РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 5

УДК 621.391.26 + 519.218.82

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПО ЧАСТОТЕ СПЕКТРОМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Получены соотношения для дисперсий ошибок, обусловленных периодически неравномерной дискретизацией сигнала с неограниченной по частоте спектральной плотностью и амплитудными шумами его отсчетов.

Введение. В работе [1] получены соотношения, описывающие дисперсию ошибки восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации для произвольного набора отсчетных функций.

В работах [2, 3] исследован случай, когда сигнал с ограниченным по полосе частот спектром ($|\omega| \le \pi/\Delta$) точно восстанавливается по неравномерной последовательности отсчетов, и приводится соответствующая теорема отсчетов.

Далее будет показано, как, используя разработанную в [1] технологию вычислений, нам удалось расширить рамки применимости сформулированной в [2, 3] теоремы отсчетов и распространить ее действие на сигналы с неограниченным по частоте спектром.

При этом использование конкретного вида отсчетных функций и соответствующих вычислений на временной оси при последующем переходе в частотную область позволяет получить компактные соотношения для дисперсий ошибок восстановления сигнала, обусловленных как неограниченностью по частоте его спектра, так и наличием амплитудных шумов отсчетов сигнала.

Теорема отсчетов при периодически неравномерной дискретизации сигнала. В работах [2, 3] исследован случай восстановления сигнала по бесконечной совокупности его отсчетов $\{f(t_{kn})\}$, когда моменты дискретизации $\{t_{kn}\}$ образуют периодически неравномерную последовательность с периодом N: $t_{kn} = t_k + nN\Delta$, $k = \overline{0, N-1}$, $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{N-1} \le N\Delta$, $n = \overline{-\infty, \infty}$.

Показано, что в том случае, когда спектр сигнала лежит в полосе частот $|\omega| \le \pi/\Delta$, сигнал $f(t)$ в отсутствие амплитудного шума точно описывается рядом

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k + nN\Delta) w_{0k}(t - t_k - nN\Delta), \tag{1}$$

где отсчетная функция

$$w_{0k}(t - t_k - nN\Delta) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)} \prod_{\substack{r=0 \\ r \ne k}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t - t_r - nN\Delta)}{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_r)}. \tag{2}$$

Далее для простоты рассмотрим случай нечетного N, когда отсчетную функцию можно представить в виде произведения двух отсчетных функций, одна из которых не зависит от величины N:

$$w_{0k}(t - t_k - nN\Delta) = h(t - t_k - nN\Delta) w_k(t), \tag{3}$$

где функции

$$h(t - t_k - nN\Delta) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)},$$

$$w_k(t) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \ne k}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t - t_r)}{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_r)}. \tag{4}$$

Интересно отметить, что для этого случая теорема (1) может быть записана в несколько ином виде:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_k + nN\Delta) h(t - t_k - nN\Delta) \tag{5}$$

и будет выглядеть как суперпозиция с весами $\{w_k(t)\}$ теорем отсчетов при равномерной дискретизации сигнала с интервалом $N\Delta$ и сдвигами $\{t_k\}$. Напомним, что при равномерной дискретизации с интервалом Δ дисперсия ошибки восстановления сигнала с неограниченным по частоте спектром

$$\langle \varepsilon_f^2 \rangle = 2 \int_{|\omega| > \frac{\pi}{\Delta}} d\omega S_f(\omega), \tag{6}$$

где $S_f(\omega)$ – спектр мощности сигнала.

Не коррелированный с сигналом амплитудный шум $\varphi(t)$ при этом дает дополнительную составляющую дисперсии ошибки восстановления

$$\langle \varepsilon_{\varphi}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{\varphi}(\omega) = \sigma_{\varphi}^2, \tag{7}$$

где $S_{\varphi}(\omega)$ – спектр мощности шума, так что полная дисперсия ошибки

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \varepsilon_f^2 \rangle + \langle \varepsilon_{\varphi}^2 \rangle. \tag{8}$$

Для того чтобы в общем случае при периодически неравномерной дискретизации определить дисперсию ошибки восстановления сигнала, необходимо вычислить две величины: среднюю по множеству и времени дисперсию сигнала на выходе нестационарного фильтра (1) и взаимную корреляцию между сигналом $f(t)$ и выходом этого фильтра $f^*(t)$.

Дисперсия сигнала на выходе интерполяционного фильтра (1). Квадрат сигнала $f^*(t)$ на выходе фильтра (1) в момент времени t имеет вид

$$\sigma_{f^*}^2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_k + nN\Delta) h(t - t_k - nN\Delta) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{N-1} w_m(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(t_m + lN\Delta) h(t - t_m - lN\Delta). \tag{9}$$

Для центрированного стационарного случайного сигнала с корреляционной функцией $\sigma_f^2 \rho_f(t)$ усреднение соотношения (9) по множеству реализаций приводит к соотношению

$$\sigma_{f^*}^2(t) = \sigma_f^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w_k(t) w_m(t) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \rho_f(t_k - t_m + nN\Delta - lN\Delta) h(t - t_k - nN\Delta) h(t - t_m - lN\Delta). \tag{10}$$

Если ввести во внутренней двойной сумме новые индексы суммирования: $sN\Delta = (n - l)N\Delta$ и $lN\Delta$, то после суммирования по индексу l получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(t - t_k - nN\Delta) h(t - t_m - lN\Delta) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + sN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + sN\Delta)}. \tag{11}$$

Следовательно, средняя по множеству дисперсия сигнала $f^*(t)$ (заменим индекс s на n)

$$\sigma_{f^*}^2(t) = \sigma_f^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w_k(t) w_m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_f(t_k - t_m + nN\Delta) \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + nN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + nN\Delta)}. \tag{12}$$

Усредняя величину (12) по времени на периоде ее нестационарности $N\Delta$, получим окончательное выражение для искомой величины

$$\sigma_{f^*}^2 = \frac{\sigma_f^2}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \langle w_k(t) w_m(t) \rangle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_f(t_k - t_m + nN\Delta) \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + nN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_m + nN\Delta)}. \tag{13}$$

В этом соотношении величина

$$\langle w_k(t) w_m(t) \rangle = \int_0^{N\Delta} dt w_k(t) w_m(t) = \Delta \sum_{s=0}^{N-1} w_k(s\Delta) w_m(s\Delta). \tag{14}$$

Последнее соотношение в формуле (14) обусловлено тем, что зависящая от времени составляющая произведения отсчетных функций $w_k(t)$ и $w_m(t)$ является периодической (с периодом, кратным величине $N\Delta$).

Теперь переведем соотношение (13) в более удобную для анализа частотную область. Для этого используем ту же технологию вычислений, что и в [1]. Представим величины $\rho_f(t_k - t_m - nN\Delta)$ и $h(t_k - t_m - nN\Delta)$ в (13) в виде интегралов от их преобразований Фурье, а затем, используя формулу суммирования Пуассона, после интегрирования с учетом четности спектральной плотности $S_f(\omega)$ получим следующее соотношение для средней дисперсии сигнала $f^*(t)$:

$$\sigma_{f^*}^2 = \frac{1}{N\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \langle w_k(t) w_m(t) \rangle \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t_k - t_m) n. \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\tilde{h}_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n\right) = 1\left[\frac{\pi}{N\Delta} - \left|\omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n\right|\right], \tag{16}$$

формулу (15) можно преобразовать очевидным образом:

$$\sigma_{f^*}^2 = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f(\omega) C_n, \tag{17}$$

где коэффициент C_n, как следует из (15), имеет вид

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \langle w_k(t) w_m(t) \rangle \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t_k - t_m) n. \tag{18}$$

Относительно коэффициентов C_n целесообразно сделать следующее замечание: так как сигнал $f(t)$ со спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega| \le \pi/\Delta$, восстанавливается фильтром (1) без искажений, то коэффициенты C_n при $n = \overline{-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}}$ будут иметь вид

$$C_n = N\Delta, \tag{19}$$

а при индексе суммирования $|n| > \frac{N-1}{2}$

$$C_n \ge N\Delta. \tag{20}$$

Из соотношений (19) и (20) можно записать соотношение (17) в следующем виде:

$$\sigma_{f^*}^2 = \sigma_f^2 + \delta\sigma_f^2 = \sigma_f^2 + \frac{1}{N\Delta} \sum_{|n| > \frac{N-1}{2}} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f(\omega)(C_n - N\Delta). \tag{21}$$

Величина $\delta\sigma_f^2$ является обусловленным неравномерностью дискретизации приращением дисперсии выходного сигнала $f^*(t)$ фильтра (1) по сравнению с дисперсией сигнала $f(t)$ на его входе.

Взаимная корреляция между входом $f(t)$ и выходом $f^*(t)$ фильтра (1). Для этой величины можно записать следующее очевидное соотношение:

$$\langle f(t) f^*(t) \rangle = \sigma_f^2 \sum_{k=0}^{N-1} w_k(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - t_k - nN\Delta) \rho_f(t - t_k - nN\Delta). \tag{22}$$

Если перейти рассмотренным выше способом в частотную область, то

$$\langle f(t) f^*(t) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta} n\right) \sum_{k=0}^{N-1} w_k(t) \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t - t_k) n. \tag{23}$$

После вычисления среднего значения выражения (23) на периоде нестационарности $N\Delta$ с учетом формулы (16) придем к следующему соотношению:

$$\langle ff^* \rangle = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle w_k(t) \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t - t_k)n \right\rangle. \tag{24}$$

Заметим, что отсчетная функция $w_k(t)$, являясь периодической, содержит гармоники от нулевой до максимальной с частотой $\frac{2\pi}{N}\frac{N-1}{2}$. Поэтому суммирование по индексу n ограничивается по модулю величиной $\frac{N-1}{2}$ и, следовательно,

$$\langle ff^* \rangle = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle w_k(t) \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t - t_k)n \right\rangle. \tag{25}$$

В соотношении (25) суммарная полоса частот оказывается симметричной относительно нуля и равной величине $\frac{2\pi}{\Delta}$. Так как в этой полосе теорема (1) обеспечивает точное восстановление сигнала, то выполняется условие

$$\frac{1}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \left\langle w_k(t) \cos \frac{2\pi}{N\Delta}(t - t_k)n \right\rangle = 1 \qquad \left(n = \overline{-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}} \right), \tag{26}$$

и соотношение (25) приводится к окончательному виду:

$$\langle ff^* \rangle = \int\limits_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} d\omega S_f(\omega). \tag{27}$$

Дисперсия ошибки реконструкции сигнала $f(t)$ фильтром (1), обусловленная его неравномерной дискретизацией. Соотношение для этой величины на основании формул (6), (21) и (27) выглядит следующим образом:

$$\langle \varepsilon_f^2 \rangle = 2 \int\limits_{|\omega| > \pi/\Delta} d\omega S_f(\omega) + \delta\sigma_f^2, \tag{28}$$

где неотрицательная величина $\delta\sigma_f^2$ определяется выражением (21).

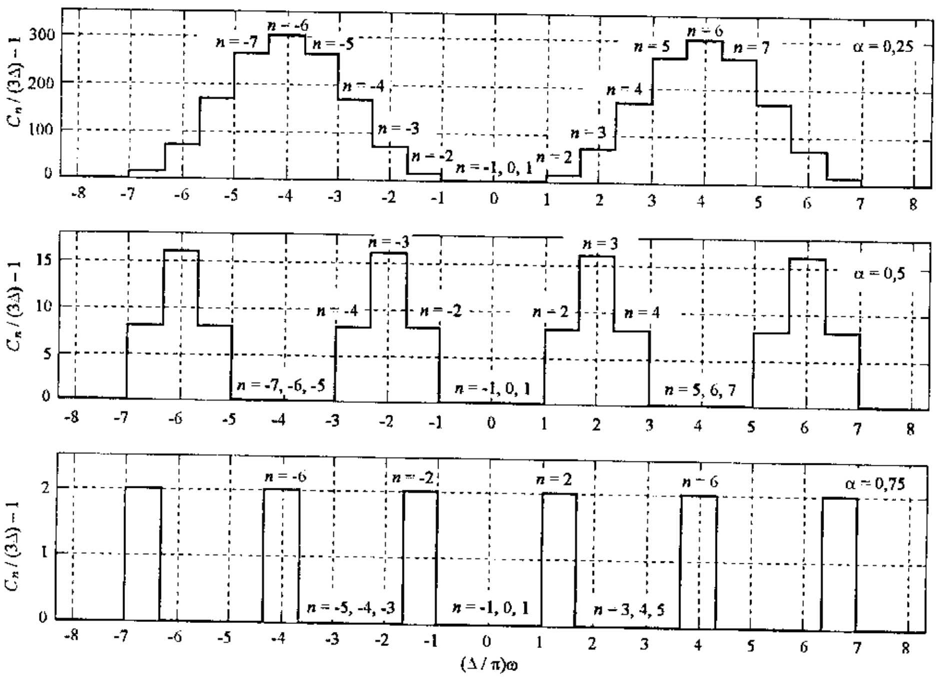
Дисперсия ошибки реконструкции сигнала $f(t)$ фильтром (1), обусловленная аддитивным амплитудным шумом $\varphi(t)$. Очевидно, что эта величина определяется соотношением (21):

$$\langle\varepsilon_\varphi^2\rangle = \sigma_\varphi^2 + \delta\sigma_\varphi^2 = \sigma_\varphi^2 + \frac{1}{N\Delta}\sum_{|n|>\frac{N-1}{2}} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n-\frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n+\frac{\pi}{N\Delta}} d\omega\, S_\varphi(\omega)(C_n - N\Delta). \qquad (29)$$

Чтобы оценить влияние неравномерности дискретизации на дисперсию ошибки воспроизведения сигнала, рассмотрим простой пример, когда моменты дискретизации образуют последовательность $t_{kn} = k\alpha\Delta + nN\Delta$, где $\alpha \le 1$, т. е. моменты дискретизации периодически сгущаются, следуя с интервалом $\alpha\Delta$. Положим величину $N = 3$. Тогда, как показывают расчеты,

$$\frac{C_n}{N\Delta} - 1 = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{3}\alpha - 1/2}{\cos^2\frac{\pi}{3}\alpha\cdot\sin^4\frac{\pi}{3}\alpha}\sin^2\frac{\pi}{3}\alpha n\cdot\sin\frac{\pi}{3}\alpha(n-1)\cdot\sin\frac{\pi}{3}\alpha(n+1). \qquad (30)$$

Из этого соотношения следует, что при значении коэффициента α, равном единице, т. е. при равномерной дискретизации, величины $\delta\sigma_f^2$ и $\delta\sigma_\varphi^2$ равны нулю. Величина, определяемая выражением (30), равна нулю в полосе частот $|\omega| < \pi/\Delta$ и, кроме того, является периодической функцией частоты. В соответствии с формулой (30) на рисунке представлены зависимости множителя,



с которым нужно интегрировать спектральные плотности $S_f(\omega)$ и $S_\varphi(\omega)$, чтобы определить приращения дисперсий ошибок $\delta\langle\varepsilon_f^2\rangle$ и $\delta\langle\varepsilon_\varphi^2\rangle$ по сравнению с равномерной дискретизацией. Из этого рисунка, а также из соотношения (30) следует, что при $\alpha \to 0$ эти приращения неограниченно возрастают, если спектральные плотности сигнала или шума вне полосы частот $|\omega| > \pi/\Delta$ отличны от нуля.

Заключение. Полученные в работе аналитические соотношения позволяют оценить дисперсию ошибки восстановления сигнала с неограниченным по частоте спектром при его периодически неравномерной дискретизации, используя для его восстановления теорему отсчетов Йена [2]. Эти соотношения дают возможность связать величину дисперсии со скоростью убывания спектров мощности сигнала и шума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М.** Влияние амплитудных шумов на точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 1999. № 5. С. 52.
2. **Yen J. L.** On nonuniform sampling on bandwidth limited signal // Trans. IRE. 1956. **CT-3**.
3. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Методы теории целых функций в радиотехнике, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
30 апреля 2002 г.

135