РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2003, том 39, № 1

УДК 519.234

В. Г. Алексеев

(Звенигород Московской обл.)

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрены непараметрические оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем. Сформулированы уточненные рекомендации, касающиеся построения и вычисления классической периодограммной оценки. Указана возможность использования предлагаемых конструкций в качестве импульсных характеристик дискретных плосковершинных фильтров нижних частот.

Данная работа выполнена в русле предшествующих работ [1–5], посвященных прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов (ССП) с дискретным временем. В ней мы ограничимся рассмотрением классической периодограммной оценки спектральной плотности. В качестве основного результата работы сформулируем уточненные рекомендации, касающиеся построения и вычисления классической периодограммной оценки. Попутно укажем на возможность использования предлагаемых конструкций в качестве импульсных характеристик дискретных плосковершинных фильтров нижних частот.

Перед обсуждением избранного направления прикладного спектрального анализа кратко опишем ядра типа Джексона и их разложения в ряд Фурье. Ядра типа Джексона (конечные тригонометрические полиномы) $J_{l,n}(\mu)$ определяются для любых натуральных l и n соотношением

$$J_{l,n}(\mu) = C_{l,n}\left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)}\right]^{2l}, \tag{1}$$

где $C_{l,n}$ – нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства $\int J_{l,n}(\mu)d\mu = 2\pi$. Здесь (и всюду далее) интеграл без указания пределов обозначает интегрирование по отрезку $\Pi = [-\pi, \pi]$. Для $l = \overline{1,5}$ нормирующие множители $C_{l,n}$ равны

$$\frac{1}{n},\quad \frac{3}{2n^3+n},\quad \frac{20}{11n^5+5n^3+4n},\quad \frac{315}{151n^7+70n^5+49n^3+45n},$$

$$\frac{36288}{15619n^9+7350n^7+5187n^5+4100n^3+4032n}.$$

Ядра $J_{1,n}(\mu)$ и $J_{2,n}(\mu)$ широко известны под названиями «ядра Фейера» и «ядра Джексона». Начиная с $l=3$, принято говорить о ядрах типа Джексона. Объединяя все рассматриваемые нами ядра под общим названием «ядра типа Джексона», мы лишь констатируем их однотипность: каждое из ядер $J_{l,n}(\mu)$ пропорционально l-й степени ядра Фейера $J_{1,n}(\mu)$. Читателю, желающему детально ознакомиться с важнейшими свойствами ядер типа Джексона (включая ядра Фейера и Джексона), рекомендована работа [6, гл. II, § 3].

Наибольший интерес для нас в дальнейшем будут представлять разложения в ряд Фурье ядер типа (1), т. е. коэффициенты $j_{l,n}(k)$ в формуле

$$J_{l,n}(\mu)=\sum_{k=-l(n-1)}^{l(n-1)} j_{l,n}(k)e^{ik\mu}. \tag{2}$$

Для $l=1$ и $l=2$ коэффициенты Фурье ядер типа (1) описываются соотношениями

$$j_{1,n}(k)=1-\frac{|k|}{n}, \quad |k|\le n,$$

$$j_{2,n}(k)=\begin{cases}1-\dfrac{3|k|+6nk^2-3|k|^3}{2n(2n^2+1)}, & \dfrac{|k|}{n}\le 1,\\[2ex] \dfrac{(2n-|k|)[(2n-|k|)^2-1]}{2n(2n^2+1)}, & 1\le\dfrac{|k|}{n}\le 2.\end{cases}$$

Для $l=3;\,4;\,5$ разложения в ряд Фурье ядер типа (1) описываются существенно более громоздкими формулами, приведенными в работах [7, 8, 5] соответственно. Здесь обратим внимание читателя на то обстоятельство, что ядра типа (1) уже сослужили нам добрую службу при рассмотрении оценки спектральной плотности типа Уэлча (см., например, [5]). Далее покажем, что их применение при построении классической периодограммной оценки оказывается не менее плодотворным.

Итак, пусть $\{X(k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс со средним $\langle X(k)\rangle\equiv 0$, корреляционной функцией $r(k)=$ $=\langle X(j)X(j+k)\rangle$ и спектральной плотностью

$$f(\omega)=(2\pi)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-ik\omega}r(k), \quad \omega\in\Pi=[-\pi,\pi].$$

Пусть требуется по N последовательным отсчетам ССП $X(k)$ оценить спектральную плотность $f(\omega)$ в заданной точке $\omega=\omega_0\in[0,\pi]$. Классическая периодограммная оценка величины $f(\omega_0)$ строится в виде

$$f_N(\omega_0)=\int A_N(\omega)I_N(\omega_0+\omega)d\omega. \tag{3}$$

Здесь $I_N(\omega)$ – периодограмма, определяемая соотношением

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} X(k) e^{ik\omega} \right|^2,$$

а функция $A_N(\omega)$, $\omega \in \Pi$, называемая спектральным окном, четна, ограничена и нормируется условием

$$\int A_N(\omega)\, d\omega = 1.$$

Предполагается, что функция $A_N(\omega)$ может быть представлена в виде

$$A_N(\omega) = h_N^{-1} w(\omega/h_N),$$

где h_N – некоторая числовая последовательность, такая, что $0 < h_N \le \pi$ для всех натуральных N и

$$h_N + (Nh_N)^{-1} \to 0 \quad (N \to \infty),$$

а весовая функция $w(x)$ четна, ограничена и удовлетворяет условиям

$$w(x) = 0, \quad \text{если } |x| \ge 1, \tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, dx = 1. \tag{5}$$

Функция $w(x)$ и величина $2h_N$ определяют соответственно форму и ширину спектрального окна $A_N(\omega)$.

Четное число $r \ge 2$ назовем порядком весовой функции $w(x)$, если она в дополнение к условиям (4) и (5) удовлетворяет соотношению

$$\int_{-1}^{1} x^j w(x)\, dx = \begin{cases} 0, & j = \overline{1, r-1}, \\ c \ne 0, & j = r. \end{cases} \tag{6}$$

Как указано в работах [2–4], применение весовых функций высших порядков (т. е. порядков $r > 2$) может обеспечить очень большой выигрыш в точности оценивания, если только а) объем выборки N не слишком мал и б) оцениваемая спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией.

Пусть $N \gg 1$ и $w(x)$ – весовая функция избранного нами порядка $r > 2$. При вычислении оценки $f_N(\omega_0)$ интеграл в правой части формулы (3) неизбежно заменяется интегральной суммой. При этом соотношение (6) для четных j, не превосходящих $r-2$, будет выполняться уже не точно, а приближенно, и эффект (уменьшение смещения оценки $f_N(\omega_0)$), ожидаемый нами от применения весовой функции $w(x)$ порядка $r > 2$, может быть не достигнут. К погрешностям подобного рода особенно чувствительны оценки, отвечающие тем значениям параметра r, которые по крайней мере втрое превосходят его минимальное значение 2. Естественным образом мы приходим к необходимости замены весовой функции $w(x)$ набором весовых коэффициентов $\{w(k)\}$, удовлетворяющих условиям $w(-k)=w(k)$:

$$\sum_k w(k)=1, \tag{7}$$

$$\sum_k k^j w(k)=0, \quad j=\overline{1,r-1}. \tag{8}$$

Для $r=4$ и $r=6$ наборы весовых коэффициентов, удовлетворяющих условиям (7) и (8), могут быть найдены в [9, § 2.2]. Далее приведены новые наборы весовых коэффициентов $\{w(k)\}$, удовлетворяющих условиям (7) и (8), для $r=4; 6; 8; 10$.

Для $l=1,\ldots,5$ и $n=1,2,\ldots$ положим

$$q_{l,n}(k)=j_{l,n}(k)/(n^{2l}C_{l,n}).$$

Очевидно, для $|k|\geq nl$ все величины $q_{l,n}(k)$ тождественно равны нулю, и в соответствии с (1) и (2)

$$\sum_{k=-l(n-1)}^{l(n-1)} q_{l,n}(k)\mathrm{e}^{ik\mu}=\varphi_n^l(\mu), \tag{9}$$

где

$$\varphi_n(\mu)=\left[\frac{\sin(n\mu/2)}{n\sin(\mu/2)}\right]^2.$$

Предлагаемые нами наборы весовых коэффициентов $\{w_{r,n}(k)\}$ описываются соотношениями

$$w_{4,n}(k)=2q_{1,n}(k)-q_{2,n}(k),$$

$$w_{6,n}(k)=3q_{1,n}(k)-3q_{2,n}(k)+q_{3,n}(k),$$

$$w_{8,n}(k)=4q_{1,n}(k)-6q_{2,n}(k)+4q_{3,n}(k)-q_{4,n}(k),$$

$$w_{10,n}(k)=5q_{1,n}(k)-10q_{2,n}(k)+10q_{3,n}(k)-5q_{4,n}(k)+q_{5,n}(k).$$

Пусть

$$W_{r,n}(\mu)=\sum_k w_{r,n}(k)\mathrm{e}^{ik\mu}, \quad r=4;\ 6;\ 8;\ 10. \tag{10}$$

Тогда в соответствии с (9)

$$W_{4,n}(\mu)=2\varphi_n(\mu)-\varphi_n^2(\mu),$$

$$W_{6,n}(\mu)=3\varphi_n(\mu)-3\varphi_n^2(\mu)+\varphi_n^3(\mu),$$

$$W_{8,n}(\mu)=4\varphi_n(\mu)-6\varphi_n^2(\mu)+4\varphi_n^3(\mu)-\varphi_n^4(\mu),$$

$$W_{10,n}(\mu)=5\varphi_n(\mu)-10\varphi_n^2(\mu)+10\varphi_n^3(\mu)-5\varphi_n^4(\mu)+\varphi_n^5(\mu).$$

Дифференцируя функции $W_{r,n}(\mu)$, находим

$$\frac{d^j}{d\mu^j}W_{r,n}(\mu)\bigg|_{\mu=0}=0,\quad j=1,2,\ldots,r-1. \tag{11}$$

В соответствии с (10) это как раз и означает, что предлагаемые нами наборы коэффициентов $\{w_{r,n}(k)\}$ удовлетворяют соотношению (8). Так как $W_{r,n}(0)=1$ для всех $r=4;6;8;10$, соотношение (7) для наборов $\{w_{r,n}(k)\}$ также выполняется. При заданном r параметр n определяет ширину спектрального окна: число отличных от нуля коэффициентов $w_{r,n}(k)$ равно $r(n-1)+1$.

Замечание 1. Легко видеть, что формулы, определяющие предлагаемые нами наборы $\{w_{r,n}(k)\}$, не содержат никаких неопределенностей типа бесконечных сумм, интегралов или специальных функций. Кроме того, в табл. 1 каждой из работ [10, 7, 8, 11] приведены для $l=2;3;4;5$ точные значения величин $n^{2l}q_{l,n}(k)$ для ряда значений n, равных целой положительной степени числа 2. Тем самым читателю предоставляется возможность в ряде случаев существенно ускорить вычисление интересующего его набора весовых коэффициентов $\{w_{r,n}(k)\}$.

Замечание 2. Применительно к теории линейных преобразований стационарных случайных процессов каждый из предлагаемых нами наборов $\{w_{r,n}(k)\}$ может рассматриваться как импульсная характеристика дискретного плосковершинного фильтра нижних частот. В этом случае функция $W_{r,n}(\omega)$, $\omega\in\Pi$, является амплитудно-частотной характеристикой фильтра, параметр r в соответствии с (11) характеризует «степень плосковершинности» фильтра, а параметр n при заданном r определяет длину импульсной характеристики. При этом большему n соответствует более узкая полоса пропускания фильтра. В качестве частоты среза ω_c, отвечающей избранному нами фильтру $w_{r,n}(k)$, может быть принята величина $\pi A_{r,n}$, где

$$A_{r,n}=\sum_k w_{r,n}^2(k).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. 1980. **16**, № 1. С. 42.
2. **Алексеев В. Г.** К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия. 1986. № 1. С. 3.
3. **Алексеев В. Г.** Выбор спектрального окна при построении оценки спектральной плотности // Радиотехника. 1999. № 9. С. 38.
4. **Алексеев В. Г.** О непараметрических оценках спектральной плотности // Радиотехника и электроника. 2000. **45**, № 2. С. 185.
5. **Алексеев В. Г.** Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91.

6. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

7. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. **30**, № 1. С. 97.

8. **Алексеев В. Г.** Полиномиальные тригонометрические ядра и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1996. **32**, № 4. С. 16.

9. **Поляк И. И.** Методы анализа случайных процессов и полей в климатологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1979.

10. **Алексеев В. Г.** О некоторых новых линейных цифровых фильтрах // Радиотехника и электроника. 1996. **41**, № 2. С. 206.

11. **Алексеев В. Г.** Новые дискретные фильтры нижних частот // Радиотехника. 2002. № 6. С. 44.

Институт физики атмосферы РАН

Поступила в редакцию
3 сентября 2002 г.