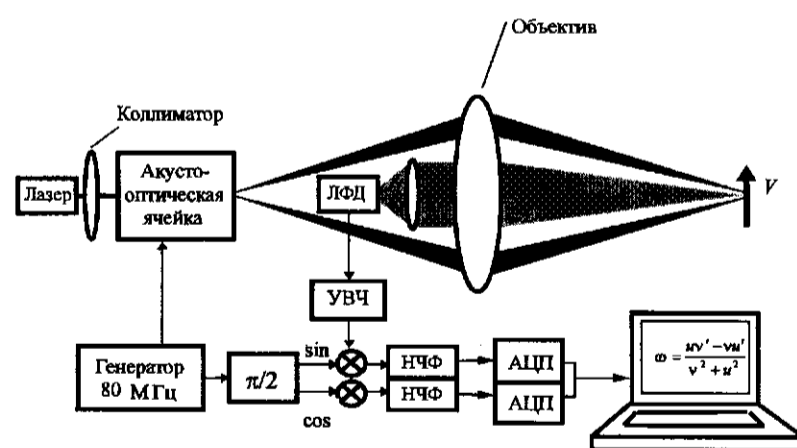


Рис. 1. Функциональная схема ЛДИС

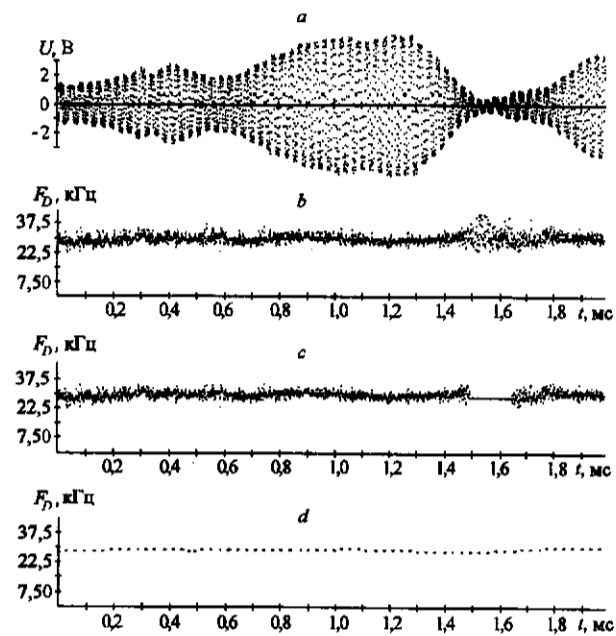


Рис. 2. Доплеровский сигнал и его мгновенная частота: *a* – синусная и косинусная компоненты доплеровского сигнала; *b* – значения мгновенной частоты; *c* – мгновенная частота с введением амплитудного порога; *d* – частота, сплаженная по 10 доплеровским периодам

ные в виде 30 отсчетов, представлены в табл. 1. Среднее значение периода составляет 552,635 мс, а относительное среднеквадратичное значение – 0,0052 %. Учитывая инерционность диска, можно предположить, что нестабильность мгновенной скорости его вращения будет составлять менее 0,01 %. Биения диска, измеренные индикатором, не превышают 20 мкм, т. е.

Таблица 1

Номер п/п	T , мс	Номер п/п	T , мс	Номер п/п	T , мс
1	552,68	11	552,63	21	552,60
2	552,69	12	552,65	22	552,60
3	552,66	13	552,66	23	552,62
4	552,60	14	552,68	24	552,65
5	552,63	15	552,61	25	552,65
6	552,62	16	552,63	26	552,62
7	552,65	17	552,61	27	552,59
8	552,67	18	552,67	28	552,61
9	552,61	19	552,68	29	552,63
10	552,61	20	552,61	30	552,63

Таблица 2

f_D , кГц	σ , %
27,69	0,121
27,76	0,05
27,77	0,06
27,76	0,04

амплитуда колебаний линейной скорости боковой поверхности также не превышает 0,01 %. Таким образом, суммарная нестабильность составит 0,014 %.

Эксперимент показал, что при доплеровской частоте 27 кГц и осреднении результатов по десяти доплеровским периодам относительная среднеквадратичная ошибка измерения скорости составляла 2,95 %, что достаточно близко к теоретической оценке, равной 2,3 %. Известно [3], что дисперсия фазового шума обратно пропорциональна амплитуде многочастичного доплеровского сигнала. Поэтому для уменьшения погрешности измерений скорости в большинстве ЛДИС вводится амплитудный порог: демодуляция подвергается только та часть сигнала, амплитуда которой превышает значение порога. Результаты введения порога представлены на рис. 2, с. После введения порога величиной 0,7 средней амплитуды доплеровского сигнала и при осреднении результатов по 1000 доплеровским периодам погрешность оценки скорости составила 0,07 %. Данные этого эксперимента сведены в табл. 2, где показаны результаты четырех серий измерений. В первой строке представлены средние величины доплеровской частоты, полученные по 1000 измеренным значениям мгновенной частоты доплеровского сигнала, а во второй строке – величины относительных среднеквадратичных отклонений, вычисленные по тем же 1000 значениям. Среднее значение и среднеквадратичное отклонение, полученные по всем четырем сериям измерений, составляют соответственно 27,745 кГц и $\sigma = 0,067$ %.

Таким образом, теоретически обоснован и экспериментально проверен алгоритм максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты (скорости) потоков, исследуемых с помощью ЛДИС, работающих в многочастичном режиме с концентрацией частиц, достаточной для того, чтобы считать доплеровский сигнал нормальным узкополосным процессом. Показано, что максимально правдоподобные оценки получаются в результате простого осреднения мгновенных значений доплеровского сдвига частоты (скорости), полученных на заданном интервале наблюдения. Показано также, что дисперсия оценки прямо пропорциональна доплеровской частоте и обратно пропорциональна времени наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко Ю. Г., Дубнищев Ю. Н., Соболев В. С. и др. Лазерные доплеровские измерители скорости. Новосибирск: Наука, 1975.
2. Дюррани Т., Грейтнд К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях. М.: Энергия, 1980.
3. Коронкевич В. П., Соболев В. С., Дубнищев Ю. Н. Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1983.
4. Ринкевичюс Б. С. Лазерная диагностика потоков. М.: Изд. МЭИ, 1990.
5. Дубнищев Ю. Н., Ринкевичюс Б. С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.
6. Sobolev V. S., Skurlatov A. I., Scherbachenko A. M. et al. New Laser Doppler Velocimeter Design for Hot Rolling Process Control // Metrology for Quality Control in Production: Proc. of the 6th ISMQC IMEKO Symp. Wien, 1998.

7. **Соболев В. С.** О спектре «фазового» шума на выходе лазерного доплеровского измерителя скорости потоков // *Автометрия*. 1974. № 6. С. 111.
8. **Тихонов В. И.** *Статистическая радиотехника*. М.: Сов. радио, 1966.
9. **Куликов Е. И.** *Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех*. М.: Сов. радио, 1969.
10. **Левин Б. Р.** *Теоретические основы статистической радиотехники*. М.: Сов. радио, 1968.

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: sobolev@okibox.iae.nsk.su*

*Поступило в редакцию
10 ноября 1999 г.*

Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!