

Ю. Ц. Батомункуев, Н. А. Мещеряков

(Новосибирск)

### ФОРМИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЪЕМНОГО ВНЕОСЕВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассчитана схема восстановления с учетом объемности внеосевого объемного цилиндрического голографического оптического элемента (ГОЭ) на основе анализа его характеристической функции, а также условия формирования сопряженных плоскостей. Предложена зеркально-линзовая модель объемного внеосевого цилиндрического ГОЭ, отличающаяся от зеркальной и линзовой моделей тонкого ГОЭ и позволяющая графически определить сопряженные плоскости предмета и изображения. Представлено правило построения сопряженных плоскостей.

**Введение.** Известно, что формула тонкой голограммы справедлива и для объемного голографического оптического элемента (ГОЭ) [1]. Аналогии между пропускающим тонким ГОЭ и тонкой линзой, между отражающим тонким ГОЭ и сферическим зеркалом проводились в работах [2–4]. Разработанные на их основе зеркальная и линзовая модели тонкого ГОЭ широко используются при расчете фокусирующих дифракционных элементов [2–5]. Известно, что угловая селективность объемного ГОЭ приводит к ограничению поля зрения [6, 7] и, следовательно, к пространственной селективности. В работе [8] предложена зеркально-линзовая модель схемы записи осевого объемного ГОЭ, учитывающая его пространственную селективность и позволяющая определить положение сопряженных плоскостей.

Цель данной работы – расчет условий формирования сопряженных плоскостей внеосевого цилиндрического ГОЭ с учетом его объемности.

**Расчет схемы восстановления объемного внеосевого цилиндрического ГОЭ.** Рассмотрим объемный внеосевой ГОЭ, восстанавливающая, восстановленная, опорная и объектная волны которого являются цилиндрическими волнами. Центр прямоугольной системы координат совместим с центром объемного ГОЭ, ось  $OZ$  направим перпендикулярно к поверхности объемного ГОЭ, как показано на рис. 1,  $a, b$ .

Чтобы не учитывать преломление лучей на поверхностях голографической среды, будем считать, что объемный ГОЭ находится в диэлектрической среде со средним показателем преломления, равным среднему показателю

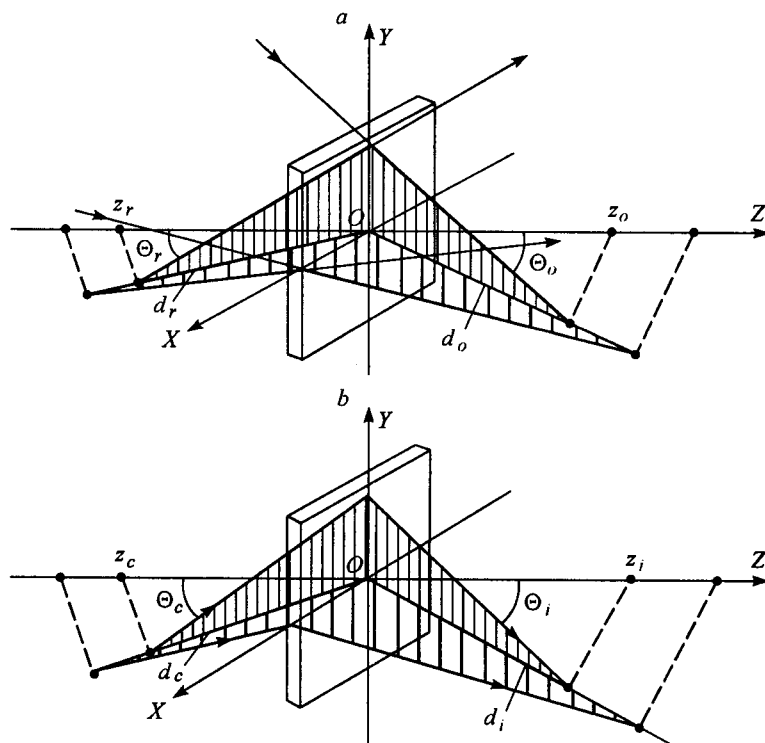


Рис. 1. Схема записи (а) и восстановления (b) объемного внеосевого ГОЭ

преломления голографической среды  $n_c$ . Используя характеристическую функцию объемного внеосевого ГОЭ, аналогично [9] рассмотрим ход лучей от цилиндрических источников при записи и восстановлении пропускающих и отражающих объемных внеосевых ГОЭ. Все источники цилиндрических волн на стадии записи и восстановления считаем параллельными друг другу и перпендикулярными плоскости координат  $XOZ$ , поэтому свойства цилиндрического объемного ГОЭ достаточно проанализировать в этой плоскости координат.

Положение источников цилиндрических волн в плоскости  $XOZ$  зададим с помощью полярных координат: длин отрезков  $d_c, d_i, d_r, d_o$  от источников цилиндрических волн до центра системы координат и углов отклонения  $\Theta_c, \Theta_i, \Theta_r, \Theta_o$  этих отрезков от оси  $OZ$  (см. рис. 1).

Характеристическая функция  $V$  объемного внеосевого ГОЭ записывается в виде [10]:

$$V = n_c [(l_c - d_c) \pm (l_i - d_i) - k\mu ((l_r - d_r) \pm (l_o - d_o))],$$

где  $l_c, l_i, l_r, l_o$  – расстояния от произвольной точки  $M(x, 0, z)$  объема ГОЭ вблизи центра системы координат до источников восстанавливающей, восстановленной, опорной и объектной волн соответственно;  $d_c, d_i, d_r, d_o$  – расстояния от источников восстанавливающей, восстановленной, опорной и

объектной волн до центра системы координат;  $k$  – порядок дифракции;  $\mu$  – отношение длин волн восстановления и записи в среде.

В выражении для характеристической функции  $V$  и в последующих выражениях нижний знак « $-$ » соответствует пропускающим объемным внеосевым ГОЭ, верхний знак « $+$ » – отражающим объемным внеосевым ГОЭ.

Выражая  $l_c, l_i$  через соответствующие расстояния  $d_c, d_i$ , углы  $\Theta_c, \Theta_i$  и координаты произвольной точки  $M(x, 0, z)$ , а расстояния  $l_r, l_o$  через соответствующие расстояния  $d_r, d_o$ , углы  $\Theta_r, \Theta_o$  и координаты точки  $M(x/m_x, 0, z/m_z)$  (где  $m_x, m_z$  – коэффициенты усадок вдоль осей координат  $OX, OZ$ ) и разлагая расстояния  $l_c, l_i, l_r, l_o$  по величинам малости  $x/d_c, x/d_i, x/d_r, x/d_o$  и  $z/d_c, z/d_i, z/d_r, z/d_o$ , получаем в первых порядках разложения характеристическую функцию  $V(x, z)$  объемного ГОЭ в виде

$$\begin{aligned} V(x, z) = & n_c [\sin \Theta_c \pm \sin \Theta_i - k\mu(\sin \Theta_r \pm \sin \Theta_o)/m_x] x + \\ & + n_c [\cos \Theta_c \pm \cos \Theta_i - k\mu(\cos \Theta_r \pm \cos \Theta_o)/m_z] z + \\ & + n_c [\cos^2 \Theta_c/d_c \pm \cos^2 \Theta_i/d_i - k\mu(\cos^2 \Theta_r/d_r \pm \cos^2 \Theta_o/d_o)/m_x^2] x^2/2 + \\ & + n_c [\sin^2 \Theta_c/d_c \pm \sin^2 \Theta_i/d_i - k\mu(\sin^2 \Theta_r/d_r \pm \sin^2 \Theta_o/d_o)/m_z^2] z^2/2 + \\ & + n_c [\sin 2\Theta_c/d_c \pm \sin 2\Theta_i/d_i - k\mu(\sin 2\Theta_r/d_r \pm \sin 2\Theta_o/d_o)/m_x m_z] xz/4 \dots \end{aligned}$$

При толщине светочувствительного ГОЭ, равной нулю ( $z=0$ ), характеристическая функция  $V(x, 0)$  объемного внеосевого ГОЭ совпадает с характеристической функцией  $V(x)$  тонкого внеосевого ГОЭ [3].

Рассмотрим объемный внеосевой цилиндрический ГОЭ, записанный в среде с изотропной усадкой ( $m_x = m_z = m$ ). Видно, что первые два члена разложения характеристической функции  $V(x, z)$  представляют собой известные условия дифракции для плоских волн на локальной объемной решетке с периодом  $d$  [10].

Приравнявая к нулю третий член разложения характеристической функции  $V(x, z)$ , получаем известное условие фокусировки тонкого внеосевого ГОЭ:

$$\cos^2 \Theta_c/d_c \pm \cos^2 \Theta_i/d_i = k\mu(\cos^2 \Theta_r/d_r \pm \cos^2 \Theta_o/d_o)/m^2. \quad (1)$$

Приравнявая к нулю четвертый член разложения характеристической функции, получаем дополнительное условие формирования сопряженных плоскостей объемным внеосевым ГОЭ в виде

$$\sin 2\Theta_c/d_c \pm \sin 2\Theta_i/d_i = k\mu(\sin 2\Theta_r/d_r \pm \sin 2\Theta_o/d_o)/m^2. \quad (2)$$

Перепишем выражения (1) и (2), введя новые обозначения:

$$z_c = d_c/\cos \Theta_c, \quad z_i = d_i/\cos \Theta_i,$$

$$z_r = d_r / \cos \Theta_r, \quad z_o = d_o / \cos \Theta_o.$$

Из рис. 1 видно, что отрезки  $d_c, d_i, d_r, d_o$  являются проекциями отрезков  $z_c, z_i, z_r, z_o$ , находящихся на оси  $OZ$ . В новых обозначениях выражения (1), (2) представляются в виде системы

$$\cos \Theta_c / z_c \pm \cos \Theta_i / z_i = k\mu(\cos \Theta_r / z_r \pm \cos \Theta_o / z_o) / m^2, \quad (3)$$

$$\sin \Theta_c / z_c \pm \sin \Theta_i / z_i = k\mu(\sin \Theta_r / z_r \pm \sin \Theta_o / z_o) / m^2.$$

Умножая первое выражение системы (3) на  $1/\cos \Theta_i$ , а второе выражение на  $1/\sin \Theta_i$ , вычитая полученные выражения и преобразуя разность, получаем для объемного внеосевого пропускающего ГОЭ

$$1/z_c = (P_0 + 1)/2F_1,$$

где  $F_1$  – фокусное расстояние модели пропускающего ГОЭ:

$$F_1 = m^2 z_r z_o \cos(\Theta_c/2 - \Theta_i/2) / k\mu(z_o - z_r) \cos(\Theta_r/2 - \Theta_o/2);$$

$P_0$  – параметр:

$$P_0 = m(z_r + z_o) \cos(\Theta_c/2 - \Theta_i/2) / k\mu(z_o - z_r) \cos(\Theta_r/2 - \Theta_o/2).$$

Аналогично умножая первое выражение системы (3) на  $1/\cos \Theta_c$ , а второе выражение на  $1/\sin \Theta_c$  и выполнив преобразования, получаем

$$1/z_i = (P_0 - 1)/2F_1.$$

Умножая первое уравнение системы (3) для отражающего объемного внеосевого ГОЭ на  $1/\cos \Theta_c$  и  $1/\cos \Theta_i$ , а второе выражение на  $1/\sin \Theta_c$  и  $1/\sin \Theta_i$ , вычитая полученные выражения и сделав преобразования, получаем для объемного внеосевого отражающего ГОЭ

$$1/z_c = (Q_0 + 1)/2F_m,$$

$$-1/z_i = (Q_0 - 1)/2F_m,$$

где  $F_m$  – фокусное расстояние модели отражающего ГОЭ:

$$F_m = m^2 z_r z_o \cos(\Theta_c/2 - \Theta_i/2) / k\mu(z_o + z_r) \cos(\Theta_r/2 - \Theta_o/2);$$

$Q_0$  – параметр:

$$Q_0 = k\mu(z_o - z_r)\sin(\Theta_r/2 - \Theta_o/2)/m(z_o + z_r)\sin(\Theta_c/2 - \Theta_i/2).$$

Полученные формулы позволяют определить положение источников цилиндрических волн схемы восстановления.

**Обсуждение.** Вычитая выражения  $1/z_c$  и  $1/z_i$  для пропускающего ГОЭ, получаем формулу тонкой цилиндрической линзы с фокусным расстоянием  $F_1$ :

$$1/z_c - 1/z_i = 1/F_1.$$

Складывая выражения  $1/z_c$  и  $1/z_i$ , получаем формулу цилиндрического зеркала с фокусным расстоянием  $F'_m = F_1/P_0$ :

$$1/z_c + 1/z_i = P_0/F_1.$$

Складывая  $1/z_c$  и  $1/z_i$  для объемного отражающего ГОЭ, получаем формулу цилиндрического зеркала с фокусным расстоянием  $F'_m$ , а вычитая  $1/z_c$  и  $1/z_i$ , получаем формулу цилиндрической линзы с фокусным расстоянием  $F'_1 = F'_m/Q_0$ .

Следовательно, объемный внеосевой цилиндрический ГОЭ может быть представлен в виде зеркально-линзовой модели, обладающей одновременно свойствами тонкой цилиндрической линзы и цилиндрического зеркала. Отношение фокусного расстояния линзы к фокусному расстоянию зеркала для пропускающего ГОЭ равно параметру  $P_0$ . Для отражающего ГОЭ отношение фокусного расстояния цилиндрического зеркала к фокусному расстоянию линзы равно параметру  $Q_0$ . Параметры  $P_0, Q_0$  задают вид восстанавливающей и восстановленной волн.

Через эти параметры можно выразить и линейное увеличение  $\beta$ , равное отношению  $d_i/d_c$ . Так, линейное увеличение внеосевого пропускающего ГОЭ

$$\beta = (P_0 + 1)\cos\Theta_i/\cos\Theta_c(P_0 - 1).$$

Линейное увеличение внеосевого отражающего ГОЭ

$$\beta = -(Q_0 + 1)\cos\Theta_i/\cos\Theta_c(Q_0 - 1).$$

Вычисляя производные  $d_i$  и  $\beta$  по длине волны восстановления  $\lambda_c$ , можно определить хроматические aberrации положения и увеличения.

Зеркально-линзовая модель позволяет сформулировать правила графического построения сопряженных плоскостей предмета и изображения цилиндрического объемного внеосевого ГОЭ. Способ построения представлен на рис. 2 и заключается в следующем.

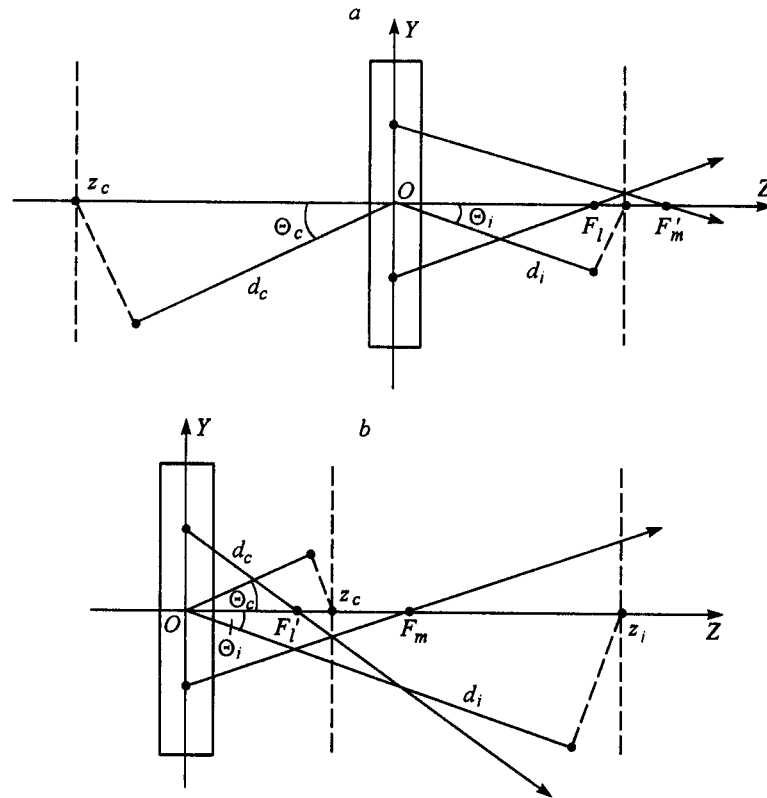


Рис. 2. Построение сопряженных плоскостей (плоскости предмета и плоскости изображения) внеосевого пропускающего ГОЭ (а) и внеосевого отражающего ГОЭ (б)

1. Из двух точек объема ГОЭ, симметрично расположенных относительно оптической оси  $OZ$ , проводятся прямые для пропускающего ГОЭ из одной точки через фокус  $F_1$  и из другой точки через фокус  $F'_m$ , а для отражающего ГОЭ из одной точки через фокус  $F'_1$  и из другой – через фокус  $F_m$ . Если точка пересечения прямых находится в области предмета, то плоскость предмета проходит через эту точку, в других случаях через точку проходит плоскость изображения. Здесь речь идет о плоскостях зеркально-линзовой модели, перпендикулярных оси  $OZ$ , а не о реальной плоскости предмета и плоскости изображения ГОЭ.

2. Если известно положение плоскости предмета  $z_c$  или плоскости изображения  $z_i$ , зеркально-линзовой модели, то положение сопряженной плоскости определяется правилами построения изображений в тонкой линзе (для пропускающих ГОЭ) или в цилиндрическом зеркале (для отражающих ГОЭ).

3. Положение  $d_c$  реальной предметной плоскости и положение  $d_i$ , сопряженной с ней плоскости изображения находятся проекциями  $z_c, z_i$  на оси восстанавливающей и восстановленной волн, как показано на рис. 2.

Таким образом, в данной работе получены условия формирования сопряженных плоскостей внеосевого цилиндрического ГОЭ с учетом его объемности, предложена зеркально-линзовая модель, позволяющая графически определить схему восстановления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Champagne E. B.** Nonparaxial imaging magnification and aberration properties in
4. **Корешев С. Н., Ратушный В. П.** Полифункциональность рельефно-фазовых отражательных голограммных оптических элементов // Оптический журнал. 2001. № 12. С. 28.
5. **Мустафин К. С.** Аберрации тонких голограмм, изготовленных на сферической подложке // Оптика и спектроскопия. 1974. 37, № 6. С. 1158.
6. **Денисюк Ю. Н.** Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения // Оптика и спектроскопия. 1963. 15, № 4. С. 522.
7. **Syms R. A., Solyman L.** The effect of angular selectivity on the monochromatic imaging performance of volume holographic lenses // Opt. Acta. 1983. 30, N 9. P. 1303.
8. **Батомункуев Ю. Ц.** Особенности расчета схем записи объемных осевых голографических оптических элементов с неизотропной усадкой // Автометрия. 2002. № 2. С. 108.
9. **Forshaw M. R. B.** The imaging properties and aberrations of thick transmission holograms // Opt. Acta. 1973. 20, N 9. P. 669.
10. **Батомункуев Ю. Ц., Мещеряков Н. А.** Расчет схемы записи цилиндрическими волнами объемного внеосевого голографического оптического элемента // Автометрия. 1999. № 4. С. 33.

*Сибирская государственная геодезическая академия,  
E-mail: rectorat@ssga.ru*

*Поступила в редакцию  
20 ноября 2002 г.*