

УДК 681.3.06

**В. Д. Борисов, Г. С. Садовой***(Новосибирск)***МЕТОД ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Обсуждаются методы фрактального анализа и системы реального времени на основе цифровых сигнальных процессоров. Области применения предлагаемых систем – исследование физических явлений, контроль и управление технологическими процессами и объектами.

**Введение.** При обработке информации цифровыми методами данные представляются в виде временных рядов. Экспериментально установлено [1, 2], что временные ряды данных, полученные при изучении систем, описываемых нелинейными эволюционными уравнениями, обладают фрактальными свойствами (самоподобие, самоаффинность, фрактальная размерность [3–7]), ранее обнаруженными при исследовании разнообразных процессов [8–10]. Для выявления фрактальных свойств разработаны специальные методы анализа [3, 4, 8, 9].

В данной работе ограничимся рассмотрением двух типов задач, решение которых требует применения методов фрактального анализа: 1) исследование физических процессов и явлений; 2) контроль и управление технологическими объектами и процессами в реальном масштабе времени [11]. При аппаратной реализации наиболее предпочтительно применение цифровых сигнальных процессоров (СП), ориентированных на выполнение в реальном масштабе времени алгоритмов обработки сигналов [12–18].

**Цели данной работы:** развитие методов фрактального анализа, разработка схемотехнических принципов построения систем реального времени на основе СП с применением методов фрактального анализа.

Рассмотрим две системы, которые могут быть применены для решения поставленных задач. Первый вариант системы приведен на рис. 1, где 1 – объект контроля и управления; 2, 3 – датчики; 4, 5 – входные масштабирующие усилители; 6 – мультиплексор; 7 – АЦП; 8 – исполнительное устройство; 9 – сигнальный процессор; 10 – персональный компьютер.

В данной системе в реальном масштабе времени работает (под управлением программы, написанной на языке Ассемблер и загружаемой по последовательному каналу во внешнюю память программ СП) внешний по отношению к РС модуль. Программа выполняет сервисные функции (выбор и подключение датчика, обмен информацией с РС и т. д.) и обработку информации по алгоритму, реализующему один из методов фрактального анализа. По результатам анализа информации от датчиков процессор формирует управляющее воздействие для исполнительного устройства, а также в памяти данных создает файл, который в фоновом режиме передается в РС по

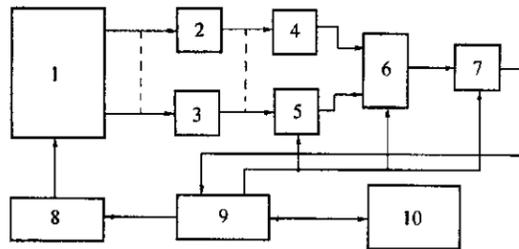


Рис. 1

последовательному каналу для дальнейшей обработки и графического отображения, а также сохранения в базе данных.

Обработка информации в РС осуществляется программой, написанной на языке С++ и работающей в операционной среде типа Windows. При таком подходе оказывается возможным широкий выбор существующих пакетов для анализа полученных данных.

Второй вариант системы приведен на рис. 2. Здесь назначение блоков 1–8 такое же, как и в предыдущем случае (см. рис. 1); 9 – периферийный СП; 10 – главный СП; 11 – шина персонального компьютера. В данной системе периферийный СП работает по жесткому алгоритму, который выполняет программу, хранящуюся во внутренней памяти СП. Этот СП принимает команды от главного СП, выполняет сервисные функции, а также сбор, предварительную обработку и передачу данных в главный СП по скоростному синхронному последовательному каналу связи. Главный СП обеспечивает обработку данных, поступивших по последовательному синхронному каналу в реальном масштабе времени. Программа обработки загружается в память процессора через шину IBM PC и выполняет алгоритм одного из методов фрактального анализа. Информация, полученная в результате обработки, поступает в РС для дальнейшего анализа и помещения в базу данных.

**Методы решения.** В настоящее время известно несколько методов фрактального анализа: метод покрытия, корреляционный метод [8, 9, 14] и метод нормированного размаха [3, 4, 16]. Рассмотрим кратко каждый из них.

**Метод покрытия.** Размерность  $D_B$ , определенная с помощью этого метода, называется «размерностью по покрытию» или «клеточной размерностью» [4].

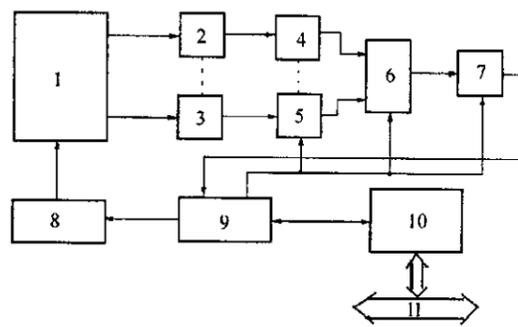


Рис. 2

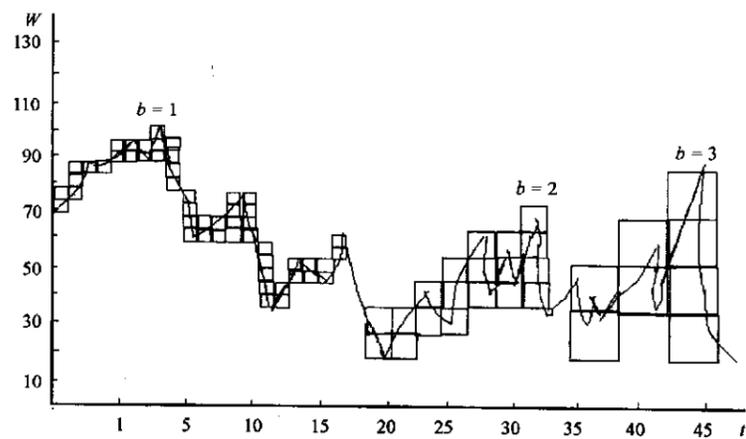


Рис. 3

В качестве примера на рис. 3 приведен график, построенный по 50 значениям чисел Вольфа [15]. Покроем график клетками шириной  $b\sigma$  вдоль оси времени и длиной  $ba$  вдоль оси  $Y$ . Тогда клеточная размерность  $D_B$  с точностью до постоянного множителя определяется выражением [4]

$$N(b, a, \sigma) \sim b^{-D_B}, \quad (1)$$

где  $N(b, a, \sigma)$  – число клеток, необходимое для покрытия кривой;  $\sigma$  – интервал времени между выборками;  $a$  – минимальный размер клетки по вертикальной оси (при  $b=1$ );  $b$  – коэффициент пропорциональности.

Размерность  $D_B$  определяется по графику зависимости  $\lg N = f(\lg b)$  на линейном участке зависимости (рис. 4):

$$D_B = -\frac{\Delta \lg N}{\Delta \lg b} = -\frac{1,5 - 2,1}{0,4} = 1,5. \quad (2)$$

**Корреляционный метод.** Пусть имеется  $N$  точек эквидистантной серии данных  $\{X_i\}_{i=1}^N$ ,  $X_i \equiv X(t_i)$ . Здесь  $t_i$  – дискретное время. Следуя [9], составим последовательность  $n$ -мерных векторов:

$$\{X(t_i), X(t_i + \tau), \dots, X(t_i + (n-1)\tau)\} \equiv \mathbf{X}_i, \quad (3)$$

где  $\tau$  – произвольный интервал времени.

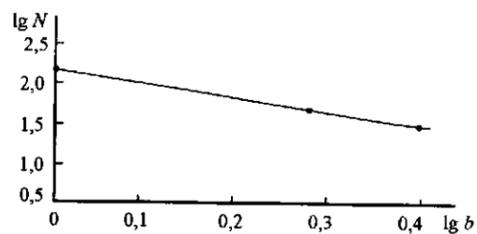


Рис. 4

Таким образом, получаем множество точек в  $n$ -мерном фазовом пространстве из исходной временной последовательности. Это множество обладает свойствами исходной серии данных (временного ряда). А именно, если  $n$  достаточно велико ( $n \geq 2D + 1$ ), где  $D$  – размерность Хаусдорфа – Безиковича, то фрактальная размерность полученной временной последовательности совпадает с фрактальной размерностью исходного временного ряда. Для последовательности  $n$ -мерных векторов вычисляется корреляционный интеграл по формуле [14]

$$C(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta(\tau - |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|), \quad (4)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хэвисайда;  $|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$  – расстояния между  $i$ -й и  $j$ -й точками полученной временной последовательности. Множество  $n$ -мерных векторов представляет собой геометрический объект размерностью  $d$ . Можно записать [9]:

$$C(\tau) \sim \tau^d, \quad (5)$$

значение  $d$  вычисляется на линейном участке зависимости  $\lg C(\tau)$  от  $\lg \tau$  (рис. 5). Из (5) получим

$$d = |\Delta \lg C(\tau)| / |\Delta \lg \tau| = |-3,06 + 2,76| / (0,6 - 0,4) = 1,5.$$

Увеличение  $n$  приводит сначала к росту размерности  $d$ , а затем достигает насыщения ( $d = d_s$ ) и дальше не изменяется. Величина  $d_s$  есть корреляционная размерность полученной последовательности  $n$ -мерных векторов и исходного временного ряда.

*Метод нормированного размаха* [3, 4, 16]. Этот метод заключается в том, что для исследуемого временного ряда вычисляется размах  $R$  как функция от запаздывания (рассматриваемого промежутка времени)  $\tau$  и времени начала этого промежутка  $t$ . Затем этот размах нормируется на стандартное среднеквадратичное отклонение  $S$ . Размах можно определить несколькими способами, обозначим каждый из них соответствующим индексом. В [3] приведе-

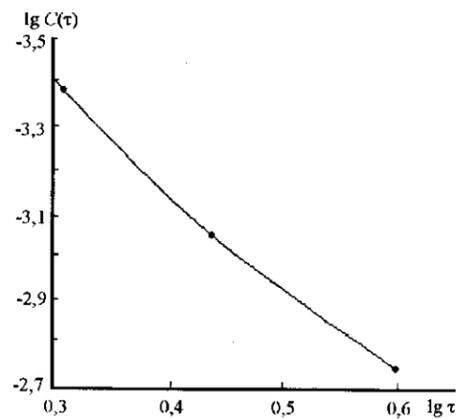


Рис. 5

на формула для вычисления накопленного размаха отклонения некоторого параметра процесса от его среднего значения:

$$R_1 = \max_{0 \leq i \leq \tau} \{X(t+i) - X(t) - (i/\tau)[X(t+\tau) - X(t)]\} - \min_{0 \leq i \leq \tau} \{X(t+i) - X(t) - (i/\tau)[X(t+\tau) - X(t)]\}. \quad (6)$$

Стандартное среднеквадратичное отклонение определяется по формуле

$$S(t, \tau) = \left\{ \frac{\sum_{u=t+1}^{t+\tau} X^2(u)}{\tau} - \left[ \frac{\sum_{u=t+1}^{t+\tau} X(u)}{\tau} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Для вычисления размаха также можно воспользоваться формулой [16]

$$R_2 = \max_{0 \leq u \leq \tau} X(t+u) - \min_{0 \leq u \leq \tau} X(t+u). \quad (8)$$

Мы предлагаем модификацию метода нормированного размаха, суть которой состоит в следующем. Размах определяем как максимальное отклонение  $X(t)$  от среднего значения  $M$  для рассматриваемого интервала времени  $\tau$ :

$$R_3 = \max_{0 \leq u \leq \tau} X(t+u) - M, \quad (9)$$

причем нормируем  $R_3$  относительно  $M$ .

Следует отметить, что  $R_1$  и  $R_3$  учитывают предысторию процесса на рассматриваемом интервале  $\tau$ , тогда как  $R_2$  учитывает лишь экстремальные значения  $X(t)$  на интервале  $\tau$ .

На практике (см., например, [19]) возникает необходимость восстановления отсчетов по известным значениям нормированного размаха. При использовании традиционных методов [1–4, 6–10] решение этой задачи, как оказалось, приводит к громоздким формулам и трудоемким вычислениям. Если же использовать предложенную выше модификацию метода нормированного размаха, то алгоритм обратного преобразования (мы его назвали обратным фрактальным преобразованием) позволяет значительно сократить объем вычислений, так как формулы весьма простые. Предложенный метод обратного фрактального преобразования позволяет по известным значениям нормированного размаха восстановить исходный временной ряд. Рассмотрим следующие варианты: а) монотонно возрастающий временной ряд, б) монотонно убывающий временной ряд, в) общий случай.

Ниже приводятся формулы для получения числового значения временного отсчета исходного временного ряда.

Вариант а):

$$X_{iA} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} [X_j((R/M)_{i-1} + 1)]}{i - (R/M)_{i-1} - 1}. \quad (10)$$

Вариант б):

$$X_{iB} = \frac{X_1(i-1 - (R/M)_{i-1}) \sum_{j=2}^{i-1} [-X_j(1 + (R/M)_{i-1})]}{1 + (R/M)_{i-1}} \quad (11)$$

Вариант в):

$$X_i = \frac{iX_{im} - \sum_{j=1}^{i-1} \{X_j[1 + (R/M)_{i-1}]\}}{1 + (R/M)_{i-1}} \quad (12)$$

Здесь и ниже предполагается, что:  $X_1$  – значение первого отсчета известно,  $X_i$  – значение  $i$ -го временного отсчета,  $X_{im}$  – максимальное значение временного отсчета, используемое при вычислении  $i$ -го значения нормированного размаха  $(R/M)_i$ .

*Модифицированный метод нормированного размаха: вывод формул, решение примеров для прямого и обратного преобразования.* Зададим исходный восходящий ряд из шести точек  $X_1, \dots, X_6$ , соответствующих шести моментам дискретного времени  $t_i$  в табл. 1, и обозначим его как ряд  $A$ .

Для данного метода размах определяется как разность максимального и среднего значений заданного ряда на исследуемом интервале времени  $\tau$  и вычисляется по формуле (9), а затем нормируется относительно среднего значения  $M$ . Результаты вычисления этим методом значений нормированного размаха для заданного интервала времени  $\tau$  сведены в табл. 2.

Для вычисления значения  $R/M$  при  $\tau = 6$  исходную последовательность дополняем седьмой точкой:  $X_7 = X_5$ .

Далее зададим аналогично нисходящий ряд из шести точек в табл. 3 и обозначим его как ряд  $B$ .

Вычисляем значения размаха по формуле (9), нормируем его на среднее значение  $M$  для заданного интервала времени  $\tau$  и результаты приводим в табл. 4.

Таблица 1		Таблица 2		Таблица 3		Таблица 4	
$X_i$	$t_i$	$R/M$	$\tau$	$X_i$	$t_i$	$R/M$	$\tau$
1	1	0,333333	1	6	1	0,090909	1
2	2	0,5	2	5	2	0,2	2
3	3	0,6	3	4	3	0,333333	3
4	4	0,666667	4	3	4	0,5	4
5	5	0,714286	5	2	5	0,714286	5
6	6	0,62	6	1	6	0,82	6

Запишем уравнения для расчета значений нормированного размаха в каждой точке:

$$(R/M)_6 = \frac{X_{m(6-1)} - \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_5}{7}}{\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_5}{7}}, \quad (13)$$

$$(R/M)_5 = \frac{X_{m(6-1)} - \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{6}}{\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{6}}, \quad (14)$$

$$(R/M)_4 = \frac{X_{m(5-1)} - \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}}{\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}}, \quad (15)$$

$$(R/M)_3 = \frac{X_{m(4-1)} - \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}}{\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}}, \quad (16)$$

$$(R/M)_2 = \frac{X_{m(3-1)} - \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}}{\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}}, \quad (17)$$

$$(R/M)_1 = \frac{X_{m(2-1)} - \frac{X_1 + X_2}{2}}{\frac{X_1 + X_2}{2}}, \quad (18)$$

$$(R/M)_0 = 0.$$

Общее уравнение для любой точки:

$$(R/M)_i = \frac{X_{m_i} - \frac{\sum_{j=1}^{i+1} X_j}{i+1}}{\frac{\sum_{j=1}^{i+1} X_j}{i+1}}, \quad (19)$$

где  $i$  – номер точки;  $X_{m_i}$  – максимальное значение исходной последовательности для интервала, включающего  $i$ -ю точку.

Будем считать известными также значения первого отсчета  $X_1$  и максимального отсчета на рассматриваемом интервале  $X_m$ .

*Вывод формул обратного преобразования для частных случаев.*

**Ряд А.** Возьмем за исходную формулу (18), здесь только одно неизвестное –  $X_2$ . Так как ряд возрастающий, то последний отсчет ряда на рассматриваемом интервале будет иметь максимальное значение. Из этой формулы находим неизвестное:

$$X_{2A} = \frac{X_1((R/M)_1 + 1)}{1 - (R/M)_1}. \quad (20)$$

Аналогично из формулы (17) получим

$$X_{3A} = \frac{X_1((R/M)_2 + 1) + X_2((R/M)_2 + 1)}{2 - (R/M)_2}. \quad (21)$$

Отсюда получаем общую формулу для вычисления значений исходного ряда А:

$$X_{NA} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} X_i((R/M)_{N-1} + 1)}{N - 1 - (R/M)_{N-1}}. \quad (22)$$

**Ряд В.** В этом случае аналогично предыдущему берем за исходную формулу (18). Так как ряд нисходящий, то максимальное значение будет иметь первый отсчет  $X_1 = X_m$ . Получаем

$$X_{2B} = \frac{X_1(1 - (R/M)_1)}{1 + (R/M)_1}. \quad (23)$$

Из (17) находим неизвестное значение

$$X_{3B} = \frac{X_1(2 - (R/M)_2) - X_2(1 + (R/M)_2)}{1 + (R/M)_2}. \quad (24)$$

Из этих формул получаем общую формулу для вычисления значений исходного ряда (случай В):

$$X_{NB} = \frac{X_1(N - 1 - (R/M)_{N-1}) - \sum_{i=2}^{N-1} X_i(1 + (R/M)_{N-1})}{1 + (R/M)_{N-1}}. \quad (25)$$

**Восстановление точек исходного ряда посредством обратного преобразования.** Воспользуемся данными табл. 2 и формулой (22), значение первого отсчета  $X_{1A}$  считаем известным и равным 1 (случай А). Получаем

$$X_{2A} = \frac{X_{1A}[(R/M)_{1A} + 1]}{2 - 1 - (R/M)_{1A}} = \frac{0,333333 + 1}{1 - 0,333333} = 2,$$

$$X_{3A} = \frac{X_{1A}[(R/M)_{2A} + 1] + X_{2A}[(R/M)_{2A} + 1]}{3 - 1 - (R/M)_{2A}} = \frac{1(0,5 + 1) + 2(0,5 + 1)}{3 - 1 - 0,5} = 3,$$

$$\begin{aligned} X_{4A} &= \frac{X_{1A}[(R/M)_{3A} + 1] + X_{2A}[(R/M)_{3A} + 1] + X_{3A}[(R/M)_{3A} + 1]}{4 - 1 - (R/M)_{3A}} = \\ &= \frac{1(0,6 + 1) + 2(0,6 + 1) + 3(0,6 + 1)}{(5 - 1 - 0,666666)^{-1} \{1(0,666666 + 1) + 2(0,666666 + 1) + \\ &+ 3(0,666666 + 1) + 4(0,666666 + 1)\}} = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{6A} &= (6 - 1 - (R/M)_{5A})^{-1} \{X_{1A}[(R/M)_{5A} + 1] + X_{2A}[(R/M)_{5A} + 1] + \\ &+ X_{3A}[(R/M)_{5A} + 1] + X_{4A}[(R/M)_{5A} + 1] + X_{5A}[(R/M)_{5A} + 1]\} = \\ &= (6 - 1 - 0,714286)^{-1} \{1(0,714286 + 1) + 2(0,714286 + 1) + \\ &+ 3(0,714286 + 1) + 4(0,714286 + 1) + 5(0,714286 + 1)\} = 6. \end{aligned}$$

*Вывод формул обратного преобразования в общем случае. Возьмем формулу (18) в качестве исходной и найдем неизвестное значение*

$$X_2 = \frac{2X_{2m} - X_{1m}[(R/M)_1 + 1]}{(R/M)_1 + 1}. \quad (26)$$

Затем из (17) находим

$$X_3 = \frac{3X_{3m} - X_{1m}[(R/M)_2 + 1] - X_2[(R/M)_2 + 1]}{(R/M)_2 + 1}. \quad (27)$$

После этого запишем в общем виде

$$X_i = \frac{iX_{im} - \sum_{j=1}^{i-1} X_j[(R/M)_{j-1} + 1]}{(R/M)_{i-1} + 1}. \quad (28)$$

**Заключение.** В работе получены следующие результаты.

Предложены структурные схемы систем реального времени, выполненных на основе цифровых сигнальных процессоров и обеспечивающих обработку сигналов методами фрактального анализа.

Разработана модификация метода нормированного размаха.

Обоснован метод обратного фрактального преобразования и получены соответствующие формулы.

Показано, что значения фрактальной размерности, полученные методом покрытия (см. рис. 4) и корреляционным методом (см. рис. 5), совпадают.

Оба значения согласуются с размерностью, рассчитанной методом нормированного размаха в предыдущей работе авторов [16].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. 45, N 9. P. 712.
2. Broomhead D. S., Jones R. Time-series analysis // Proc. R. Soc. Lond. 1989. A423. P. 103.
3. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resources Research. 1969. 5, N 2. P. 321.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
5. Колмогоров А. И. Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // ДАН СССР. 1940. 26, № 1. С. 6; Колмогоров А. И. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве // Там же. № 2. С. 115.
6. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman and Company, 1983.
7. Mandelbrot B. B. Fractal geometry: what is it and what is does it do? // Proc. R. Soc. Lond. 1989. A423. P. 3.
8. Остряков В. М., Усоскин И. Г. Солнце как странный аттрактор // Космическое излучение высокой энергии / Под ред. Г. Е. Кочарова. Л.: ФТИ, 1989. С. 120.
9. Блинов А. В., Кремлевский М. И. Фрактальный аттрактор временных рядов радионуклидных данных // Там же. С. 6.
10. Мандельброт Б. Фракталы и турбулентность: аттракторы и разброс // Математика: новое в зарубежной науке. Вып. 22: Странные аттракторы / Под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 47.
11. Кошечев Л. А., Руденко Ю. Н., Ставровский Е. Р. и др. Режимная управляемость систем энергетики. Новосибирск: Наука, 1988.
12. TMS320C5x. User's Guide: Texas Instruments, 1997.
13. Корсаков А. Н. Использование цифровых сигнальных процессоров в системах многоканального мониторинга физиологических параметров // Автометрия. 1996. № 6. С. 75.
14. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
15. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
16. Садовой Г. С., Борисов В. Д. Фрактальный анализ временных рядов // Труды IV Междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Т. 11. Секция: Моделирование и вычислительная техника. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. С. 33.
17. Вяткин С. И., Гимаутдинов О. Ю., Долговесов Б. С. и др. Архитектурные особенности системы визуализации реального времени на основе сигнальных процессоров // Автометрия. 1999. № 1. С. 110.
18. Borisov V. D., Sadovoi G. S., Trubin V. G. About applications of the digital signal processors in the systems of the real time // Abstracts KORUS'99. The Third Russian-Korean International Symposium on Science and Technology (June 22–25, 1999, Novosibirsk). Novosibirsk: State Technical University, 1999. Vol. 2. P. 712.
19. Анализ фрактальных свойств материалов // Фракталы в физике: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. С. 62.

Новосибирский государственный  
технический университет,  
E-mail: sadovoi@ref.nstu.ru

Поступила в редакцию  
21 октября 1999 г.