РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2003, том 39, № 1

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов, В. К. Фищенко

(Владивосток)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ТРЕНДА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Получены соотношения между сглаживающими окнами и базисом вейвлет-преобразования. Предложена модификация оценки тренда с дополнительным слагаемым, компенсирующим смещение и минимизирующим среднеквадратическую ошибку оценки. Показано, что компенсация смещения является вейвлет-преобразованием наблюдаемого процесса. Разработан алгоритм вычисления оценки тренда.

Введение. Проблема оценивания тренда случайного процесса, известная как выделение полезного сигнала, оценивание математического ожидания нестационарного случайного процесса, сглаживание случайного процесса представляет не только самостоятельный интерес, но и имеет значение для оценивания других статистических характеристик случайных процессов. Например, оценивание спектральной плотности стационарного процесса сводится к оцениванию математического ожидания периодограммы. Наблюдаемый процесс $x(t)$ в задачах оценивания тренда обычно представляется аддитивной моделью: $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) = \mathbf{M}x(t)$ – математическое ожидание (тренд) процесса $x(t)$; $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания; $n(t)$ – помеха, имеющая нулевое среднее $\mathbf{M}n(t) = 0$. Большое число публикаций по этому вопросу обусловлено разнообразием критериев качества и априорных сведений относительно функций $s(t)$ и $n(t)$ в постановке задачи. Так, рассматривались полиномиальные, циклические, нелинейные тренды. Обычно предполагается, что помеха является нормальным случайным процессом. Часто налагается условие медленного изменения во времени функции $s(t)$ по сравнению с помехой $n(t)$. Во многих работах исследовался метод, основанный на разбиении интервала наблюдения на короткие отрезки с последующим выделением тренда на каждом отрезке по критерию наименьших квадратов. Этот же подход приводит к аппроксимации тренда линейными, квадратичными сплайнами и т. д. В приложениях широко применялся метод сглаживающих окон.

Анализ большого числа публикаций показывает, что известные решения этой проблемы имеют общий недостаток, состоящий в наличии в алгоритмах оценивания параметров, значения которых выбираются исследователем на основе своего опыта и от которых существенно зависит ошибка оценки. Например, в методе сглаживающих окон таким параметром является эффективная ширина сглаживающего окна, в методе аппроксимации сплайнами – длина короткого отрезка, в представлении тренда полиномом – степень полинома. Оценка тренда будет сильно сглаженной, если выбрать слишком большой эффективную ширину сглаживающего окна, или большой длину отрезка в методе аппроксимации сплайнами, или слишком малой степень полинома в модели тренда. При этом дисперсия оценки тренда будет малой, но ее среднеквадратическая ошибка может быть большой за счет значительного смещения. В противном случае ошибка может быть большой за счет значительной дисперсии.

В данной работе получены соотношения, связывающие сглаживающие окна и базис вейвлет-преобразования. Предложена оптимальная оценка тренда с компенсацией смещения, минимизирующей среднеквадратическую ошибку при условии медленного изменения во времени тренда по сравнению с помехой. Показано, что компенсация смещения является вейвлет-преобразованием наблюдаемого процесса. Разработан алгоритм вычисления оценки тренда.

Метод сглаживающих окон. Задачу оценивания тренда методом сглаживающих окон можно рассматривать как частный случай задачи оптимальной линейной фильтрации в постановке Винера, основные положения которой состоят в следующем [1]. Пусть полезный сигнал $s(t)$ и помеха $n(t)$ – случайные процессы. Линейная оценка $s_0(t)$ полезного сигнала $s(t)$ определяется соотношением:

$$s_0(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} h(t,\tau)x(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где $h(t,\tau)$ – сглаживающее окно, а $[t_0, t_0+T]$ – интервал наблюдения. На классе оценок вида (1) находится оптимальная, минимизирующая среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon^2(t) = \mathbf{M}[s_0(t) - s(t)]^2 \to \min_h. \qquad (2)$$

Решением этой задачи является функция h, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{M}s(t)x(u) = \int_{t_0}^{t_0+T} h(t,\tau)\mathbf{M}x(\tau)x(u)d\tau, \qquad (3)$$

где $\mathbf{M}x(\tau)x(u)$ – корреляционная функция наблюдаемого процесса и $\mathbf{M}s(t)x(u)$ – взаимная корреляционная функция процессов $s(t)$ и $x(u)$. Известно, что уравнение (3) является необходимым [2] и достаточным [1] условием для того, чтобы среднеквадратическая ошибка линейной оценки $s_0(t)$ достигала минимального значения. Очевидно, в частном случае для детерминированного полезного сигнала $s(t)$ и нулевого математического ожидания помехи $\mathbf{M}n(t)=0$ задача оптимальной линейной фильтрации (1)–(3) сводится к задаче оптимального линейного оценивания тренда. При этом $\mathbf{M}s(t)x(u) = s(t)\mathbf{M}x(u) = s(t)s(u)$, т. е. соотношение (3) содержит неизвестную функцию $s(t)$, поэтому его невозможно использовать как уравнение для нахождения оптимального окна h.

В связи с этим для вычисления оценки (1) используется любая функция $h(t,\tau)=h(t-\tau)$, зависимая от аргументов t и τ через их разность и удовлетворяющая условиям

$$h(t,\tau)=\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}k(\tau)d\tau=1, \qquad c_2=\int_{-\infty}^{\infty}k^2(\tau)d\tau<\infty, \tag{4}$$

где параметр α является эффективной шириной сглаживающего окна; функция $k(\tau)$ определяет форму окна. Основная проблема оценивания тренда сводится к выбору оптимального значения параметра α, минимизирующего ошибку. Для выбора функции $k(\tau)$ не найдены строгие критерии, ее выбирают достаточно простой, обычно четной. Часто применяется гауссова функция $k(\tau)=\exp(-\tau^2/2)/\sqrt{2\pi}$, при этом $c_2=1/(2\sqrt{\pi})$. Отметим, что явная зависимость (4) функции h от α не накладывает каких-либо ограничений на h и не помогает решению проблемы. Действительно, решение задачи

$$\varepsilon^2=\mathbf{M}(s_0-s)^2\to\min_{\alpha},$$

где s_0 определяется формулой (1) и h – формулой (4), сводится к условию $\partial\varepsilon^2/\partial\alpha=0$, откуда, как несложно показать, следует уравнение (3) относительно h. При этом параметр $\alpha=\alpha(t)$ в общем является функцией аргумента t и решение уравнения (3) не может быть представлено как функция только разности $t-\tau$.

Сглаживающие окна и вейвлет-преобразование. Пусть функция $h(\tau)$ является сглаживающим окном, удовлетворяющим условиям (4), тогда функция

$$h_L(t,\tau)=h(t-\tau)-\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\upsilon)h(\upsilon-\tau)d\upsilon \tag{5}$$

образует базис вейвлет-преобразования. Действительно, функция h_L обладает следующими основными свойствами вейвлета.

1. Функция $h_L(t,\tau)=h_L(t-\tau)$ зависит от разности своих аргументов. Это следует из (5), если заменить переменную интегрирования υ на $z=\upsilon-\tau$, $dz=d\upsilon$ и затем разность $t-\tau$ обозначить через τ:

$$h_L(\tau)=h(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau-z)h(z)dz. \tag{6}$$

2. Функция $h_L(\tau)$ локализована: $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}h_L(\tau)=0$, поскольку локализованы $h(\tau)$, а также свертка – второе слагаемое соотношения (6).

3. Функция $h_L(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_L(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}dz\,h(z)\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,h(\tau-z)=1-\int_{-\infty}^{\infty}h(z)dz=0, \tag{7}$$

которое в литературе принято называть нулевым средним h_L [3, 4]. Таким образом, функцию h_L можно использовать как базис вейвлет-преобразования.

Вычислим норму $\|h_L(\tau)\|$ функции h_L. Из (6) и (4) следует

$$\|h_L(\tau)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}h_L^2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}k^2\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau-2\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{\tau-z}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{z}{\alpha}\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{\tau-z}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}k\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right]^2. \qquad (8)$$

Введем обозначения

$$c_3=\int_{-\infty}^{\infty}dy\,k(y)\int_{-\infty}^{\infty}dx\,k(y-x)k(x),\qquad c_4=\int_{-\infty}^{\infty}dy\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\,k(y-x)k(x)\right]^2. \qquad (9)$$

В соотношении (8) перейдем к новым переменным интегрирования: $y=\tau/\alpha$, $dy=d\tau/\alpha$, $x=z/\alpha$, $dx=dz/\alpha$. Тогда (8) принимает вид

$$\|h_L(\tau)\|^2=\frac{1}{\alpha}(c_2-2c_3+c_4)=\frac{c_5}{\alpha}. \qquad (10)$$

Используем принятое в [3, 4] обозначение базиса вейвлет-преобразования

$$\psi_{\alpha b}(\tau)=\sqrt{\frac{\alpha}{c_5}}\,h_L(\tau-b), \qquad (11)$$

где α – масштабный коэффициент (эффективная ширина окна), а b – параметр сдвига. Из (10) следует $\|\psi_{\alpha b}(\tau)\|=1$. Соотношение (6) подставим в (11), затем представим функцию h через k по формуле (4) и введем $\upsilon=z/\alpha$, $d\upsilon=dz/\alpha$, тогда

$$\psi_{\alpha b}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\alpha c_5}}\left[k\left(\frac{\tau-b}{\alpha}\right)-\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\frac{\tau-b}{\alpha}-\upsilon\right)k(\upsilon)d\upsilon\right]. \qquad (12)$$

Базис вейвлет-преобразования $\psi_{\alpha b}(\tau)$ определяется «материнским» вейвлетом $\psi(\tau)$ путем масштабных преобразований и сдвигов [3]:

$$\psi_{\alpha b}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\psi\left(\frac{\tau-b}{\alpha}\right). \qquad (13)$$

Из (12), (13) следует, что функции h_L (6) соответствует «материнский» вейвлет

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{c_5}}\left[k(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k(t-\upsilon)k(\upsilon)d\upsilon\right]. \qquad (14)$$

Для гауссовой функции $k(t)$ несложные вычисления дают

$$c_3 = 1/\sqrt{6\pi}, \quad c_4 = 1/\sqrt{8\pi}, \quad c_5 = c_2 - 2c_3 + c_4 = (1/\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + 1/2)/\sqrt{2\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\upsilon)k(\upsilon)d\upsilon = \exp(-t^2/4)/(2\sqrt{\pi}),$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c_5}}\left(e^{-t^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t^2/4}\right). \tag{15}$$

Вторая форма вейвлет-базиса. Существует более простая, чем (5), формула, определяющая вейвлет через сглаживающее окно. Пусть $h(\tau)$ – сглаживающее окно, удовлетворяющее условиям (4), тогда функция

$$h_D(t) = \kappa h(\kappa t) - h(t), \quad \kappa > 1, \tag{16}$$

образует базис вейвлет-преобразования. Действительно, функция $h_D(t)$ локализована, поскольку локализована функция $h(t)$ и ее среднее

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_D(t)dt = \kappa\int_{-\infty}^{\infty} h(\kappa t)dt - 1 = \begin{cases} 0, & \kappa > 0, \\ -2, & \kappa < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если $\kappa = 1$, то $h_D(t) = 0$. Таким образом, функция $h_D(t)$ является вейвлетом при любых значениях параметра $\kappa > 0$, $\kappa \neq 1$. Покажем, что в (16) достаточно рассматривать значения $\kappa > 1$. Обозначим $h_D(t;\alpha,\kappa) = h_D(t)$, указывая на явную зависимость функции h_D от параметров α и κ. Пусть $\alpha' = \alpha/\kappa, \kappa' = 1/\kappa$, тогда (16) преобразуется следующим образом:

$$h_D(t;\alpha,\kappa) = \frac{\kappa}{\alpha}k\left(\kappa\frac{t}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}k\left(\frac{t}{\alpha}\right) = -\left[\frac{\kappa'}{\alpha'}k\left(\kappa'\frac{t}{\alpha'}\right) - \frac{1}{\alpha'}k\left(\frac{t}{\alpha'}\right)\right] = -h_D(t;\alpha',\kappa'). \tag{18}$$

Таким образом, вейвлет-преобразование с базисом вида (16) и параметрами α и $0 < \kappa < 1$ равно (со знаком минус) этому же преобразованию с параметрами $\alpha' = \alpha/\kappa$ и $\kappa' = 1/\kappa$, причем $\alpha' > \alpha$, $\kappa' > 1$. Поэтому область $0 < \kappa < 1$ допустимых значений параметра κ дублирует область $\kappa > 1$, и в (16) достаточно ограничиться одной из областей, например $\kappa > 1$. Из (16) следует $h_D(0) = (\kappa - 1)h(0)$, поэтому при выборе $\kappa > 1$ число $h_D(0)$ имеет тот же знак, что и число $h(0)$. Вычислим $\|h_D\|$ – норму функции $h_D(t)$:

$$\|h_D\|^2 = \kappa^2\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\kappa t)dt - 2\kappa\int_{-\infty}^{\infty} h(\kappa t)h(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}k^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} k^2(z)dz = \frac{c_2}{\alpha}, \tag{20}$$

$$\kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\kappa t)dt = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} h^2(z)dz = \kappa \frac{c_2}{\alpha},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\kappa t)h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} k\left(\kappa \frac{t}{\alpha}\right) \frac{1}{\alpha} k\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} k(\kappa z)k(z)dz = \frac{1}{\alpha}\gamma(\kappa). \tag{21}$$

Подставим (20), (21) в (19), тогда

$$\|h_D\|^2 = \frac{c_2}{\alpha}\left[\kappa - 2\kappa \frac{\gamma(\kappa)}{c_2} + 1\right]. \tag{22}$$

Если $\kappa \to 1$, то $\gamma(\kappa) \to c_2$, тогда из (22) следует $\|h_D\|^2 \to 0$. Теперь функция $\psi_{ab}(t) = \|h_D\|^{-1} h_D(t-b)$ – это базис вейвлет-преобразования с единичной нормой. Подставим в это выражение формулу (16) и затем используем равенство (4), тогда

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\alpha \|h_D\|}\left[\kappa k\left(\frac{\kappa(t-b)}{\alpha}\right) - k\left(\frac{t-b}{\alpha}\right)\right]. \tag{23}$$

Из (13), (23) следует, что «материнский» вейвлет

$$\psi(t) = \left(\sqrt{\alpha}\ \|h_D\|\right)^{-1} [\kappa k(\kappa t) - k(t)].$$

Линейная оценка тренда с компенсацией смещения и вейвлет-преобразование. Пусть s_0 – оценка тренда (см. формулу (1)) и функция $s(t)$ медленно изменяется во времени по сравнению с помехой $n(t)$. Если выбрать сглаживающее окно h достаточно большой ширины α, то основной вклад в ошибку вносит смещение и малый – дисперсия. Смещение оценки s_0 имеет вид

$$\mathbf{M}s_0(t) - s(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} h(t,\tau)s(\tau)d\tau - s(t) = -\mathbf{L}s(t). \tag{24}$$

Здесь $\mathbf{L}$ – линейный оператор, действующий на s. Выберем функцию $-\mathbf{L}s_0(t)$ в качестве оценки смещения и введем новую оценку тренда $s_1(t) = s_0(t) + \lambda(t)\mathbf{L}s_0(t)$, в которой смещение компенсируется слагаемым $\lambda \mathbf{L}s_0$, а функция $\lambda(t)$ определяется далее из условия минимума среднеквадратической ошибки. Отметим, что $\mathbf{L}s_0$ можно представить через h_L:

$$\mathbf{L}s_0(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} h_L(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{25}$$

$$h_L(t,\tau)=h(t,\tau)-\int_{t_0}^{t_0+T}h(t,\upsilon)h(\upsilon,\tau)d\upsilon. \qquad (26)$$

Длительность анализируемой реализации всегда ограничена интервалом наблюдения $[t_0, t_0+T]$, поэтому вычисление оценки $s_0(t)$ для аргумента t, близкого к t_0 или t_0+T, связано с краевым эффектом, который проявляется в том, что функция $h(t,\tau)$ имеет существенно ненулевые значения для $\tau\notin[t_0, t_0+T]$. Способы снижения краевых эффектов известны в литературе и в данной работе не рассматриваются. Таким образом, если в соотношениях (1), (26) и других не учитывать краевые эффекты, то можно заменить конечный интервал интегрирования на $(-\infty,\infty)$. Это эквивалентно тому, что в соотношениях (1), (26) рассматривается t из области достоверности вейвлет-преобразования [3, 4]. При этом формулы (5) и (26) совпадают. Таким образом, формула (26) – это вейвлет, который является импульсной реакцией фильтра, формирующего оценку $-\mathbf{L}s_0(t)$ смещения оценки $s_0(t)$.

Оптимальная оценка тренда. Оценка s_1 и ее среднеквадратическая ошибка

$$\varepsilon_1^2(t)=\mathbf{M}(s_1(t)-s(t))^2=\mathbf{M}(s_0+\lambda\mathbf{L}s_0-s)^2 \qquad (27)$$

содержат неизвестные параметры α и λ (для любого фиксированного t). Задача поиска оптимальной оценки с минимальной ошибкой на классе оценок s_1 сводится к поиску минимума функции ε_1^2 двух переменных α и λ, что существенно осложняется нелинейной зависимостью ошибки ε_1^2 от параметра α. Поэтому рассмотрим задачу минимизации ε_1^2 по λ при фиксированном α. Используя соотношение (27), находим решение λ_2 уравнения $\partial\varepsilon_1^2/\partial\lambda=0$:

$$\lambda_2(t)=-\frac{\mathbf{M}(s_0-s)\mathbf{L}s_0}{\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2}. \qquad (28)$$

Вторая производная $\partial^2\varepsilon_1^2/\partial\lambda^2=2\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2>0$, поэтому оценка $s_2=s_0+$ $+\lambda_2\mathbf{L}s_0$ имеет минимальную ошибку среди всех оценок вида s_1 для любого α. Определим минимальное значение $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\big|_{\lambda=\lambda_2}$ среднеквадратической ошибки (27). После несложных преобразований получаем

$$\varepsilon_2^2(t)=\mathbf{M}(s_0-s)^2-\frac{[\mathbf{M}(s_0-s)\mathbf{L}s_0]^2}{\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2}=\varepsilon_0^2(t)-\lambda_2^2\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2, \qquad (29)$$

где ε_0^2 – среднеквадратическая ошибка оценки s_0. Отсюда следует, что $\varepsilon_2^2<\varepsilon_0^2$, если $\lambda_2\neq0$ и $\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2\neq0$. Известно неравенство $[\mathbf{M}(s_0-s)\mathbf{L}s_0]^2\leq$ $\leq\mathbf{M}(s_0-s)^2\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2$. Если $[\mathbf{M}(s_0-s)\mathbf{L}s_0]^2$ достигает своего максимального значения $\mathbf{M}(s_0-s)^2\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2$, тогда из (29) следует $\varepsilon_2^2=0$. Это свойство ошибки ε_2^2 позволяет сформулировать далее критерий выбора параметра α как условие максимума по α функции $\mathbf{M}(s-s_0)\mathbf{L}s_0$.

Пусть $s_0=\bar{x}$ (см. формулу (1)), где $\bar{x}$ – сглаженный с весом h наблюдаемый процесс. Тогда $s_0=\bar{s}+\bar{n}$. Представим выражения, входящие в (29), через сглаженный сигнал $\bar{s}$ и сглаженную помеху $\bar{n}$. Учитывая, что $\mathbf{M}\bar{n}=0$, получаем следующие равенства:

$$\mathbf{M}(s_0-s)^2=\mathbf{M}(-\mathbf{L}s+\bar{n})^2=(\mathbf{L}s)^2+\mathbf{M}(\bar{n})^2, \tag{30}$$

$$\mathbf{M}(s_0-s)\mathbf{L}s_0=\mathbf{M}(-\mathbf{L}s+\bar{n})(\mathbf{L}\bar{s}+\mathbf{L}\bar{n})=-\mathbf{L}s\mathbf{L}\bar{s}+\mathbf{M}\bar{n}\mathbf{L}\bar{n}, \tag{31}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{L}s_0)^2=\mathbf{M}(\mathbf{L}\bar{s}+\mathbf{L}\bar{n})^2=(\mathbf{L}\bar{s})^2+\mathbf{M}(\mathbf{L}\bar{n})^2. \tag{32}$$

Подставим соотношения (30)–(32) в (29), тогда

$$\varepsilon_2^2(t)=(\mathbf{L}s)^2+\mathbf{M}\bar{n}^2-\frac{(-\mathbf{L}s\mathbf{L}\bar{s}+\mathbf{M}\bar{n}\mathbf{L}\bar{n})^2}{(\mathbf{L}\bar{s})^2+\mathbf{M}(\mathbf{L}\bar{n})^2}. \tag{33}$$

Рассмотрим пример. Пусть $s(t)=A\cos(2\pi f_0t+\theta)$ – гармонический сигнал с амплитудой A, частотой f_0 и начальной фазой θ. Тогда для четной функции $h(\tau)$ без учета краевых эффектов $\bar{s}=sH(f_0)$, где $H(f)$ – фурье-образ функции $h(\tau)$. Аналогично $\bar{\bar{s}}=sH^2(f_0)$, $\mathbf{L}s=s(1-H)$, $\mathbf{L}\bar{s}=s(1-H)H$. Таким образом, функции $s,\mathbf{L}s,\mathbf{L}\bar{s}$ отличаются только амплитудой, поэтому положения их экстремумов и нулей совпадают. Пусть параметр α выбран столь большим, что дисперсия сглаженной помехи $\mathbf{M}\bar{n}^2$ – величина малая и в точках экстремумов функций $\mathbf{L}s,\mathbf{L}\bar{s}$ выполняются следующие условия:

$$|\mathbf{L}s\mathbf{L}\bar{s}|\gg|\mathbf{M}\bar{n}\mathbf{L}\bar{n}|,$$

$$(\mathbf{L}\bar{s})^2\gg\mathbf{M}(\mathbf{L}\bar{n})^2.$$

Тогда из (33) следует $\varepsilon_2^2(t)=\mathbf{M}\bar{n}^2$. Отметим, что при этом $\lambda_2=\mathbf{L}s/\mathbf{L}\bar{s}$ и s_2 – несмещенная оценка полезного сигнала, поскольку

$$\mathbf{M}s_2=\mathbf{M}s_0+\lambda_2\mathbf{L}\mathbf{M}s_0=\bar{s}+\lambda_2\mathbf{L}\bar{s}=s.$$

Аналогично для любого t, при котором $s(t)=0$, выполняются условия: $\mathbf{L}s=0$, $\mathbf{L}\bar{s}=0$, поэтому из (33) следует

$$\varepsilon_2^2(t)=\mathbf{M}\bar{n}^2-(\mathbf{M}\bar{n}\mathbf{L}\bar{n})^2/\mathbf{M}(\mathbf{L}\bar{n})^2,$$

$$\varepsilon_2^2(t)\le\mathbf{M}\bar{n}^2.$$

Таким образом, для указанных моментов времени t ошибка $\varepsilon_2^2(t)$ является малой величиной и определяется только дисперсией $\mathbf{M}\bar{n}^2$.

Реализация алгоритма оценивания тренда. Оценку s_2 невозможно использовать для практического вычисления, поскольку в ней содержатся неизвестные параметры α и $\lambda_2(t)$. Так, для вычисления λ_2 по формуле (28) необходимо знать полезный сигнал s, корреляционную функцию помехи, а также параметр α. Построить практический алгоритм на основе оценки s_2 и формулы (28) можно следующим образом. Пусть $\alpha = \alpha_3$, где $\alpha_3 = \arg\max\limits_{\alpha} d(\alpha)$, и

$$d(\alpha) = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - s_0(t)]\mathbf{L}s_0(t)dt. \qquad (34)$$

Покажем, что функция $d(\alpha)$ имеет хотя бы один максимум. Действительно, при малых α оценка s_0 практически не отличается от x, поэтому $x - s_0 = \mathbf{L}x = 0$, а также $s_0 - \bar{s}_0 = \mathbf{L}s_0 = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to 0} d(\alpha) = 0$. При больших значениях α оценка s_0 становится близкой к постоянной, тогда $s_0 = \bar{s}_0$, $\mathbf{L}s_0 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to\infty} d(\alpha) = 0$. Осталось показать, что $d(\alpha) \ge 0$. Если $X(f), H(f)$ – фурье-образы функций $x(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, и $h(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, соответственно, тогда $X(1 - H)$ и $XH(1 - H)$ – фурье-образы функций $x - s_0$ и $\mathbf{L}s_0 = s_0 - \bar{s}_0$. Используя равенство Парсеваля [4] и затем равенство $H(f) = H^*(-f)$ ($*$ – операция комплексного сопряжения), справедливое для вещественной функции $h(\tau)$, из (34) получаем

$$d(\alpha) = \frac{1}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2|1 - H(f)|^2 H(f)df =$$

$$= \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{\infty}|X(f)|^2|1 - H(f)|^2 \operatorname{Re} H(f)df. \qquad (35)$$

При условии $\operatorname{Re} H(f) \ge 0$ из (35) следует $d(\alpha) \ge 0$.

Рассмотрим пример. Пусть $s(t)$ – гармонический сигнал с частотой f_0, параметр α выбирается большим и справедливы два следующих равенства: $\bar{s} = H(f_0)s$, а также в (34)

$$\int(x - s_0)\mathbf{L}s_0 dt = \int\mathbf{L}s\mathbf{L}\bar{s}dt.$$

Тогда

$$d(\alpha) = H(f_0)[1 - H(f_0)]^2 P,$$

где $P > 0$ и не зависит от α. Пусть функция $H(f)$, $f > 0$, – монотонная убывающая, например гауссова, тогда решение уравнения $\partial H(1 - H)^2/\partial H = 0$ относительно $H(f_0)$ однозначно определяет α_3. Из двух решений уравнения интерес представляет $H(f_0;\ \alpha_3) = 1/3$, определяющее максимум $d(\alpha)$, поскольку $\partial^2 H(1 - H)^2/\partial H^2 < 0$ при $H < 2/3$. Следовательно, по критерию максимума $d(\alpha)$ выбирается такое α_3, для которого $\bar{s} = Hs = s/3$. При этом из (28) следует $\lambda_2 = \mathbf{L}s/\mathbf{L}\bar{s} = 1/H(f_0) = 3$. Таким образом, параметр α_3 обеспечивает сильное сглаживание (снижение амплитуды полезного сигнала в 3 раза) и λ_2 не зависит от времени. Функция $d(\alpha)$ может иметь два локальных максимума, соответствующих сигналу и помехе, тогда, очевидно, α_3 – это координата первого максимума функции $d(\alpha)$ со стороны больших значений α.

Пусть $\alpha = \alpha_3$, тогда s_0 – сильно сглаженная оценка и для оптимизации оценки s_1 необходим критерий минимального расстояния между x и s_1. Для независимого от времени λ_3 таким может быть критерий минимума $\lambda_3 = \arg\min\limits_{\lambda}\Omega$, где

$$\Omega = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}[x(t) - s_1(t)]^2\,dt. \tag{36}$$

Подставим $s_1 = s_0 + \lambda\mathbf{L}s_0$ в (36), затем из уравнения $\partial\Omega/\partial\lambda = 0$ найдем решение $\lambda_3 = d/c$, где

$$c = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}[\mathbf{L}s_0(t)]^2\,dt. \tag{37}$$

При этом $\partial^2\Omega/\partial\lambda^2 > 0$, следовательно, $\lambda = \lambda_3$ минимизирует величину Ω. Полученное решение λ_3 аналогично λ_2 (28) при замене статистического среднего в (28) средним по времени.

Заключение. Предлагаемый алгоритм вычисления оценки тренда сводится к выполнению следующих операций.

1. Вычисление функции $d(\alpha)$ и α_3 – координаты ее первого максимума со стороны больших α.
2. Вычисление $\lambda_3 = d(\alpha_3)/c(\alpha_3)$.
3. При $\alpha = \alpha_3$ вычисляется s_0 и затем оценка тренда $s_3 = s_0 + \lambda_3\mathbf{L}s_0$.

Сглаживающее окно $h(\tau)$ рекомендуется выбирать гауссовым. При этом выполняются условия (4), а также следующие дополнительные условия.

1. H – вещественная функция и $H \geq 0$, что обеспечивает $d(\alpha) \geq 0$.
2. $H(f) \neq 0$ для любого $|f| < \infty$. Нарушение этого условия может привести к большой систематической ошибке. Например, пусть $H(f_1) = 0$ для некоторого f_1, тогда гармоника с частотой f_1 подавляется в сигнале $\bar{s}$ и не восстанавливается в сигнале $\bar{s} + \lambda_3\mathbf{L}\bar{s}$, поскольку SH и $SH(1-H)$ – фурье-образы функций $\bar{s}$ и $\mathbf{L}\bar{s}$, где $S(f)$ – фурье-образ функции $s(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$.
3. $H(f)$, $f > 0$, – монотонная убывающая функция.

Если функция $d(\alpha)$ имеет более двух максимумов, то данный алгоритм можно использовать рекуррентно. На первом шаге α определяется по первому максимуму функции $d(\alpha)$ со стороны больших α, вычисляется s_3 – низкочастотная компонента наблюдаемого процесса, затем остаток $x - s_3$ рассматривается как новый наблюдаемый процесс и т. д. Такая процедура выполняет декомпозицию наблюдаемого процесса $x(t)$ на несколько квазигармонических компонент, интерпретация которых определяется постановкой задачи и весьма проста в отличие от вейвлет-преобразования. Очевидно, что алгоритм s_3 – не единственная возможная реализация оценки тренда s_2. Например, другой подход предлагается в работах [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Кн. 2.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 1.
3. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. 166, № 11. С. 1145.
4. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов. С.-Пб.: Изд. ИАП РАН, 1999.
5. **Kuleshov E. L.** Filtrating the mean of nonstationary stochastic processes under conditions of a priori ambiguity // Second IFAC Symposium on Stochastic Control, Vilnius, USSR, 19–23 May, 1986. Moscow, 1986. Pt. 2. P. 93.
6. **Кулешов Е. Л.** Фильтрация среднего нестационарного случайного процесса в условиях априорной неопределенности // Вестник ДВО АН СССР. 1990. № 3. С. 92.

Дальневосточный государственный университет,
Тихоокеанский океанологический институт
им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Поступила в редакцию
2 июля 2002 г.