

С. Н. Кириллов, С. Н. Бузыкканов

(Рязань)

АЛГОРИТМ ДИСКРЕТНОГО
СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ
В МОДИФИЦИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Разработан алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 . Доказана идентичность понятий спектров сигналов в пространствах W_2^1 и L_2 . Показана более высокая точность представления спектра дискретного сигнала в пространстве W_2^1 , чем в пространстве L_2 , при частоте дискретизации меньше частоты Котельникова.

В различных радиотехнических системах применяется цифровой спектральный анализ сигналов на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ), теория которого была развита в работах [1, 2] и других. Алгоритм цифрового спектрального анализа требует предварительной дискретизации сигнала с ограниченным в полосе частот $0 - F$ спектром с частотой дискретизации, заданной по теореме Котельникова $F_k = 2F$ [3]. ДПФ сигнала в этом случае имеет периодическую структуру по частоте с периодом $2F$. При изменении верхней граничной частоты спектра сигнала выбор частоты дискретизации должен производиться исходя из максимально возможного значения частоты $F = F_{\max}$. В противном случае при частоте дискретизации $\Omega_1 < 2F_{\max}$ появляются искажения вычисляемого спектра и соответственно погрешности восстановления сигнала. Кроме того, в этом случае появляются погрешности, вызванные эффектом «наложения спектров» [2]. С другой стороны, для сигналов с верхней граничной частотой $F < F_{\max}$ выбранная частота дискретизации $\Omega_2 = 2F_{\max}$ является избыточной, что снижает эффективность алгоритмов цифрового спектрального анализа. По этой причине представляет интерес разработка алгоритмов дискретного спектрального анализа сигналов, менее критичных к выбору частоты дискретизации $\Omega < 2F_{\max}$, чем алгоритм ДПФ в пространстве L_2 .

Целью работы является создание алгоритма дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 и исследование его свойств. Как известно [4], преобразование Фурье сигнала $f(t)$, определенного в пространстве L_2 , существует, если выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (1)$$

ограничивающее его энергию. Представление сигнала $f(t)$ в пространстве Соболева W_2^1 требует определения понятия скалярного произведения, нормы и расстояния, которые вводятся в следующем виде [5]:

$$(f(t), g(t))_W = \int_T f(t)g(t)dt + \int_T [df(t)/dt][dg(t)/dt]dt, \quad (2)$$

$$\|f(t)\|_W^2 = \int_T |f(t)|^2 dt + \int_T |df(t)/dt|^2 dt, \quad (3)$$

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_T (f(t) - g(t))^2 dt + \int_T (d(f(t) - g(t))/dt)^2 dt}. \quad (4)$$

Пространство W_2^1 является гильбертовым, т. е. обладает следующими свойствами [4]:

- 1) суть евклидово пространство (т. е. линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением);
- 2) полное в смысле метрики $\rho(f, g) = \|f - g\|$;
- 3) бесконечномерно, т. е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов.

Представление сигнала $f(t)$ в пространстве Соболева W_2^1 требует выполнения условия (1) и условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |df(t)/dt|^2 dt < \infty, \quad (5)$$

ограничивающего энергию его производной. Введем модифицированное пространство Соболева, представив скалярное произведение сигналов $f(t)$ и $g(t)$ в виде

$$(f(t), g(t))_W = (1 - \alpha) \int_T f(t)g(t)dt + \alpha \int_T [df(t)/dt][dg(t)/dt]dt, \quad (6)$$

где $0 \leq \alpha < 1$. При $\alpha = 0$ выражение (6) соответствует скалярному произведению сигналов в пространстве L_2 , а при $\alpha = 0,5$ – скалярному произведению сигналов в пространстве W_2^1 [5].

Для получения алгоритма дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева воспользуемся известным [1, 2] представлением непрерывной, периодической на отрезке времени $[0, T]$ функции $f(t)$, удовлетворяющей условию Дирихле, в ряд Фурье:

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\Omega t).$$

Используя выражение (6) для скалярного произведения функций $f(t)$ и $\cos(n\Omega t)$ в пространстве W_2^1 и изменяя порядок суммирования и интегрирования, получим формулу для определения коэффициентов

$$b_n = \frac{2}{T((1-\alpha) + \alpha(n\Omega)^2)} \times \\ \times \left[(1-\alpha) \int_T f(t) \cos(n\Omega t) dt - \alpha n\Omega \int_T \frac{df(t)}{dt} \sin(n\Omega t) dt \right]. \quad (7)$$

Аналогично при скалярном умножении функций $f(t)$ на $\sin(n\Omega t)$ получим формулу для определения коэффициентов

$$a_n = \frac{2}{T((1-\alpha) + \alpha(n\Omega)^2)} \times \\ \times \left[(1-\alpha) \int_T f(t) \sin(n\Omega t) dt + \alpha n\Omega \int_T \frac{df(t)}{dt} \cos(n\Omega t) dt \right]. \quad (8)$$

С учетом формул Эйлера при разложении функции $f(t)$ в комплексный ряд Фурье в пространстве W_2^1 :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\Omega t) \quad (9)$$

получим следующее выражение для коэффициентов

$$C_n = \frac{1}{T((1-\alpha) + \alpha(n\Omega)^2)} \int_T \left[(1-\alpha)f(t) - j\alpha n\Omega \frac{df(t)}{dt} \right] e^{-jn\Omega t} dt, \quad (10)$$

где $\Omega = 2\pi/T$. Из выражений (9) и (10) предельным переходом $T \rightarrow \infty$ определим спектральное представление сигнала в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_W(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (11)$$

где

$$G_W(\omega) = \frac{1}{2\pi((1-\alpha) + \alpha\omega^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\alpha)f(\tau) - j\alpha\omega \frac{df(\tau)}{d\tau} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12)$$

Как известно [5], преобразование Фурье функции $f(t)$ и ее производной $f'(t)$ связаны соотношением $G_{f'}(\omega) = j\omega G_f(\omega)$. С учетом этого выражение (12) можно преобразовать к виду

$$G_W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = G_L(\omega), \quad (13)$$

где $G_L(\omega)$ – спектр функции $f(t)$ в пространстве L_2 . Из выражения (13) следует, что спектры сигнала $f(t)$ в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 и пространстве L_2 совпадают.

Однако ситуация меняется при переходе к дискретному представлению сигнала $f(t)$ в виде последовательности N отсчетов $f(kT_0)$, где $k = 0, N-1$, $T_0 = 2\pi/N$ – интервал дискретизации. В результате невозможно использование упомянутых выше свойств преобразования Фурье, так как дискретный спектр является периодическим и равенство $G_{f'}(\omega) = j\omega G_f(\omega)$ выполняется только при $N \rightarrow \infty$. Это приводит к несовпадению дискретных спектров в пространствах W_2^1 и L_2 . Произведя над выражением (12) операции, аналогичные переходу от непрерывного преобразования Фурье к дискретному [2], получим дискретную форму спектра в пространстве Соболева W_2^1 :

$$G_{W_0}(k) = \frac{1}{N[(1-\alpha) + \alpha(2nk/N)^2]} \times \\ \times \sum_{n=0}^{N-1} \left[(1-\alpha)f(n) - j\alpha \frac{2\pi}{N} k \delta f(n) \right] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad (14)$$

где $\delta f(n)$ – дискретные отсчеты производной сигнала $f(t)$ в точках nT_0 . Наличие множителя перед суммой в выражении (14) в результате быстро спадающего характера за пределами определения основного участка спектра на интервале $|\Omega| > 1/2T_0$ позволяет снизить влияние искажений и эффекта «наложения спектров» при представлении сигнала с частотой дискретизации меньше частоты Котельникова. При этом лепестки зеркальной части спектра, накладывающиеся на основной участок спектра G_{W_0} , при $1/T_0 < 2F_{\max}$ имеют уровень ниже, чем при обработке в пространстве L_2 . Для $\delta f(n) = \Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$ выражение (14) имеет вид

$$G_{W_1}(k) = \frac{(1-\alpha) - j \frac{2\pi}{N} k \alpha \left(1 - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right) \right)}{(1-\alpha) + \alpha(2\pi k/N)^2} \times \\ \times G_{L_0}(k) - j \frac{2\pi k \alpha f(N-1)}{N^2 [(1-\alpha) + \alpha(2\pi k/N)^2]}, \quad (15)$$

где

$$G_{L_0}(n) = \frac{1}{N} \sum_k f(k) \exp(-j2\pi kn/N)$$

– дискретный спектр сигнала $f(k)$ в пространстве L_2 . Второе слагаемое в формуле (15) является постоянной комплексной величиной, пропорциональной $1/N^2$, поэтому при вычислениях ею можно пренебречь.

Проделав над выражением (11) операции перехода от непрерывной формы к дискретной, можно доказать, что восстановление сигнала $f(t)$ в пространстве Соболева W_2^1 производится с помощью известного обратного дискретного преобразования Фурье [2].

Определим значение α , минимизирующего ошибку представления спектра дискретного сигнала при $\Omega < F_k$ по критерию среднеквадратического отклонения

$$\varepsilon^2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |G(n) - G_X(n)|^2}{E}, \quad (16)$$

где $E = \sum_{n=0}^{N-1} |G(n)|^2$; $G_X(n)$ – спектр $G_{L_0}(k)$ или $G_{W_1}(\omega)$ сигнала $f(kT_0)$ в пространстве L_2 или W_2^1 ; $G(n)$ – теоретический спектр $G_L(k)$, полученный при частоте дискретизации в 10 раз выше частоты Котельникова.

Подставляя (15) в выражение (16) и беря производную по α , получим уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\{[D^2 \operatorname{Re}(G(k)) - \operatorname{Re}(G(k)) + R_{11} + DR_{12}] \alpha_{\text{opt}} - R_{11} + \operatorname{Re}(G(k))\} \{DR_{11} + R_{12}\} D}{[1 + \alpha_{\text{opt}} (D^2 - 1)]^3} \right\} + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\{[-D^2 \operatorname{Im}(G(k)) + \operatorname{Im}(G(k)) + J_{11} - DJ_{12}] \alpha_{\text{opt}} - \rightarrow}{[1 + \alpha_{\text{opt}} (D^2 - 1)]^3} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{-\operatorname{Im}(G(k)) - J_{11}\} \{DJ_{11} - J_{12}\} D}{[1 + \alpha_{\text{opt}} (D^2 - 1)]^3} \right\} = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D = \frac{2\pi}{N} k; \quad R_{11} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos(Dn); \quad R_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta f(n) \sin(Dn); \\ J_{11} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \sin(Dn); \quad J_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta f(n) \cos(Dn). \end{aligned}$$

Решение уравнения (17) можно получить численным методом для конкретного вида сигнала.

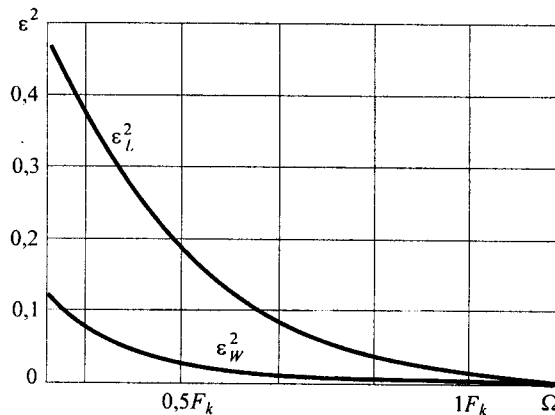
Для подтверждения преимуществ преобразования (14) далее приводятся результаты сравнения спектров в пространстве L_2 и модифицированном пространстве Соболева W_2^1 для сигнала

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2 - 2t^2 + t \cos(78t) - t^3 + 1 + te^{-2t^2} + \sin(100t) - \cos(54t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (18)$$

Применение этого сигнала позволяет исследовать искажения дискретного спектра при использовании частоты дискретизации $\Omega < F_k$. Предложенный сигнал имеет большие боковые составляющие спектра, что приводит к значительному возрастанию ошибки (16) при определении дискретного спектра в пространстве L_2 в случае использования частоты дискретизации $\Omega < F_k$. В результате расчетов по формуле (17) было получено оптимальное для сигнала (18) значение коэффициента $\alpha_{\text{opt}} = 0,78$.

Зависимости ошибки ε^2 от частоты дискретизации Ω сигнала (18) на интервале $[-1, 1]$ приведены на рисунке. Кривые ε_L^2 и ε_W^2 описывают зависимости ошибок представления спектра дискретного сигнала в пространствах L_2 и W_2^1 соответственно. При $\Omega < F_k$ ошибка представления спектра исследуемого дискретного сигнала в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 значительно ниже, чем в пространстве L_2 . Так, при условии $\varepsilon_L^2 = \varepsilon_W^2$, где ε_L^2 — ошибка, полученная при $\Omega = 0,8F_k$, возможно снижение частоты дискретизации в 1,7 раза при спектральной обработке сигнала в пространстве Соболева W_2^1 .

Из анализа результатов исследований можно сделать вывод о преимуществе предложенного алгоритма (14) перед классическим алгоритмом ДПФ в пространстве L_2 при $\Omega < F_k$, что достигается за счет некоторого увеличения вычислительных затрат. Данный алгоритм может быть использован в цифровых системах спектральной обработки и распознавания сигналов.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
3. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Радиотехника. 1995. № 4–5. С. 42.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.

*Рязанская государственная радиотехническая академия,
E-mail: snk@rinf.ryazan.ru*

*Поступила в редакцию
28 мая 2002 г.*

Подписка на наш журнал – залог Вашего успеха!