

**Б. Д. Борисов, В. А. Васильев, А. М. Гончаренко, В. А. Жмудь**  
(Новосибирск)

**МЕТОДИКА ОЦЕНКИ СТАБИЛЬНОСТИ  
СТАНДАРТОВ ЧАСТОТЫ**

Описаны методика и аппаратура измерения относительной нестабильности современных стандартов частоты оптического диапазона в интервале времен измерения  $10^{-3}$ – $10^6$  с. Благодаря устранению характерного «мертвого» времени и схеме уточнения оценки временных интервалов, величина относительной погрешности, связанной с ошибкой дискретизации, уменьшена в 500 раз. Разработанная методика и аппаратура позволяют достичь точности измерения нестабильности частоты лазерных стандартов на уровне  $10^{-14}$ – $10^{-15}$  за указанные времена.

Относительная нестабильность современных стандартов частоты оптического диапазона в интервале времен измерения  $10^{-3}$ – $10^6$  с составляет  $10^{-14}$ – $10^{-15}$  [1]. Времячастотные измерения в этом случае имеют свои особенности. Во-первых, сравнить лучшую точность с эталоном невозможно ввиду того, что он не существует. Во-вторых, с учетом значений оптической несущей  $\nu \approx 10^{14}$  Гц абсолютная погрешность измерений должна быть не больше 1 Гц. В третьих, для сохранения этой точности необходимо уменьшить методические и инструментальные погрешности измерителей специальных характеристик нестабильности частоты, в частности основной во временной области – двухвыборочной дисперсии Аллена, определенной в [2] как

$$\sigma_y^2(2, \tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{i+1}(\tau) - \bar{y}_i(\tau))^2 \rangle, \quad (1)$$

где  $\bar{y}_i(\tau)$ ,  $\bar{y}_{i+1}(\tau)$  – осредненные значения частоты на смежных временных интервалах длительностью  $\tau$  секунд каждый (с нулевым «мертвым» временем  $\tau_m = 0$  между ними). Угловыми скобками отмечено статистическое среднее по ансамблю пар измерений, которое в эксперименте заменяется усреднением во времени.

Отличительная особенность характеристики (1) состоит в том, что её оценка является состоятельной при измерениях стабильности частоты на фоне специфических шумов фликкерного типа со спектральной плотностью мощности степенного вида  $S(f) = f^\nu$ ,  $-2 \leq \nu \leq +2$ , доминирующих в высокостабильных генераторах любого диапазона при больших  $\tau$  [3].

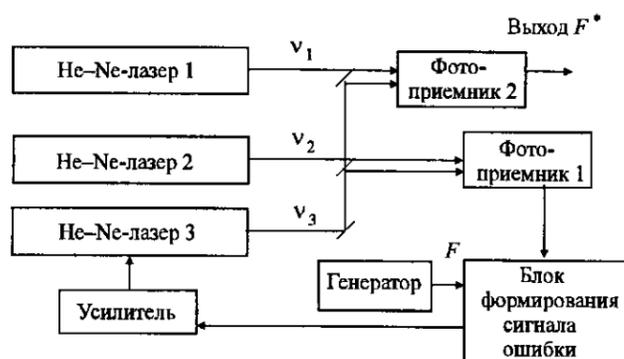


Рис. 1. Схема измерения разностной частоты с помощью системы фазовой автоподстройки частоты

Оценка качества таких высокостабильных систем осуществляется по методике [3]. Эта методика основана на измерении флуктуаций разностной частоты двух идентичных лазеров и может быть применена для генераторов любого частотного диапазона.

Схема измерительной установки для этого случая дана на рис. 1. Она содержит два идентичных стабильных лазера 1 и 2. Если их разностная частота  $\nu_2 - \nu_1$  в среднем равна нулю, то для удобства измерения её необходимо перенести на выбранную несущую частоту  $F$  в радиодиапазоне, что реализуется с помощью дополнительного лазера – гетеродина 3. В схеме измерения нестабильности генераторов других диапазонов фотоприемники заменяются на умножители с фильтрами низкой частоты на выходе. Система фазовой автоподстройки частоты [4] обеспечивает равенство частоты излучения лазера 3 сумме (или разности) частоты излучения лазера 2 и частоты  $F$  генератора:  $\nu_3 = \nu_2 + F$ . На втором фотоприемнике выделяется частота  $F^*$ , равная разности частот первого и третьего лазеров,  $F^* = \nu_3 - \nu_1 = \nu_2 - \nu_1 + F$ . Если обеспечена необходимая точность фазовой привязки, то измерение стабильности частоты  $F^*$  на выходе второго фотоприемника эквивалентно измерению стабильности разностной частоты в соответствующем частотном диапазоне.

В последнее время резко возрос интерес к значениям оценки (1) за малое время  $\tau \in [10^{-3} - 10^0]$  с, однако при таких временах осреднения современные электронно-счетные частотомеры не обеспечивают требуемой точности измерения  $\bar{y}_i(\tau)$  и обладают недопустимо большим значением  $\tau_m \neq 0$  при перезапусках. Вклад этой величины в погрешность оценки (1) исследован в [5]. Эти требования способствовали разработке методики и специального частотомера, который удовлетворяет условию  $\tau_m = 0$  и исключает соответствующую компоненту инструментальной погрешности. Программное обеспечение позволяет оперативно рассчитывать и отображать параметр Аллена по текущей выборке.

Основа измерительного устройства – персональная ЭВМ, выполняющая функции формирователя измерительного интервала, блока обработки и индикации. Дополнительная аппаратная часть минимальна: частотомер, содержащий счетчики со схемой управления, формирователь счетных им-

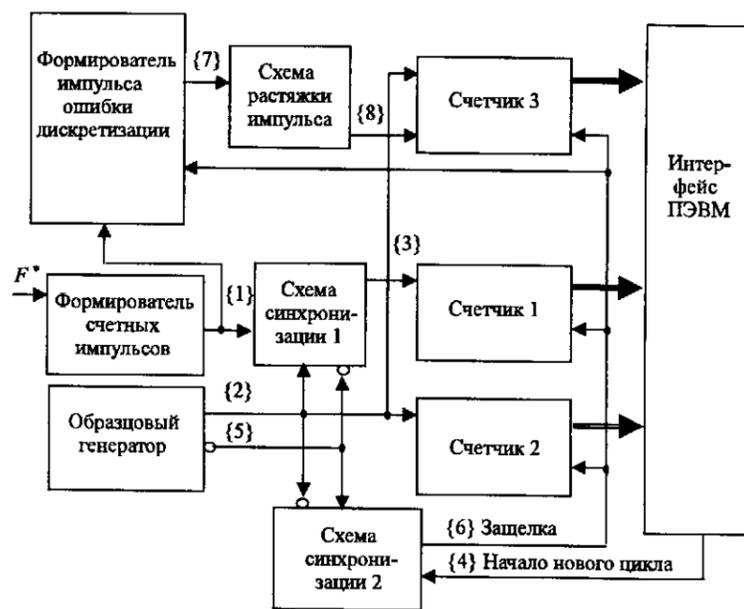


Рис. 2. Функциональная схема частотомера

пульсов и генератор опорной частоты, который может заменяться внешним стандартом частоты (рис. 2). Эпюры сигналов показаны на рис. 3.

Формирователь преобразует исследуемый сигнал в последовательность счетных импульсов той же частоты – сигнал {1}. Схема синхронизации из сигналов {2} формирует сигналы {3} той же частоты, синхронизованные с фронтами сигналов {2} от образцового генератора. Счетчик 1 подсчитывает количество импульсов {3} за каждый измерительный интервал. Счетчик 2 измеряет длительность интервала  $\tau$  в базе времени импульсов {2} образцового генератора.

Сигнал {4} от интерфейса ПЭВМ инициирует окончание предыдущего цикла измерения и начало нового эталонного интервала времени дли-

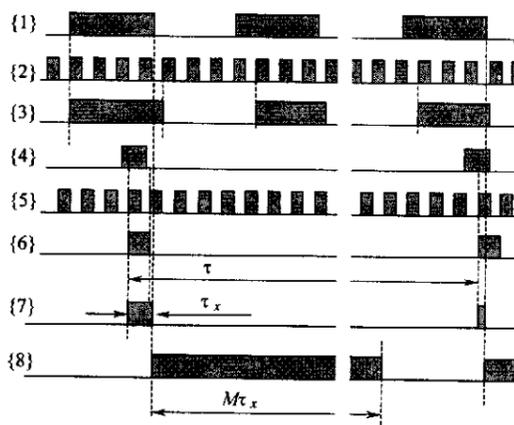


Рис. 3. Эпюры сигналов схемы рис. 2

тельностью  $\tau$ . Он синхронизируется инверсными импульсами {5} от образцового генератора, поэтому фронты полученного синхронизованного сигнала {6} никогда не совпадают с фронтами сигналов {3} и {2}. Этим обеспечивается возможность корректного считывания по фронту сигнала {6} кодов, накопленных в счетчиках. Поскольку счет импульсов во время работы в такой схеме не прерывается, «мертвое» время отсутствует.

Разрядность каждого счетчика обеспечивает его переполнение не чаще одного раза за 1 с при  $\tau = 10^{-3}$  с. Поэтому результат счета определяется вычитанием предыдущего значения кода из текущего. В случае переполнения счетчика результат вычитания становится отрицательным. Тогда к этой отрицательной величине добавляется значение емкости счетчика, что восстанавливает истинное значение результата счета в данном цикле. Результатом измерения в каждом цикле является средняя частота исследуемого сигнала за время  $\tau$ , которая определяется как отношение приращений кодов первого и второго счетчиков, умноженное на частоту образцового генератора. Для формирования измерительного периода используется таймер ЭВМ. Высокой точности формирования этого периода не требуется (достаточно шесть–семь порядков), поскольку осреднение образцовой и измеряемой частот ведется за одно и то же время.

Счетчик 3 совместно с формирователем импульса ошибки дискретизации и схемой растяжки импульса позволяет уточнить результат измерения до дробных долей периода измеряемой частоты и повысить точность измерения более чем на два порядка (в 500 раз). С этой целью формирователь импульса ошибки квантования формирует импульс {7}, длительность которого несет информацию о временном сдвиге между фронтами сигналов {1} и {6}. Эта длительность ( $\tau_x$ ) дополнительно измеряется с высокой точностью, для чего схема растяжки импульса формирует выходной импульс {8}, длительность которого в заданное число ( $M = 500$ ) раз больше длительности входного импульса {7}.

Схема растяжки импульса (рис. 4) содержит интегрирующий конденса-

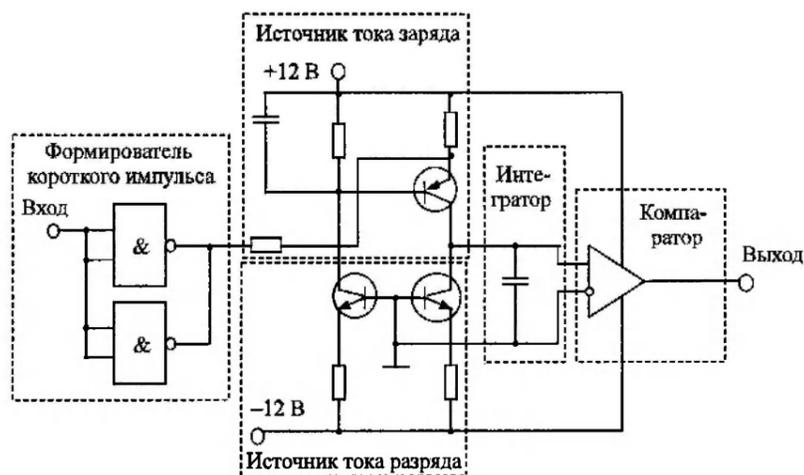


Рис. 4. Схема растяжки импульса

тор, постоянно включенный источник тока разряда, коммутируемый на короткое время источник тока заряда, формирователь короткого импульса и компаратор.

Источник тока разряда всегда открыт и формирует ток  $I_p$ . Источник тока заряда может «запираться», а когда он открыт, его ток ( $I_z$ ) в заданное число ( $M + 1$ ) раз превышает ток  $I_p$ :  $I_z = I_p(M + 1)$ . В исходном состоянии источник тока заряда «заперт», источник тока разряда открыт, конденсатор интегратора полностью разряжен. При разряженном конденсаторе интегратора ток разряда прекращается. Формируется короткий импульс, длительность  $\tau_x$  которого подлежит измерению. Этот импульс открывает источник тока заряда, быстро заряжающий конденсатор интегратора до напряжения, пропорционального длительности этого короткого импульса  $\tau_x$ . Эффективный ток заряда  $I_{эз}$  равен разности тока  $I_z$  (от источника тока заряда) и тока  $I_p$  (от источника тока разряда):  $I_{эз} = I_z - I_p = MI_p$ . По окончании короткого импульса источник тока заряда «запирается», источник тока разряда начинает разряжать конденсатор интегратора. Таким образом, ток разряда в  $M$  раз меньше тока заряда, а поскольку разряжается и заряжается один и тот же конденсатор, то независимо от его емкости время разряда в  $M$  раз больше времени заряда. Устранение зависимости коэффициента растяжки  $M$  от емкости конденсатора позволяет сохранить высокую точность. Так как источник тока разряда не отключается, то на быстродействие устройства влияет только быстродействие «запирания» источника тока заряда, которое может быть получено достаточно большим. Отсутствие ключа, блокирующего компаратор в цикле «интегрирование», приводит к тому, что растянутый импульс начинается не в момент окончания короткого импульса, а в момент его начала. Коэффициент растяжки при этом увеличивается на единицу (к длительности растянутого импульса прибавляется длительность нерастянутого импульса) и его легко учесть.

Счетчик 3 измеряет количество импульсов образцовой частоты {2} за время существования импульса {8}, и эта информация используется для коррекции предшествующего и последующего результатов.

На основе описанного частотомера с небольшим аппаратным наращиванием возможно многоканальное измерение частот нескольких исследуемых генераторов. Образцовый генератор, счетчик 2 и схема синхронизации 2 при этом остаются общими для любого количества каналов, обеспечивая тем самым единую шкалу времени.

Аппаратная часть собрана на двух трехканальных таймерах КР1810ВИ54. Устройство предполагает непрерывное измерение величины средней частоты за время  $\tau_0$  в масштабе образцовой частоты внешнего или внутреннего сигнала. Причем минимальные интервалы  $\tau_0 = 1$  мс следуют один за другим строго с нулевым зазором. Таким образом получаем сведения об изменении частоты, усредненной за произвольные интервалы текущего времени, кратные  $\tau_0$ , существенно сокращая общее время наблюдения при  $\tau_m = 0$ .

Программная часть осуществляет сбор и графическое отображение отсчетов частоты  $\bar{y}_i(\tau)$  для  $\tau = k\tau_0$ ,  $k \in [1-600]$ , одновременное отображение гистограммы распределения этих отсчетов и графика функции Аллена (1).

В отличие от традиционных алгоритмов сбора и обработки данных наша программа не требует предварительного задания величины  $N$  отсчетов  $\bar{y}_i(\tau_0)$  и значения  $\tau_0$ : по умолчанию сбор данных происходит до прерывания, а зна-

чение величины  $\tau_0$  принимается минимальным для данной аппаратной реализации. Объем получаемой информации в результате одного непрерывного эксперимента ограничивается только объемом доступной памяти. Поэтому в результате одного непрерывного эксперимента осуществляются измерения для вычисления функции (1) при  $\tau$  от предельно малых до предельно больших.

Подпрограмма измерения производит вычисление независимых отсчетов  $\bar{y}_i(\tau_0)$  на интервалах осреднения длительностью  $\tau_0$ , следующих друг за другом с нулевым временным промежутком.

Подпрограмма обработки выполняет следующие операции:

1. Для заданной величины минимальной  $\tau_0$  и текущего  $N-1$  накапливаются  $N-1$  значений функции  $\Delta\bar{y}^2(\tau_0)$ , позволяющих вычислить значение выборочной дисперсии Аллена  $\bar{\sigma}_y^2(\tau_0, N-1)$ .

2. Для целого числа  $k \in [1-N/2]$  вычисляются и накапливаются  $M_k = (N/k) - 1$  значений функции  $\Delta\bar{y}^2(\tau_k)$ , где  $\tau_k = k\tau_0$ , а текущее значение выборочной дисперсии Аллена  $\bar{\sigma}_{y,k}^2 = \bar{\sigma}_y^2(\tau_k, M_k)$ .

Для оперативного контроля при настройках лазерного стандарта в эксперименте нами разработана программа расчета и отображения графика функции  $\bar{\sigma}_{y,k}^2$  в реальном времени. В этом случае программная часть отображает 600 отсчетов  $\bar{y}_i(\tau_0)$  и любые 600 из 30000 значений  $\bar{\sigma}_{y,k}^2$  на экране монитора, которые вычисляются в реальном времени.

Рассмотрим работу алгоритма. Пусть  $S_i(k, m)$  – промежуточный массив данных, в котором накапливается сумма  $m$  квадратов соответствующих приращений:

$$S_i(k, m) = \sum_{j=1}^m \Delta\bar{y}_j^2(k_0\tau). \quad (2)$$

Первоначально в него заносятся нулевые значения. Первое приращение результата в ячейке  $k$  этого массива произойдет после получения  $2k$  отсчетов  $\bar{y}_i$ , и оно равно:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{y}_1^2(\tau_k) &= \left( \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k} - \frac{y_{k+1} + y_{k+2} + \dots + y_{2k}}{k} \right)^2 = \\ &= \left( \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{k} - \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{y_i}{k} \right)^2. \end{aligned}$$

Добавка осуществляется только после получения  $k$  новых отсчетов, и на  $n$ -м шаге она равна:

$$\Delta\bar{y}_n^2(\tau_k) = \left( \sum_{i=(n-1)k+1}^{nk} \frac{y_i}{k} - \sum_{i=nk+1}^{(n+1)k} \frac{y_i}{k} \right)^2 = (\Sigma_{n1} - \Sigma_{n2})^2. \quad (3)$$

Для накопления этих сумм выделены ячейки. При накоплении достаточной суммы  $\Sigma_{n2}$  осуществляется вычисление нового приращения  $\Delta\bar{y}_{n+1}^2(\tau_k)$

по уравнению (3) и увеличивается сумма квадратов:

$$S_n(k\tau) = S_{n-1}(k\tau) + (\Sigma_{n1} - \Sigma_{n2})^2. \quad (4)$$

Следующий отсчет  $\bar{y}_i$  идет в накопление новой суммы  $\Sigma_{(n+1)2}$ , поскольку  $\Sigma_{(n+1)1} = \Sigma_{n2}$ .

Согласно (1), (2), (4)

$$\bar{\sigma}_y^2(\tau_k, n) = \frac{S_n(\tau_k)}{n-1}. \quad (5)$$

Новое значение на  $(n+1)$ -м шаге имеет вид

$$\bar{\sigma}_y^2(\tau_k, n+1) = \frac{S_n(\tau_k) + \Delta\bar{y}_{n+1}^2(\tau_k)}{n}. \quad (6)$$

Приращение на  $(n+1)$ -м шаге согласно (4), (5) запишем в виде

$$R_{n+1}(\tau_k) = -\frac{\bar{\sigma}_y^2(\tau_k, n)}{n} + \frac{\Delta\bar{y}_{n+1}^2(\tau_k)}{n-1}. \quad (7)$$

Оно характеризует величину уточнения на этом шаге оценки дисперсии Аллена и имеет примерно тот же порядок, что и ошибка определения ее по ограниченной выборке из  $n$  отсчетов.

Поскольку на графике отображаются значения функции  $\bar{\sigma}_y^2(\tau_k)$  с малым шагом аргумента, равным  $\tau_0$ , величину (5) удобно использовать для оперативного контроля параметров Аллена в реальном времени, так как изменения этой функции легко выявляются визуально.

Отметим, что в соответствии с описанием аппаратной части отдельные отсчеты частоты  $\bar{y}_i(\tau_0)$  в базе времени частоты  $F_0$  образцового генератора получаются как отношение приращений кодов первого  $P_i$  и второго  $Q_i$  счетчиков (с поправкой, вычисленной по коду счетчика 3):

$$\bar{y}_i(\tau) = F_0 \frac{P_i - P_{i-1}}{Q_i - Q_{i-1}}.$$

С учетом этого уравнение (3) принимает иной вид:

$$\Delta\bar{y}_n^2(\tau_k) = F_0^2 \left( \frac{P_{nk} - P_{(n-1)k+1}}{Q_{nk} - Q_{(n-1)k+1}} - \frac{P_{(n+1)k} - P_{nk+1}}{Q_{(n+1)k} - Q_{nk+1}} \right)^2. \quad (8)$$

Хотя эта формула более громоздка на вид, вычисление по ней гораздо проще, чем по (3), а умножение на  $F_0$  осуществляется масштабированием графика для отображения параметров Аллена. Из (8) видно, что промежуточ-

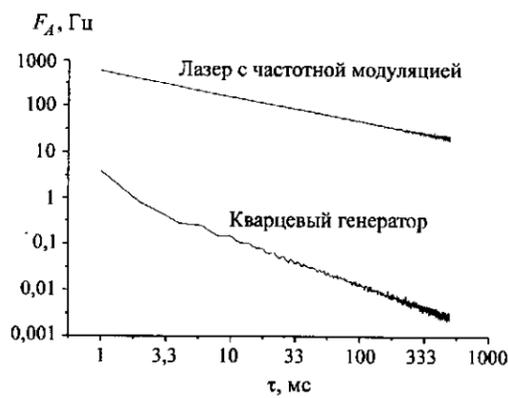


Рис. 5. Результаты измерения параметров Аллена кварцевого генератора и сигнала бисний двух лазеров

ные значения отсчетов не входят в результаты для  $k \geq 2$ . Из этого следует, что величина «мертвого» времени равна нулю.

При измерении частоты обычным методом погрешность в основном определяется ошибкой дискретизации, которая равна отношению периода измеряемой частоты к длительности измерительного интервала. В описанном частотомере благодаря схеме уточнения эта величина меньше в 500 раз (порядка 1 Гц).

На рис. 5 приведены результаты измерений абсолютных значений отклонений Аллена (корень из дисперсии Аллена) кварцевого генератора в радиодиапазоне и биения частот двух лазеров. Оценки абсолютных и относительных значений отклонения Аллена приведены в таблице.

Таким образом, для измерения специальных характеристик нестабильности частоты высокостабильных лазеров (генераторов) разработаны методика и прецизионный частотомер с абсолютной ошибкой измерений, меньшей 1 Гц за  $10^{-3}$  с, что обеспечивает относительную погрешность измерения нестабильности частоты оптического диапазона менее  $10^{-15}$ . Реализация непрерывного (без перезапуска) счета существенно сокращает общее время измерения и исключает инструментальную погрешность измерения характеристик нестабильности частоты от «мертвого» времени.

Параметры Аллена для крайних точек (см. рис. 5)

Источник сигнала	Значение	$\tau = 1$ мс	$\tau = 300$ мс
		Кварцевый генератор, 1 МГц	Абсолютное
	Относительное	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$
Лазер с частотной модуляцией, 88 ТГц	Абсолютное	500 Гц	30 Гц
	Относительное	$5,68 \cdot 10^{-12}$	$3,4 \cdot 10^{-13}$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багаев С. Н., Чеботаев В. П. Лазерные стандарты частоты // УФН. 1986. 148, вып. 1. С. 143.
2. Аллен Д. У. Статистические характеристики атомных стандартов частоты. Стабильность частоты: тем. вып. // ТИИЭР. 1966. 54, № 2. С. 132.
3. Рютман И. С. Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов: итоги развития за пятнадцать лет // ТИИЭР. 1978. 66, № 9. С. 70.
4. Бармасов С. В., Жмудь В. А. Аппаратура для фазовой автоподстройки разностной частоты двух лазеров // ПТЭ. 2000. № 3. С. 104.
5. Борисов Б. Д., Мишнев А. С. О точности измерения двухвыборочной дисперсии Аллена при оценке нестабильности частоты // Автометрия. 2000. № 3. С. 122.

*Институт лазерной физики СО РАН,  
E-mail: ir@laser.nsc.ru*

*Поступила в редакцию  
2 июля 2001 г.*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
А В Т О М Е Т Р И Я

2002, том 38, № 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.301 : 681.32

**И. И. Турулин**

(Таганрог)

**МЕТОД КАСКАДНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ  
ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ**

Предлагается метод проектирования рекурсивных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой. Метод заключается в комбинировании каскадного и параллельного (со взвешиванием) соединений базовых структур с единичной прямоугольной импульсной характеристикой в сочетании с прореживанием. Это позволяет частично или полностью исключить операции умножения и таким образом снизить вычислительные затраты. Вычислительные затраты базовой структуры составляют два сложения на выходную дискрету. Фильтры, синтезированные предлагаемым методом, могут иметь линейную фазовую характеристику и требуют существенно меньших вычислительных затрат по сравнению с нерекурсивными фильтрами. Вычислительные затраты синтезированных фильтров не зависят от длины импульсной характеристики. Дается математическая формулировка метода. Излагаются особенности реализации фильтров. Приводятся примеры фильтров и соответствующие импульсные характеристики. Рассмотрены возможности метода, а также области применения фильтров.

**Введение.** Несмотря на разработку мощных процессоров для цифровой обработки сигналов с быстродействием в несколько миллиардов комплексных умножений в секунду остается актуальной проблема разработки быстродействующих алгоритмов цифровой фильтрации. Актуальность диктуется рядом сложных задач по обработке больших объемов измерительной информации в реальном масштабе времени. Одной из таких задач является разработка радиолокаторов реального времени с синтезированной апертурой для летательных аппаратов. Кроме того, применение быстродействующих алгоритмов при прочих равных условиях позволяет удешевить изделие, например, с помощью программной реализации фильтров на управляющей ЭВМ некоторой системы. Для бортовых систем с ограниченным энергопотреблением использование быстродействующих алгоритмов позволяет применить микромощные процессоры с невысоким быстродействием.

Пути повышения быстродействия или снижения аппаратных, а также вычислительных затрат – упрощение структурной схемы фильтра и исключение медленных операций, что, в частности, достигается применением рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой (ИХ) вместо нерекурсивных. Рекурсивные фильтры с конечной ИХ (КИХ-фильтры), как и

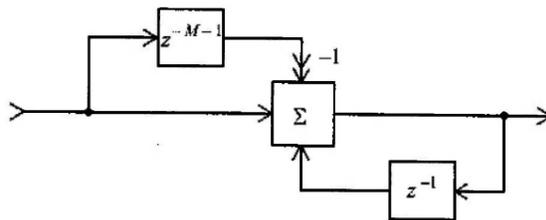


Рис. 1

нерекурсивные, могут иметь линейную фазочастотную характеристику (ФЧХ), что важно, например, при обработке изображений или сигналов с использованием АЦП с сигма-дельта-модуляцией. Для обеспечения линейности ФЧХ импульсная характеристика фильтра должна быть симметрична либо антисимметрична [1]. Так, например, в [2] описан рекурсивный КИХ-фильтр (РКИХФ) с прямоугольной ИХ длиной  $M$  (рис. 1). Недостаток такого фильтра – примитивность ИХ.

В данной работе предлагается метод, позволяющий синтезировать РКИХФ с малыми вычислительными затратами и широким классом воспроизводимых ИХ.

**Описание метода.** Основу метода составляют следующие приемы:

- комбинирование параллельного и каскадного соединений базовых звеньев (см. рис.1) с различными параметрами ИХ (длина, задержка, амплитуда);
- прореживание ИХ базовых звеньев;
- исключение операций умножения либо сведение их количества к минимуму, а также использование операций умножения, вырожденных в арифметический сдвиг;
- аппроксимация трудно реализуемых ИХ суммой (разностью) легко реализуемых.

Рассмотрим математическую формулировку предлагаемого метода.

Исходная ИХ или ее аппроксимация задается в виде

$$h(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_k(n), \quad (1)$$

где  $a_k$  – постоянные коэффициенты;  $K$  – число параллельно соединенных звеньев с ИХ:

$$\begin{aligned} h_k(n) = & h'_{(j-1)k}(n, l_{(j-1)k}, p_{(j-1)k}, q_{(j-1)k}) \otimes \\ & \otimes h'_{(j-2)k}(n, l_{(j-2)k}, p_{(j-2)k}, q_{(j-2)k}) \otimes \dots \otimes \\ & \otimes h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk}) \otimes \dots \otimes h'_{0k}(n, l_{0k}, p_{0k}, q_{0k}), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\otimes$  – операция свертки;

$$\begin{aligned} h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk}) = & \sigma(n/l_{jk} - p_{jk}) - \sigma(n/l_{jk} - q_{jk} - 1), \\ \text{если } & n/l_{jk} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

иначе  $h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk}) = 0$ ;  $l_{jk}$  – целые положительные коэффициенты прореживания;  $p_{jk}$  и  $q_{jk}$  – целые положительные числа ( $p_{jk} < q_{jk}$ ), которые определяют моменты начала  $p_{jk}l_{jk}$  (номер первой ненулевой дискреты) и окончания  $q_{jk}l_{jk}$  (номер последней ненулевой дискреты) ИХ,  $h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk})$ ;  $\sigma(n)$  – дискретная единичная ступенчатая функция.

Как видно из формул (1)–(3), результирующая ИХ получается линейной комбинацией сверток ИХ базовых звеньев с различными коэффициентами прореживания, моментами начала и окончания. Длины ИХ этих звеньев (с учетом последних  $(l_{jk} - 1)$  нулей ИХ) равны  $(q_{jk} - p_{jk} + 1)l_{jk}$  и могут быть различны. При  $l_{jk} = 1$  получаются базовые звенья без прореживания с длинами ИХ  $M = q_{jk} - p_{jk} + 1$ . При  $l_{jk} = 1$  и  $p_{jk} = q_{jk} = 0$  базовое звено вырождается в короткозамкнутую перемычку (вход соединен с выходом), т. е. в этом случае

$$h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk}) = \delta(n),$$

где  $\delta(n)$  – дискретная дельта-функция (единичный импульс).

Получим выражение для частотной передаточной функции каскадно-параллельной комбинации, ИХ которой определяется формулой (1).

Системная функция базового звена (см. рис. 1)

$$H(z) = (1 - z^{-M-1}) / (1 - z^{-1}).$$

Системная функция базового звена с задержкой и прореживанием, т. е. с ИХ  $h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk})$ , заданной выражением (3):

$$H'_{jk}(z) = z^{-p_{jk}l_{jk}} [1 - z^{-(q_{jk} - p_{jk} + 1)l_{jk}}] / (1 - z^{-l_{jk}}). \quad (4)$$

Как видно из (4), прореживание ИХ базового звена (как и любого другого цифрового фильтра)  $(l_{jk} - 1)$  нулями между соседними дискретами (с увеличением в  $l_{jk}$  раз длины ИХ, считая последние  $(l_{jk} - 1)$  нулей) достигается увеличением в  $l_{jk}$  раз всех задержек в сигнальном графе. Первый множитель в (4) соответствует каскадному подключению линии задержки (ЛЗ) на  $p_{jk}l_{jk}$  тактов ( $p_{jk} > 0$ ).

Как известно, передаточная функция получается из системной подстановкой  $z = e^{j\omega\Delta}$ , где  $\omega$  – круговая частота, а  $\Delta$  – шаг дискретизации. Подставив  $z = e^{j\omega\Delta}$  в (4), после преобразований получим

$$H'_{jk}(j\omega) = e^{-j\frac{\omega\Delta}{2}(p_{jk} + q_{jk})l_{jk}} \sin\left[\frac{\omega\Delta}{2}(q_{jk} - p_{jk} + 1)l_{jk}\right] / \sin\left(\frac{\omega\Delta}{2}l_{jk}\right).$$

Поскольку свертка во временной области соответствует умножению в частотной, сложение – сложению, передаточная функция РКИХФ

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \prod_{j=0}^{J-1} H'_{jk}(j\omega).$$

Заметим, что при  $p_{jk} < 0$  звено с ИХ  $h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk})$  будет физически нереализуемым, поскольку в этом случае  $h'_{jk}(n, l_{jk}, p_{jk}, q_{jk}) \neq 0$  при  $n < 0$ . Для физической реализуемости надо подключить ЛЗ на  $p_{jk} l_{jk}$  тактов ко входу звена.

Если  $n_0 < 0$ , где  $n_0 = \min_k \left\{ \sum_{j=0}^{J-1} p_{jk} l_{jk} \right\}$ , то весь РКИХФ будет физически не-

реализуемым. В этом случае для физической реализуемости на входе РКИХФ включают ЛЗ на  $(-n_0)$  тактов. Заметим, что члены  $p_{jk} l_{jk}$  в вышеприведенной формуле суммируются алгебраически, т. е. учтена возможность компенсации задержки и опережения при каскадном соединении базовых звеньев.

Следует отметить, что для обеспечения конечности ИХ, а в общем случае и устойчивости РКИХФ необходимо точное выполнение операций в пределах каждого базового звена. Выполнение этого требования ведет к увеличению минимальной разрядности процессора. Вне звеньев можно умножать на коэффициент  $2^{-k}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  (арифметический сдвиг для двоичного процессора), что позволяет снизить разрядность.

**Примеры.** Как известно, при каскадном соединении двух фильтров эквивалентная ИХ будет равна свертке исходных. Если исходные ИХ прямоугольны и длины их одинаковы, форма результирующей ИХ будет треугольной, если длины различны – трапециевидальной.

Если соединить параллельно два фильтра (т. е. объединить входы, а выходные сигналы просуммировать), то результирующая ИХ будет равна сумме исходных. Так, например, в результате параллельного соединения двух фильтров соответственно с прямоугольной и трапециевидальной ИХ получится ИХ типа «трапеция на подставке».

Свертка трех прямоугольных ИХ одинаковой длины соответствует каскадному соединению трех базовых звеньев (см. рис. 1). В этом случае ИХ будет колоколообразной (квазигауссоидой). Форма ИХ приближается к гауссоиде с ростом числа каскадно соединенных звеньев. Заметим, что амплитудно-частотная характеристика такого фильтра при увеличении числа звеньев стремится к гауссовой кривой. Если производить свертку прямоугольных ИХ разной длины, вершина результирующей ИХ будет более плоской. Отметим, что рассмотренные фильтры просты и реализуются без умножений.

Импульсная характеристика, представленная на рис. 2, получается в результате суммирования шести квазигауссовых ИХ, прореженных в  $l_{jk} = 8$  раз и сдвинутых относительно друг друга соответственно на 1, 1, 2, 1 и 1 дискрет, причем первая и третья ИХ умножены на 0,707, четвертая и шестая – на  $(-0,707)$ , а пятая инвертирована. Заметим, что все умножения можно выразить через одно (на 0,707), остальные – операции сложение/вычитание. Как видно из рис. 2, ИХ имеет целое число  $n_n$  дискрет на полупериод. Для достижения нецелого  $n_n$  можно перед фильтрацией использовать передискретизатор, изменяющий частоту дискретизации. Передискретизатор реализуют, например, на базе интерполяционного фильтра [3]. Для восстановления прежней частоты дискретизации к выходу фильтра также подключают передискретизатор.

На рис. 3 показана симметричная ИХ (окно), полученная суммированием прямоугольной, трапециевидальной и треугольной ИХ.

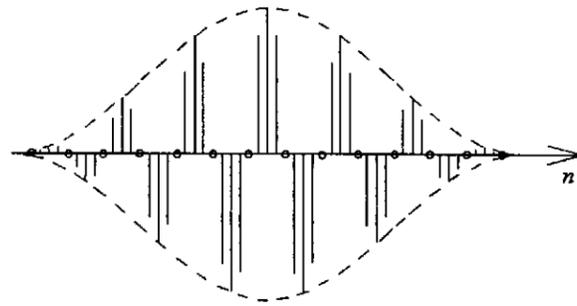


Рис. 2

**Практическая ценность.** Благодаря свойственной РКИХФ независимости числа операций на выходную дискрету от порядка фильтра, особенно эффективно применение РКИХФ для пространственной (и временной) обработки сигналов в гидро- и радиолокаторах бокового обзора с синтезированной апертурой для дальней зоны. При этом формирование амплитудного распределения синтезированной апертуры может быть реализовано в виде РКИХФ, импульсная характеристика которого реализует заданное окно длиной до десятков тысяч и более отсчетов. При этом получается поточная обработка пространственных сигналов, которую можно реализовать без умножений (если РКИХФ без умножений).

Для проверки предлагаемого метода на практике было проведено имитационное моделирование ряда РКИХФ. Это прежде всего рассмотренные фильтры, а также:

- различные окна произвольной длины, заданные аппроксимацией, в частности Бартлетта, Хэмминга, Ханна с одной–двумя операциями умножения на одну выходную дискрету либо без умножений;
- фильтр с квазикосинусной ИХ, полученный каскадным соединением трех базовых звеньев с длиной ИХ  $2M$ ,  $M$  и  $M$  соответственно и параллельным соединением этой группы с базовым звеном с длиной ИХ  $4M$  и последующим масштабированием. Результирующая ИХ инвертируется и имеет вид периода косинусоиды, который аппроксимирован тремя отрезками парабол. Первый и третий отрезки проходят через нуль и максимум аппроксимируемого периода косинусоиды, второй – через два нуля и минимум;
- периодические звенья, реализующие решетчатые (т. е. прореженные нулями) прямоугольные функции;
- каскадные соединения периодических звеньев, позволяющие формировать произвольные периодические функции на конечном интервале;

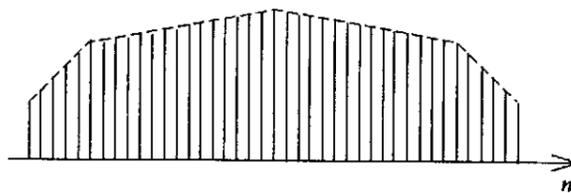


Рис. 3

– квазисогласованные фильтры для радиоимпульсов с прямоугольной, треугольной и гауссовой огибающими, сигналов Баркера.

Большинство перечисленных РКИХФ с соответствующими имитационными моделями приводится в [4].

По быстродействию РКИХФ занимают в общем случае промежуточное положение между нерекурсивными КИХ-фильтрами и рекурсивными фильтрами с бесконечной ИХ. Так, для рассмотренных РКИХФ выигрыш в быстродействии по сравнению с аналогичными нерекурсивными КИХ-фильтрами начинает проявляться при длине ИХ (равна порядку нерекурсивного фильтра) более 3–10 отсчетов.

Длина линий задержки, а значит, и объем  $V$  оперативной памяти процессора (относится к аппаратным затратам) будет такого же порядка (может оказаться немного большим из-за несколько большей разрядности), как и у соответствующих нерекурсивных фильтров. Для базового звена  $V = W(M + 2)$ , где  $W$  – разрядность чисел базового звена, а  $M$  – длина его ИХ. Так, при  $M = 1000$ ,  $W = 4$  байт,  $V \approx 4$  Кбайт, что во много раз меньше объема внутренней памяти современных процессоров цифровой обработки сигналов.

**Заключение.** Таким образом, предлагаемый метод позволяет строить быстродействующие цифровые фильтры с линейной ФЧХ и широким набором воспроизводимых импульсных характеристик.

Недостаток метода – отсутствие хорошо формализованной процедуры перехода от заданной ИХ, амплитудно- и/или фазочастотной характеристики к сигнальному графу РКИХФ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинер Р., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры: расчет и реализация. М.: Мир, 1982.
3. Крошьер Р. Е., Рабинер Л. Р. Интерполяция и децимация цифровых сигналов // ТИИЭР. 1981. 69, № 3. С. 14.
4. Турулин И. И. Некоторые методы синтеза рекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой / Таганрогский гос. радиотехн. ун-т. Таганрог, 1997. 40 с. Деп. в ВИНТИ 16.09.97, № 2837-В97.

Таганрогский государственный  
радиотехнический университет,  
E-mail: fep@tsure.ru

Поступило в редакцию  
28 августа 1998 г.