

УДК 621.396

Т. Б. Борукаев

(Новосибирск)

**СЛЕДЯЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ***

Проводятся синтез и исследование точности байесовского алгоритма нелинейной фильтрации с применением функциональных моделей сигналов и помех. Показаны также возможности информационной оценки качества фильтрации.

Введение. Оптимальная обработка негауссовских стохастических сигналов, как правило, приводит к процедурам нелинейной фильтрации. Такие фильтры чаще всего синтезируются на основе марковской теории [1, 2]. При этом обычно используются марковские модели негауссовских процессов и гауссовская аппроксимация апостериорного распределения оценок. И то, и другое делают синтез приближенным, и притом достаточно сложным. Далее развивается альтернативный метод, основанный на использовании функциональных моделей. Как будет показано, оставаясь приближенным, он вместе с тем достаточно прост в реализации, что позволяет использовать его для широкого класса сигналов и помех.

1. Синтез алгоритма фильтрации. Пусть требуется оценить случайный параметр x , наблюдаемый на интервале $t \in (0, T)$ в аддитивной смеси

$$y(t) = x + z(t),$$

где $z = f(\zeta)$ – нелинейная функция от стационарного гауссовского процесса $\zeta(t)$ с нулевым средним и дисперсией σ_ζ^2 . Таким образом, негауссовское слагаемое z в смеси представлено функциональной моделью [3, 4], позволяющей воспроизвести различные законы распределения процессов. Переходя к дискретной выборке, получим

$$y_i = x_i + z_i; \quad \zeta_i = \phi(z_i), \quad i \in 1, \dots, N, \quad (1)$$

где функция ϕ , обратная к f , предполагается существующей. Положим также $x_i = \text{const}$, $\forall i$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № Г00-4.2-7).

Применяя для оптимального оценивания параметра x критерий максимума апостериорной вероятности (МАН) [5]:

$$\hat{x} = \arg \max_x w(x/y)$$

с учетом $w(x/y) = w(x)w(y/x)/w(y)$, получим уравнение для МАН-оценки \hat{x} :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\ln w(\hat{x}) + \ln w(y/\hat{x})] = 0. \quad (2)$$

Далее, вместо условного распределения $w(y/x)$ используем распределение $w(z)$ (с учетом $z = y - x$), которое при нелинейном преобразовании (1) найдется как

$$w(z_i) = |\varphi'(z_i)| w_\zeta[\varphi(z_i)]$$

(знак модуля в дальнейшем опускается). Для гауссовских ζ и x

$$w(x) = \frac{\exp(-x^2/2\sigma_x^2)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}, \quad w(\zeta_i) = \frac{\exp(-\zeta_i^2/2\sigma_\zeta^2)}{\sigma_\zeta \sqrt{2\pi}},$$

$$\ln w(z) = \sum_{i=0}^N [\ln \varphi'(z_i) - \ln(\sigma_\zeta \sqrt{2\pi}) - \varphi^2(z_i)/2\sigma_\zeta^2].$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2), получим

$$\hat{x} = 2\sigma_x^2 \sum_{i=1}^N F(z_i), \quad (3)$$

где

$$F(z) = \varphi(z)\varphi'(z) - \frac{\sigma_\zeta^2 \varphi''(z)}{\varphi'(z)}.$$

Для более общего случая, когда параметр $x = x(t)$ является переменным, используя, как и в [5] при получении структуры оптимального демодулятора, разложение Карунена – Лозва для процессов $x(t)$ и $\zeta(t)$, приходим окончательно к системе уравнений

$$\begin{cases} u(t) = H(p)[y(t) - \hat{x}(t)]; \\ \hat{x}(t) = K(p)F[u(t)], \end{cases} \quad (4)$$

где $p \doteq \partial/\partial t$; $K(p) = L\{B_x(\tau)\}$, $H(p) = L\{H(t)\}$ – преобразования Лапласа от автокорреляционной функции процесса $x(t)$ и от ядра фильтра, обеляющего процесс $\zeta(t)$, которое находится из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) B_\zeta(t - \tau) d\tau = \delta(t)$$

(здесь δ – функция Дирака).

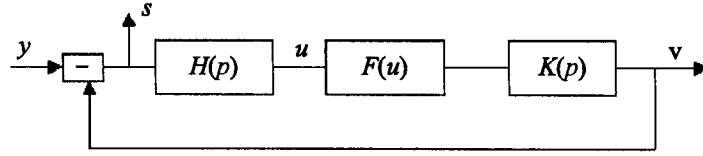


Рис. 1

Полученные уравнения (4) для текущего МАВ-оценивания изменяющегося во времени параметра $x(t)$ допускают наглядную интерпретацию в виде нелинейной следящей системы, показанной на рис. 1 (где $v = \hat{x}$). Прямая цепь контура содержит линейные звенья с коэффициентами передачи $H(p)$ и $K(p)$ и нелинейный дискриминатор с характеристикой $F(u)$.

Нетрудно видеть, что в частном случае $\varphi(z) = z$ полученная система превращается в линейный винеровский фильтр с коэффициентом передачи

$$\Phi(\omega) = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_\zeta(\omega)}, \quad (5)$$

где $G_x(\omega)$, $G_\zeta(\omega)$ – энергетические спектры процессов $x(t)$ и $\zeta(t)$.

К сожалению, нелинейный фильтр, описанный уравнениями (4), физически нереализуем из-за четности характеристик $B_x(\tau)$ и $H(t)$. Для реализуемости алгоритма фильтрации можно заменить описанные ранее линейные звенья реализуемыми, например, с коэффициентами передачи

$$H(p) = c(1 + pT_1), \quad K(p) = d/(1 + pT_2) \quad (6)$$

при соответствующем выборе параметров. При этом дифференциальные уравнения (4) могут быть представлены в виде конечно-разностных

$$\begin{cases} u_i = c[(1 + T_1)(y_i - \hat{x}_i) - T_1(y_{i-1} - \hat{x}_{i-1})]; \\ (1 + T_2)\hat{x}_i = T_2\hat{x}_{i-1} + dF(u_{i-1}). \end{cases} \quad (7)$$

Полученные уравнения являются алгоритмом рекурсивной фильтрации, формирующей текущую МАВ-оценку гауссовского параметра $x(t)$, входящего аддитивно в наблюдаемую реализацию $y(t)$. Таким образом можно выделить гауссовский сигнал на фоне негауссовской помехи $z(t)$.

Алгоритм (7) может быть успешно использован и в том случае, если компонента $z(t)$ представляет полезный негауссовский сигнал, а $x(t)$ является помехой. Запишем для компоненты s (см. рис. 1)

$$s(t) = y(t) - \hat{x}(t) = z(t) + x(t) - \hat{x}(t),$$

откуда следует $\overline{(s - z)^2} \rightarrow 0$ при $\overline{(x - \hat{x})^2} \rightarrow 0$, т. е. $s(t)$ является несмещенной оценкой негауссовской компоненты $z(t)$.

2. Результаты моделирования. Теоретический анализ точности оценок оказывается недоступным из-за нелинейности системы уравнений (7). Цифровое моделирование алгоритма, напротив, реализуется достаточно просто.

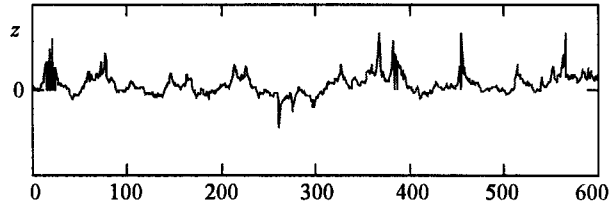


Рис. 2

Процессы $\zeta(t)$ и $x(t)$ формируются путем фильтрации двух независимых белых шумов в инерционных звеньях с характеристиками

$$K_{\zeta}(p) = 1/(1 + pT_1), \quad K_x(p) = 1/(1 + pT_2),$$

где постоянные T_1 и T_2 в соответствии с (4) и (5) те же, что и в алгоритме (7). Определение функции $f(\zeta)$ для адекватного представления негауссовских процессов с заданными распределением и корреляционной функцией описано в [3]. Здесь же мы произвольно выберем

$$f(\zeta) = \begin{cases} \operatorname{tg} \zeta, & |\zeta| \leq 0,45\pi; \\ 0, & |\zeta| > 0,45\pi. \end{cases} \quad (8)$$

Такое преобразование позволяет сформировать процессы, существенно отличающиеся от гауссовских. На рис. 2 показана реализация процесса, используемого в дальнейшем исследовании, при $\sigma_{\zeta}^2 = 0,5$. Таким образом, имитируется случайный импульсный процесс, представляющий либо помехи, либо реальные негауссовские сигналы. Ограничение в (8) введено для обеспечения устойчивости алгоритма. Пренебрегая им при определении функции дискриминатора, получим из (3)

$$F(u) = \frac{2(u + 2 \operatorname{arctg}(u)/\sigma_{\zeta}^2)}{1 + u^2}.$$

Вид этой характеристики показан на рис. 3. Приведем результаты экспериментального исследования точности оценок негауссовской компоненты $z(t)$ — импульсного стохастического сигнала на фоне гауссовской помехи $x(t)$. Постоянные времени фильтров выбраны $T_1 = 10$, $T_2 = 30$, а коэффициенты c , d , входящие в алгоритм (7), варьировались с целью нахождения экстремума нормированной погрешности оценки

$$\delta^2 = \min_{c, d} \overline{[s(t) - z(t)]^2} / \sigma_z^2.$$

На рис. 4 показаны зависимость δ^2 от отношения сигнал/помеха $q = \sigma_z / \sigma_x$ (кривая 1) и та же зависимость для случая линейной фильтрации (кривая 2), т. е. при $F(u) = u$. Как мы видим, нелинейная фильтрация в данном примере обеспечивает значительный выиг-

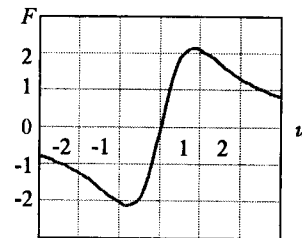


Рис. 3

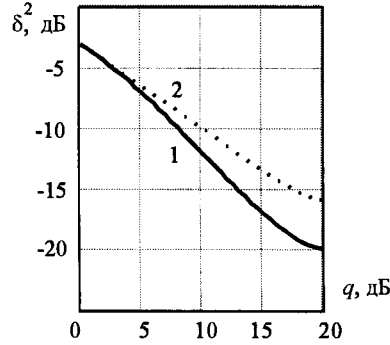


Рис. 4

рыш, достигающий при достаточно слабых помехах 5–8 дБ. Следует подчеркнуть, что синтезированный алгоритм (о чем свидетельствуют экспериментальные результаты) не достигает потенциальной точности оценок. Главная причина состоит в вынужденной замене идеальных линейных звеньев физически реализуемыми. Последние, как известно, вносят запаздывание, что приводит к уменьшению запасов устойчивости следящего контура и в конечном итоге снижает точность оценок. Кроме того, запаздывание на один шаг дискретизации приходится

вводить в алгоритм, используя $F(u_{i-1})$ вместо $F(u_i)$, что вызвано нелинейностью функции. И наконец, стремясь приблизить алгоритм к оптимальному, следовало бы улучшить точность оценок

$$\delta^2 = \min_{c, d, \lambda, \gamma} \overline{[\lambda s(t + \gamma) - z(t)]^2} / \sigma_z^2,$$

что усложнило бы процедуру оптимизации, и без того весьма трудоемкую.

3. Информационная оценка точности. Для оценки точности алгоритма нелинейной фильтрации можно также использовать информационную меру Шеннона [6]. В частности, введем так называемую взаимную информацию (по Шеннону – реальную скорость передачи информации) между сигналом z и его оценкой s :

$$I(Z, S) = - \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M p(z_j, s_k) [\log_2 p(z_j) + \log_2 p(s_k) - \log_2 p(z_j, s_k)]. \quad (9)$$

Как показано в [6], для аналоговых нормальных ансамблей

$$I[Z, S] = -\log_2 \sqrt{1 - R^2}, \quad (10)$$

т. е. взаимная информация не зависит от средних и дисперсий, а зависит лишь от R – коэффициента корреляции между компонентами z и s .

Можно показать, что оценка, полученная путем максимизации I , так же, как и МАВ-оценка, является байесовской. Действительно, переписывая (9) в виде

$$I[Z, S] = - \sum_{j=1}^M p(z_j) \log_2 p(z_j) + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M p(z_j) p(s_k / z_j) \log_2 p(z_j / s_k),$$

где первое слагаемое представляет энтропию источника, замечаем сходство второго слагаемого с известным средним байесовским риском. В данном случае вместо среднеквадратичной евклидовой меры погрешности здесь используется информационная мера $-\log_2 p(z_j / s_k)$ – неопределенность гипотезы z_j при принятии решения s_k .

Критерий $\max I$ использовался, в частности, в [7] для распознавания изображений. К сожалению, его затруднительно использовать для прямого синтеза алгоритмов оценивания, но можно применить для оценки качества и оптимизации параметров известных алгоритмов.

На рис. 5 показаны полученные экспериментально при числе уровней квантования $M = 30$ зависимости $I(Z, S)$ от входного отношения сигнал/помеха. Кривая 1 соответствует нелинейной фильтрации, кривая 2 – линейной, а кривая 3 представляет значения $I(Z, Y)$, т. е. количество информации о сигнале в наблюдаемой реализации до обработки. Полученные данные также демонстрируют выигрыш нелинейной фильтрации.

Следует заметить, что точность определения I , как это следует из (10), уменьшается при $R \rightarrow 1$, т. е. при $\delta^2 \rightarrow 0$. Это является одной из причин того, что оптимизацию параметров алгоритма (7) приходится производить по критерию минимума δ^2 и лишь затем измерение I . Кроме того, вычисление энтропии требует определения двумерных распределений, что приводит к значительным временным затратам в циклах оптимизации.

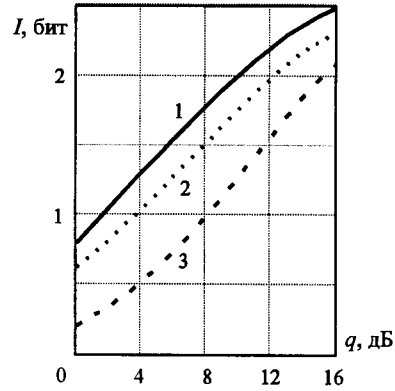


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1975.
2. Ярлыков М. С., Миронов М. А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
3. Борукаев Т. Б. Анализ негауссовых каналов методом «фиктивного оператора» // Радиотехн. и электрон. 1971. № 9.
4. Теория обнаружения сигналов /Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
5. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972. Т. 1.
6. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Borukaev T., Gruzman I. Entropie – basierte Verfahren fuer die Bilderkennung // 9 Symp. Maritime Elektronik. Rostock, 1998. P. 89.

Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: ktor@ref.nstu.ru

Поступила в редакцию
7 декабря 2001 г.