

УДК 621.391

Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, С. В. Гангнус

(Саратов)

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ
В ЛАЗЕРНОЙ ГОМОДИННОЙ СИСТЕМЕ**

Показано, что задача определения амплитуд механических колебаний сложного периодического движения в оптической гомодинной интерферометрии является некорректной. Рассмотрена возможность ее приближенного решения с использованием метода наименьших квадратов. Приведен пример реализации данного метода для восстановления спектра сложных колебаний механических систем.

Широкое применение лазерных гомодинных интерференционных систем для контроля параметров движения различных объектов связано со сравнительной простотой реализации измерений, обусловленной использованием одного источника когерентного излучения [1]. Большинство из созданных способов дешифровки интерференционного сигнала с целью определения параметров движения ограничиваются рассмотрением случая гармонических колебаний объекта на одной частоте [2, 3]. На практике колебания объектов часто имеют более сложный характер.

Непосредственное определение параметров движения невозможно, поскольку наиболее полную информацию о вибросмещении исследуемого объекта несет фаза получаемого сигнала, а не его мгновенные значения. Действительно, осциллирующая часть $u_0(t)$ выходного сигнала виброметра имеет вид:

$$u_0(t) = A \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} f(t) + \theta \right], \quad (1)$$

где A – постоянная амплитуда; θ – постоянный набег фазы в интерферометре; t – текущее время; λ – длина волны лазера; $f(t)$ – интересующая нас функция, равная продольному смещению исследуемого объекта.

В работе [4] предложено определять функцию $f(t)$ по нормированной переменной составляющей интерференционного сигнала $u_0(t)$

$$\frac{u_0(t)}{A} = \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} f + \theta \right), \quad (2)$$

с помощью обратной функции, т. е.

$$\theta + 4\pi f(t) = \pm \arccos u_0(t) + 2\pi n, \quad (3)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Однако в реальной измерительной системе регистрируется не точное значение $u_0(t)$, а некоторое его приближенное значение $u(t)$. Тогда может оказаться, что уравнение (2) с приближенной правой частью не будет иметь решения, определяемого соотношением (3), так как экспериментальный сигнал $u(t)$ может не принадлежать области определения функции \arccos . Кроме того, при реализации данной методики необходимо сделать первоначальное предположение о значении n , а затем скорректировать его, например, по характеру поведения функции $u_0(t)$ в окрестности экстремальных значений (± 1).

В другом способе определения амплитуд механических колебаний [5], кроме значения интерференционного сигнала, используется еще производная от него. При реализации данного способа предъявляются повышенные требования к точности определения величины интерференционного сигнала, в частности, к допустимому значению уровня шума, так как шумовые всплески могут вызвать значительное изменение продифференцированного сигнала. Для сглаживания шума в этом случае необходимо осуществлять дополнительную фильтрацию исходного сигнала.

Оба способа не являются устойчивыми в том смысле, что малым изменениям регистрируемых данных не всегда соответствуют малые изменения решения [6]. Легко показать, что решение, поиск которого осуществляется с использованием формулы (3), не является устойчивым, так как

$$\Delta z \sim \frac{\Delta u}{\sqrt{1 - u_0^2(t)}}, \quad (4)$$

и при $u \rightarrow 1$ получается, что $\Delta z \rightarrow \infty$. Аналогичная ситуация наблюдается в случае определения амплитуд механических колебаний объекта с использованием производной интерференционного сигнала.

Таким образом, оба способа оценки параметров движения исследуемого объекта приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач. Решение такого рода задач может быть осуществлено, если воспользоваться методикой поиска приближенного решения, изложенной в [6]. Пусть нам вместо точной правой части выражения (1) известно ее приближенное значение $u(t)$, такое, что для всего интервала наблюдения $t \in [0, T]$ выполняется неравенство $0 < (u_0(t) - u(t))^2 \leq \delta$. Зададим интерференционный сигнал в виде $\cos z(t)$, где $z(t)$ – функция, являющаяся искомым приближенным решением. В качестве возможных приближенных решений будем брать такие функции $z(t)$, чтобы на всем интервале времени наблюдения выполнялось условие

$$(\cos z(t) - u(t))^2 \leq \delta. \quad (5)$$

Очевидно, что при $\delta \rightarrow 0$ получаем $z(t) \rightarrow z_0(t)$.

Предположим, что объект совершает сложное периодическое движение вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)], \quad (6)$$

где A_k и B_k – амплитуды механических колебаний; ω_0 – основная частота колебаний отражателя; k – номер гармоники. В этом случае приближенное решение $z(t)$ будем искать в виде

$$z(t) = \theta + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)], \quad (7)$$

где амплитуды сложного периодического колебания можно вычислить по формулам

$$A_k = \frac{\lambda}{4\pi} a_k, \quad B_k = \frac{\lambda}{4\pi} b_k. \quad (8)$$

В общем случае приближенных решений может быть много. Поэтому необходимо предложить принцип отбора решения. В его основу можно положить операцию достижения минимального значения разности, стоящей в левой части неравенства (5), на всем интервале наблюдения $t \in [0, T]$. Для этого введем в рассмотрение функционал

$$F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k) = \int_0^T (\cos z(t, \theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k) - u(t))^2 dt. \quad (9)$$

Задача нахождения приближенного решения сведется к минимизации значения функционала (9) по неизвестным параметрам $\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k$, которой можно достичь с помощью численных методов. Для этого воспользуемся условием минимума функционала $F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial b_k} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение данной системы можно осуществить, например, методом спуска по координатам [7], что позволит найти интересующие значения $\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k$.

Для решения системы уравнений (10) необходимо вычислить значения левых частей уравнений системы, являющиеся производными функционала $F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)$. Рассмотрим, например, левые части двух первых уравнений:

$$\frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial \theta} = 2 \int_0^T \left\{ \cos \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] - u(t) \right\} \times$$

$$\times \sin \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] dt = 2 \int_0^T \Phi(t) dt, \quad (11)$$

$$\frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial a_1} = 2 \int_0^T \left\{ \cos \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] - u(t) \right\} \times \\ \times \sin \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] \cos \omega_0 t dt = 2 \int_0^T \Phi(t) \cos \omega_0 t dt, \quad (12)$$

где

$$\Phi(t) = \left\{ \cos \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] - u(t) \right\} \times \\ \times \sin \left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right]. \quad (13)$$

Аналогичную структуру имеют и другие уравнения системы (10). Производные функционала с точностью до множителя $1/T$ совпадают с коэффициентами ряда Фурье функции

$$\Phi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t), \quad (14)$$

где $\alpha_0 = (1/T) \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial \theta}$; $\alpha_k = (1/T) \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial a_k}$; $\beta_k = (1/T) \frac{\partial F(\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)}{\partial b_k}$. Это дает удобный способ решения системы

уравнений (10): вычисляя коэффициенты ряда Фурье функции $\Phi(t)$, например, методом быстрого преобразования Фурье и варьируя неизвестные параметры $\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k$, добиваются обращения в нуль коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_1 \dots \beta_k$. Вычисленная совокупность параметров $\theta, a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k$ позволяет однозначно определить амплитуды механических колебаний и, следовательно, восстановить

Т а б л и ц а 1

Номер гармоники	A, мкм	B, мкм	θ , рад
1	0,07162	0,05571	1,3
2	0,04775	0,04775	1,3
3	0,01592	0,00796	1,3

функцию движения объекта $f(t)$ (формула (7)).

Проверка возможности осуществления такого подхода к решению обратной задачи восстановления параметров сложного периодического колебания объекта проводилась нами с использованием численного моделирования. Моделирование осуществлялось в следующем порядке. Вычисля-

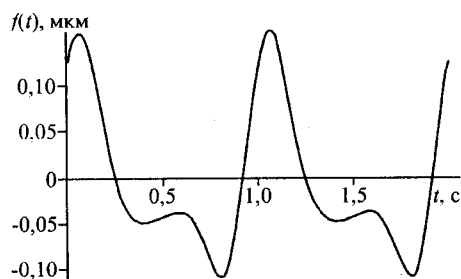


Рис. 1. Заданная зависимость смещения объекта $f(t)$ от времени при его периодическом движении

лись значения смещения объекта в 128 равноотстоящих точках в течение 2 с, когда объект совершал сложное периодическое колебание на трех гармониках с основной частотой 1 Гц. В табл. 1 приведены заданные значения амплитуд гармоник механических колебаний $A_1 \dots A_3, B_1 \dots B_3$. Вид заданной зависимости смещения объекта $f(t)$ изображен на рис. 1. По формуле (2) вычислялась нормированная переменная составляющая интерференционного сигнала $u_0(t)$ при длине лазерного излучения $\lambda = 1 \text{ мкм}$ и стационарном набеге фазы в интерференционной системе $\theta = 1,3 \text{ рад}$. Соответствующая зависимость нормированной интенсивности интерференционного сигнала от времени показана на рис. 2. По полученному интерференционному сигналу в результате решения обратной задачи по изложенной выше методике осуществлялось определение неизвестных значений параметров $\theta, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. В этом случае относительная погрешность их определения не превышала 1 % (табл. 2). Также было исследовано влияние случайного отклонения значения интерференционного сигнала от теоретического, вычисляемого по формуле (2). Для этого к нормированной переменной составляющей интерференционного сигнала прибавлялась случайная величина, вычисленная ЭВМ с помощью программного генератора случайных чисел. В табл. 3 представлены результаты восстановления амплитуд колебаний при 5 %-ном случайном отклонении значения интерференционного сигнала от вычисленного теоретически. Относительная погрешность восстановления амплитуд вибраций в этом случае составила не более 5 %.

Таким образом, проведенное моделирование подтверждает возможность определения амплитуд механических колебаний с помощью данной методи-

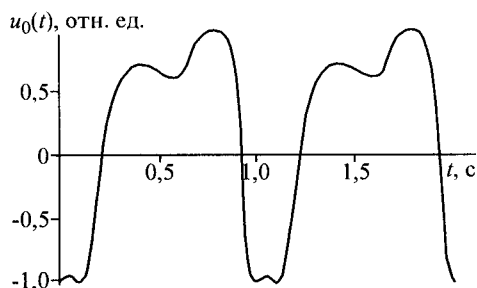


Рис. 2. Зависимость нормированной интенсивности интерференционного сигнала $u_0(t)$ от времени

Таблица 2

Номер гармоники	A , мкм	B , мкм	θ , рад
1	0,07168	0,05555	1,301
2	0,0476	0,04772	1,301
3	0,01588	0,00805	1,301

Таблица 3

Номер гармоники	A , мкм	B , мкм	θ , рад
1	0,06955	0,05348	1,306
2	0,04592	0,04631	1,306
3	0,01536	0,00836	1,306

ки. При этом исключается проблема, связанная с неустойчивостью решения вблизи особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коронкевич В. П., Ханов В. А.** Современные лазерные интерферометры. Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Вагарин В. А., Васильев М. Р.** Гомодинные методы измерения // Зарубеж. радиоэлектрон. 1995. № 6. С. 135.
3. **Васильев В. Н., Гуров И. П.** Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. Санкт-Петербург: БХВ, 1998.
4. **Lukianowicz T., Lukianowicz C.** Method of measuring of little periodical movements involving laser interferometry // Proc. SPIE. 1994. **2340**. P. 415.
5. **Гангнус С. В., Скрипаль А. В., Усанов Д. А.** Определение параметров движений объекта с помощью оптического гомодинного метода // Автометрия. 1999. № 1. С. 31.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
7. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.

*Саратовский государственный университет,
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru*

*Поступило в редакцию
1 июня 1999 г.*