РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 6 2000

УДК 681.5.015

И. В. Бурлай

(Ростов-на-Дону)

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ, УСТОЙЧИВЫХ К СЛУЧАЙНЫМ И СИНГУЛЯРНЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Решена задача синтеза цифровых дифференцирующих фильтров для случая, когда входной сигнал аппроксимируется функцией с финитным спектром, а наблюдаемая реализация содержит помимо случайных и сингулярные ошибки измерений. Дан иллюстративный пример.

При синтезе широкого класса измерительных информационных систем часто возникает задача определения высших производных входного воздействия [1–4]. Иногда эти производные можно непосредственно измерять, но значительно чаще наблюдателю доступен только сам полезный сигнал, измеряемый приборами (датчиками) различного принципа действия. В таких случаях по наблюдаемым значениям входного сигнала необходимо восстановить его производные N-го порядка. Данная задача существенно усложняется, если результаты реальных измерений содержат помимо случайных и сингулярные (например, постоянные или медленноменяющиеся) ошибки.

В работах [5, 6] с использованием интерполяционной формулы Котельникова предложен новый подход к синтезу цифровых дифференцирующих фильтров, получены оценки сверху для соответствующих погрешностей вычислений, обусловленные усечением исходного информационного процесса в пространственной и частотной областях. Однако полученные в [5, 6] оценки не являются оптимальными и требуют дальнейшей статистической обработки. Кроме того, в этих работах не рассмотрены вопросы устойчивости приведенных решений к сингулярным ошибкам измерений. С учетом вышеизложенного вполне правомерно поставить вопрос о развитии полученных ранее результатов и разработке универсального метода синтеза цифровых дифференцирующих фильтров, позволяющих формировать несмещенные оценки соответствующих производных, устойчивые к сингулярным ошибкам измерений. Требование устойчивости алгоритмов обработки наблюдений к постоянным и медленноменяющимся ошибкам является принципиально важным, поскольку наличие последних практически полностью обесценивает получаемые результаты и приводит к невозможности достоверной интерпретации измерительного эксперимента [1–4]. Решению вышеперечисленного круга задач посвящена настоящая работа.

Постановка задачи. Представим входной сигнал $f(t)$ в виде конечного ряда Котельникова [7]:

$$f(t)=f^{T}c(t)=c^{T}(t)f = \sum_{m=-M}^{M} f_m \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t-m\Delta t)\right], \quad t\in[-T,T], \tag{1}$$

где $f=[f_m,\ m=-M,\dots,0,\dots,M]^T$ – вектор неизвестных отсчетов функции $f(t)$, $f_m=f(m\Delta t)$, $m\Delta t\in[-T,T]$, $\Delta t>0$, $c(t)=[c_m(t),\ m=-M,\dots,0,\dots,M]^T=$ $=\left[\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t-m\Delta t)\right],\ m=-M,\dots,0,\dots,M\right]^T$, $\operatorname{sinc}[x]=\sin[x]/[x]$. Здесь и далее все информационные процессы рассматриваются на симметричном интервале времени, что, не ограничивая общности рассуждений, позволяет сделать последующие выкладки более компактными.

На отрезке $[-T,T]$ рассмотрим следующую модель измерений:

$$h(t_i)=f(t_i)+s(t_i)+\Delta h(t_i), \quad i=-I,\dots,0,\dots,I,\ I>M, \tag{2}$$

где $s(t_i)$ и $\Delta h(t_i)$ – соответственно отсчеты сингулярной $s(t)$ и случайной $\Delta h(t)$ ошибок в точке $t_i\in[-T,T]$.

Для описания сингулярной ошибки $s(t)$ воспользуемся моделью

$$s(t)=b^T\theta(t)=\theta^T(t)b=\sum_{q=0}^{Q} b_q\theta_q(t), \quad t\in[-T,T], \tag{3}$$

где $b=[b_q,\ q=0,1,\dots,Q]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов; $\theta(t)=$ $=[\theta_q(t),\ q=0,1,\dots,Q]^T$ – вектор линейно независимых функций.

В дальнейшем помимо (2) нам потребуется следующая векторная форма уравнения измерений:

$$H=F+S+\Delta H, \tag{4}$$

где $H=[h(t_i),\ i=-I,\dots,0,\dots,I]^T$, $F=[f(t_i),\ i=-I,\dots,0,\dots,I]^T$, $S=[s(t_i),$ $i=-I,\dots,0,\dots,I]^T$, $\Delta H=[\Delta h(t_i),\ i=-I,\dots,0,\dots,I]^T$. Считаем, что случайный вектор ΔH характеризуется нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей K_H.

Введем следующий оператор N-кратного дифференцирования $L^{(N)}\{\cdot\}$, применяемый к реализациям $f(t)$ вида (1): $L^{(N)}\{f(t)\}=[l_n\{f(t)\},$ $n=0,1,\dots,N]^T=f^{(N)}=[f^{(n)}(0), n=0,1,\dots,N]^T$, где $f^{(n)}(0)=d^nf(t)/dt^n\big|_{t=0}$, $f^{(0)}(0)=f(0)$, т. е. рассматривается вопрос, связанный с вычислением сглаженного значения входного сигнала $f(t)$ и его производных до N-го порядка включительно в центральной точке интервала $[-T,T]$. Искомый оптимальный оператор N-кратного дифференцирования $L^{*(N)}\{H\}=[l_n^*\{H\},$ $n=0,1,\dots,N]^T$, значения которого близки (в смысле определяемого ниже критерия оптимальности) к значениям $L^{(N)}\{f(t)\}$, будем искать в виде

$$\hat{f}^{(N)}=L^{*(N)}\{H\}=P^{(N)}H, \tag{5}$$

где $\hat{f}^{(N)} = [\hat{f}^{(n)}(0), n = 0,1,\ldots,N]^T$ – вектор оценок искомых производных; $P^{(N)} = [p_{ni}, n = 0,1,\ldots,N;\ i = -I,\ldots,0,\ldots,I]$ – матрица неизвестных весовых коэффициентов цифрового фильтра.

В дальнейшем полагаем, что составная матрица $[C, \Theta]$, где $C = [c_{im},\ i = -I,\ldots,0,\ldots,I;\ m = -M,\ldots,0,\ldots,M] = [c_m(t_i),\ i = -I,\ldots,0,\ldots,I;\ m = -M,\ldots\ldots,0,\ldots,M]$ и $\Theta = [\theta_{iq},\ i = -I,\ldots,0,\ldots,I;\ q = 0,1,\ldots,Q] = [\theta_q(t_i),\ i = -I,\ldots,0,\ldots\ldots,I;\ q = 0,1,\ldots,Q]$ имеет ранг, равный $2(M+1)+Q<2I+1$, т. е. поставленная выше задача наблюдаема.

Корреляционная матрица оценки (5) для принятой модели случайного вектора ΔH находится по правилу

$$K_L^{(N)} = P^{(N)} K_H [P^{(N)}]^T. \tag{6}$$

Требуется найти вид матрицы $P^{(N)}$ оператора $L^{*(N)}\{\cdot\}$, которая обеспечивает минимизацию следа матрицы $K_L^{(N)}$ (т. е. величины $\operatorname{tr}(K_L^{(N)}) = \sum_{n=0}^{N} \sigma_{l_n}^2$, где $\{\sigma_{l_n}^2\}_{n=0}^{N}$ – диагональные члены матрицы $K_L^{(N)}$), а также выполнение условия несмещенности оценки значений линейного оператора $L^{(N)}\{\cdot\}$

$$L^{*(N)}\{F\} - L^{(N)}\{f(t)\} = [0]_{(N+1)\times 1} \tag{7}$$

и условия инвариантности оператора $L^{*(N)}\{\cdot\}$ по отношению к сингулярным ошибкам измерений

$$L^{*(N)}\{S\} = [0]_{(N+1)\times 1}, \tag{8}$$

где $[0]_{(N+1)\times 1}$ – нулевой вектор-столбец размерности $N+1$.

Ставится также задача проанализировать влияние неадекватности модели (1) на результаты оптимального дифференцирования входного сигнала.

Решение задачи синтеза. С учетом (1), (5) и (7) имеем

$$L^{*(N)}\{F\} = L^{(N)}\{f(t)\} = L^{(N)}\{c^T(t)f\} = L^{(N)}\{f^T c(t)\} = P^{(N)}F = P^{(N)}Cf, \tag{9}$$

откуда вытекает следующее условие несмещенности:

$$L^{(N)}\{c^T(t)\} - P^{(N)}C = [0]_{(N+1)\times(2M+1)}, \tag{10}$$

где $[0]_{(N+1)\times(2M+1)}$ – нулевая матрица размерности $(N+1)\times(2M+1)$, $L^{(N)}\{c^T(t)\} = [l_n\{c_m(t)\},\ n = 0,1,\ldots,N;\ m = -M,\ldots,0,\ldots,M]$.

Для элементов матрицы $L^{(N)}\{c^T(t)\}$ с учетом [5] справедливы следующие представления:

для $n = 0$

$$l_0\{c_m(t)\} = \left.\frac{d^0}{dt^0} c_m(t)\right|_{t=0} = c_m(t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & m \neq 0; \\ 1, & m = 0; \end{cases} \tag{11}$$

для $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$l_n\{c_m(t)\} = \frac{d^n}{dt^n} c_m(t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{[n/2]} \dfrac{n!\pi^{2j}(-1)^{j-m}}{(\Delta t)^n (2j+1)!(-m)^{n-2j}}, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0; \end{cases} \qquad (12)$$

для $n = 2, 4, 6, \ldots$

$$l_n\{c_m(t)\} = \frac{d^n}{dt^n} c_m(t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n/2-1} \dfrac{n!\pi^{2j}(-1)^{j-m+1}}{(\Delta t)^n (2j+1)! m^{n-2j}}, & m \neq 0; \\ \dfrac{\pi^n (-1)^{n/2}}{(\Delta t)^n (n+1)}, & m = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$.

Принимая во внимание (8), получим

$$L^{*(N)}\{S\} = L^{*(N)}\{\Theta b\} = P^{(N)}\Theta b = [0]_{(N+1)\times 1}, \qquad (14)$$

откуда вытекает следующее условие инвариантности:

$$P^{(N)}\Theta = [0]_{(N+1)\times(2M+1)}. \qquad (15)$$

В дальнейшем предполагается, что система уравнений (10), (15) совместна, и, кроме того, воспользуемся следующими обозначениями: $\Phi_{\Theta\Theta} = \Theta^T K_H^{-1}\Theta$, $\Gamma_\Theta = K_H^{-1}\Theta$, $\Gamma_C = K_H^{-1}C$, $\Psi_{\Theta\Theta} = E_{(2I+1)\times(2I+1)} - \Gamma_\Theta \Phi_{\Theta\Theta}^{-1}\Theta^T$, где $E_{(2I+1)\times(2I+1)}$ – единичная матрица размерности $(2I+1)\times(2I+1)$.

Задача нахождения искомой матрицы $P^{(N)}$ решена методом множителей Лагранжа путем минимизации следа матрицы $K_L^{(N)}$ с учетом ограничений (10) и (15). Опуская громоздкие выкладки, сразу приведем конечный результат:

$$P^{(N)} = [\Psi_{\Theta\Theta}\Gamma_C (C^T \Psi_{\Theta\Theta}\Gamma_C)^{-1} L^{(N)}\{c(t)\}]^T, \qquad (16)$$

где $L^{(N)}\{c(t)\} = [l_n\{c_m(t)\},\ m = -M, \ldots, 0, \ldots, M;\ n = 0, 1, \ldots, N]$.

С учетом (16) для оптимальной оценки $L^{*(N)}\{H\} = P^{(N)}H$ минимальный след матрицы $K_L^{(N)}$ находится по правилу

$$\mathrm{tr}(K_L^{(N)}) = \sum_{n=0}^{N} \sigma_{l_n}^2. \qquad (17)$$

Здесь

$$\sigma_{l_n}^2 = l_n\{c^T(t)\}(\Gamma_C^T \Psi_{\Theta\Theta}^T C)^{-1} \Xi_{C\Theta} (C^T \Psi_{\Theta\Theta}\Gamma_C)^{-1} l_n\{c(t)\}, \qquad (18)$$

$$\Xi_{C\Theta} = \Gamma_C^T \Psi_{\Theta\Theta}^T K_H \Psi_{\Theta\Theta}\Gamma_C. \qquad (19)$$

Соотношения (9)–(19) составляют математическую основу развитого регулярного метода синтеза цифровых дифференцирующих фильтров при наличии в наблюдениях как случайных, так и сингулярных ошибок.

Анализ эффективности метода. Дадим теперь оценку методической погрешности оптимального фильтра, которая обусловлена неадекватностью принятой математической модели (1). Пусть истинный входной сигнал $f_\infty(t)$ имеет следующее аналитическое представление:

$$f_\infty(t) = f(t) + \Delta f(t) = \sum_{m=-M}^{M} f_m \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t - m\Delta t)\right] +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{-M+1} f_m \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t - m\Delta t)\right] + \sum_{m=M+1}^{\infty} f_m \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t - m\Delta t)\right], \tag{20}$$

при этом функцию $f_\infty(t)$ считаем интегрируемой в квадрате на всей вещественной оси, для которой [7]

$$f_\infty(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F_\infty(i\omega)\exp(i\omega t)d\omega,$$

где $F_\infty(i\omega) = 0$ при $|\omega| \geq \Omega$, $F_\infty(i\omega) \neq 0$ при $|\omega| < \Omega$.

Пусть для функции $f_\infty(t)$ выполняются следующие ограничения [6, 7]:

$$|f_\infty(t)| < \frac{c}{2|t|^\alpha}, \quad c > 0, \ \alpha > 1, \ |t| > T. \tag{21}$$

Введем меру отклонения функций $f^{(N)}(t)$ и $f_\infty^{(N)}(t)$ в точке $t = 0$:

$$\mu_{(N)} = |f_\infty^{(N)}(0) - f^{(N)}(0)|. \tag{22}$$

Для погрешности N-кратного дифференцирования, обусловленной усечением ряда Котельникова функции $f_\infty(t)$ в пространственной области (т. е. перехода от $f_\infty(t)$ к $f(t)$), с учетом (21), (22) справедлива оценка [6]

$$\mu_{(N)} < \frac{2cN!}{(\alpha-1)M^{\alpha-1}\Delta t^{N+\alpha}}\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\theta_{(N)}\right), \tag{23}$$

где $\theta_{(N)} = 0 \ \forall \ N < 3, \theta_{(N)} = 1 \ \forall \ N \geq 3$.

Допустим теперь, что истинный входной сигнал $\varphi(t)$ в отличие от (20) не является функцией с финитным спектром, однако при этом считаем $\varphi(t)$ произвольной функцией, у которой $(N-1)$-я производная $\varphi^{(N-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $\varphi^{(j)}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $j = 0, 1, \ldots, N$. Для спектральной плотности $F_\varphi(i\omega)$ функции $\varphi(t)$ введем следующее ограничение [6, 7]:

$$|F_\varphi(i\omega)| < \frac{q}{2|\omega|^\beta}, \quad q > 0, \ \beta > 1, \ |\omega| > \Omega. \tag{24}$$

По аналогии с [6] можно показать, что отклонение функций $\varphi^{(N)}(t)$ и $f^{(N)}(t)$ в точке $t=0$ при выполнении условия (24) удовлетворяет неравенству

$$|\varphi^{(N)}(0) - f_{\infty}^{(N)}(0)| < \frac{2q\Omega^{N-\beta+1}}{\pi(N+1)} \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-\beta}. \qquad (25)$$

Результирующая методическая погрешность дифференцирующего фильтра может быть определена на базе соотношений (23), (25) с использованием правила треугольника [7].

Тестовый пример. В качестве тестового примера рассмотрим случай, когда в формулах (1)–(4): $N=M=1,\ Q=2,\ T=1,\ c_{-1}(t)=\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t+\Delta t)\right]$, $c_0(t)=\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}t\right], c_1(t)=\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t-\Delta t)\right]$ и $\theta_0(t)=t, \theta_1(t)=t^2,\ \theta_2(t)=t^3;\ s(t)=$ $=b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3;\ t\in[-1,1]$.

Принимая $I=4, t_i=0{,}25i,\ \Delta t=1$, с учетом (2) имеем

$$h(t_i) = f_{-1}\operatorname{sinc}[\pi(0{,}25i+1)] + f_0\operatorname{sinc}[\pi(0{,}25i)] + f_1\operatorname{sinc}[\pi(0{,}25i-1)] +$$
$$+ b_0(0{,}25i) + b_1(0{,}25i)^2 + b_2(0{,}25i)^3 + \Delta h(0{,}25i), \quad i=-4,\dots,0,\dots,4.$$

Поскольку $N=1$, в данном случае рассматривается задача оценивания сглаженного значения сигнала $f(t)$ и его первой производной $f^{(1)}(t)$ в средней точке $t=0$ интервала измерений $[-1, 1]$. При моделировании вектор случайных ошибок измерений ΔH полагался распределенным по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $K_H = \sigma_0^2 E_{(2I+1)\times(2I+1)}$, где σ_0^2 – заданная положительная константа.

Искомая матрица весовых коэффициентов фильтра $P^{(1)}$ выглядит так (все результаты округлены до третьего знака после запятой):

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}041 & -0{,}131 & 0{,}052 & 0{,}319 & 0{,}439 & 0{,}319 & 0{,}052 & -0{,}131 & 0{,}041 \\ -9{,}988 & 27{,}330 & -9{,}435 & -23{,}165 & 0 & 23{,}165 & 9{,}435 & -27{,}330 & 9{,}988 \end{bmatrix}.$$

С учетом (6), (18) и принятых исходных данных имеем $\sigma_{l_0}^2 = 4{,}385\cdot 10^{-5}$, $\sigma_{l_1}^2 = 2{,}941\cdot 10^{-3}$ (для $\sigma_0 = 10^{-2}$).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда для заданного интервала измерений $[-1, 1]$ число I – произвольное число натурального ряда, т. е. $t_i = i/I,\ i=-I,\dots,0,\dots,I$. Примем также $f_{-1}=f_0=f_1=1, b_0=3, b_1=8, b_2=1$.

Для моделирования на ЭВМ случайных ошибок измерений $\Delta H=[\Delta h(t_i),\ i=-I,\dots,0,\dots,I]^T$ использовался датчик случайных чисел, генерирующий квазислучайную последовательность с нормальным распределением, характеризующимся нулевым математическим ожиданием и соответствующей дисперсией σ_0^2.

Результаты моделирования отображены в виде таблицы, показывающей зависимость результирующих оптимальных оценок $f^{*(0)}(0)=f^*(0)$ и $f^{*(1)}(0)$, а также евклидовой нормы вектора сингулярной ошибки $\|S\|$ от числа I для

l	$\|s\|$	$\sigma_0 = 10^{-1}$		$\sigma_0 = 10^{-2}$	
		$f^{*(0)}(0)$	$f^{*(1)}(0)$	$f^{*(0)}(0)$	$f^{*(1)}(0)$
4	15,157	1,226	0,684	0,989	0,208
10	20,686	1,124	0,314	0,996	0,189
20	27,717	1,032	0,263	0,998	0,121
30	33,321	1,021	0,097	0,999	0,016
40	38,114	1,007	0,028	1,000	0,009
50	42,371	1,000	0,007	1,000	0

$\sigma_0 = 10^{-2}$ и $\sigma_0 = 10^{-1}$ соответственно. При этом указанные оценки формировались путем усреднения единичных оценок величин $\hat{f}^{(0)}(0)$ и $\hat{f}^{(1)}(0)$, полученных на основе 50 реализаций, генерируемых датчиком случайных чисел.

Анализ результатов моделирования показывает инвариантность получаемых оценок по отношению к сингулярным погрешностям (в условиях отсутствия случайных погрешностей результаты расчетов совпадают с точными значениями $f^{(0)}(0) = 1, f^{(1)}(0) = 0$) и высокую степень устойчивости к случайным возмущениям.

Основное достоинство предложенного подхода состоит в том, что в отличие от абсолютного большинства известных методов [1–3] в данном случае не требуется расширения пространства состояний при построении оптимальных фильтров, обладающих свойством внутренней инвариантности по отношению к сингулярным погрешностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цапенко М. П.** Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. **Бесекерский В. А.** Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.
3. **Бурлай И. В.** Параметрическая идентификация управляемых систем на базе расширенной модели наблюдений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 29.
4. **Ефимов В. М., Золотухин Ю. Н., Колесников А. Н.** Оценка эффективности некоторых алгоритмов сокращения избыточности информации при абсолютной точности воспроизведения // Автометрия. 1991. № 6. С. 93.
5. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Синтез цифровых дифференцирующих фильтров с использованием сплайн-продолжений // Изв. вузов. Приборостроение. 1993. № 11–12. С. 35.
6. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Вопросы интерполяции, аппроксимации и дифференцирования в классе функций с финитным спектром // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. 37, № 9. С. 1034.
7. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 17 мая 1999 г.