Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2003, том 39, № 6

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

(Новосибирск)

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПО ЧАСТОТЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРИ ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРАВНОМЕРНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ*

Рассматривается модернизация теоремы отсчетов при периодически неравномерной и равномерной дискретизации сигнала с неограниченным по частоте спектром. Полученные соотношения для реконструкции сигнала позволяют снизить дисперсию ошибки его восстановления.

Введение. В предлагаемой работе исследуется точность восстановления сигнала с неограниченной по частоте спектральной плотностью при помощи интерполяционной формулы

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_k + nN\Delta) h(t - t_k - nN\Delta) \tag{1}$$

по периодически неравномерной совокупности отсчетов с моментами дискретизации $t_{kn} = t_k + nN\Delta (k = \overline{0, N-1}, 0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{N-1} \le N\Delta, n = \overline{-\infty, \infty})$. При этом предполагается, что весовая функция

$$h(t - t_k - nN\Delta) = \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k - nN\Delta)}, \tag{2}$$

а весовая функция

$$w_k(t) = a_{k0} + \sum_{r=1}^{M} \left(a_{kr} \cos \frac{2\pi}{N\Delta} rt + b_{kr} \sin \frac{2\pi}{N\Delta} rt \right), \ k = \overline{0, N-1}, \ M \ge (N-1)/2, \tag{3}$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа № 16/2003).

является периодической с периодом $N\Delta$ (N нечетно).

Такую структуру имеет теорема отсчетов при периодически неравномерной дискретизации [1, 2] для сигнала с ограниченным частотой π/Δ спектром, когда $M=(N-1)/2$, а

$$w_k(t)=\prod_{\substack{r=0\\ r\neq k}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r)}{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t_k-t_r)}. \tag{4}$$

Целесообразно заметить при этом, что, когда последовательность отсчетов становится равномерной ($t_k=k\Delta$, $k=\overline{0,N-1}$), формула (1) превращается в привычную теорему отсчетов

$$f^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-n\Delta)}. \tag{5}$$

В работе [3] показано, что для произвольной спектральной плотности $S_f(\omega)$ средняя по множеству реализаций сигнала и времени дисперсия ошибки восстановления сигнала, если весовая функция определяется соотношениями (2) и (3), имеет вид

$$\left\langle\varepsilon_f^2\right\rangle=\sigma_f^2\left(1-\frac{2}{N\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}p(n)\sum_{k=0}^{N-1}\left\langle w_k(t)\cos\frac{2\pi}{N\Delta}(t-t_k)n\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N\Delta}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\left\langle w_k(t)w_m(t)\right\rangle\sum_{n=-\infty}^{\infty}p(n)\cos\frac{2\pi}{N\Delta}(t_k-t_m)n\right), \tag{6}$$

где символ $\langle\rangle$ означает усреднение по времени на интервале $N\Delta$, а

$$p(n)=\int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}n-\frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}n+\frac{\pi}{N\Delta}}d\omega\frac{S_f(\omega)}{\sigma_f^2}. \tag{7}$$

Для теоремы отсчетов [1, 2] верхний предел суммы в формуле (3) $M=$ $=(N-1)/2$, и при неограниченной по частоте спектральной плотности сигнала это обстоятельство может привести к большой дисперсии ошибки восстановления сигнала (см., например, [3]). Поэтому далее рассматриваются возможности минимизации дисперсии ошибки восстановления сигнала как за счет оптимального выбора коэффициентов $\{a_{k0}\}$, $\{a_{kr}\}$, $\{b_{kr}\}$, так и за счет увеличения величины M. При этом, как будет показано далее, могут быть несколько улучшены и метрологические характеристики теоремы отсчетов (5) путем разбиения всей последовательности отсчетов на подпоследовательности и использования соотношения (1).

Отметим, что в случае, когда спектральная плотность сигнала $S_f(\omega)$ в областях частот $n\frac{2\pi}{N\Delta}-\frac{\pi}{N\Delta}\le\omega\le n\frac{2\pi}{N\Delta}+\frac{\pi}{N\Delta}$ $(n=\overline{-\infty,\infty})$ кусочно-постоянна, а верхний предел суммирования M в (3) неограниченно возрастает, решение рассматриваемой задачи совпадает с решением, полученным в [4].

Периодически неравномерная дискретизация. Положим вначале, что сигнал $f(t)$ центрирован. Тогда, используя соотношение (3) и выполняя интегрирование по времени, получим формулу для дисперсии ошибки воспроизведения сигнала фильтром (1):

$$\left\langle\varepsilon_f^2\right\rangle=\sigma_f^2\left[1-2p_0\sum_{k=0}^{N-1}a_{k0}-\sum_{r=1}^{M}p_r\sum_{k=0}^{N-1}\left(a_{kr}\cos\frac{2\pi}{N\Delta}rt_k+b_{kr}\sin\frac{2\pi}{N\Delta}rt_k\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\left(a_{k0}a_{m0}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{M}(a_{kr}a_{mr}+b_{kr}b_{mr})\right)\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cos\frac{2\pi}{N\Delta}n(t_k-t_m)\right],\quad(8)$$

где $p_0=p(0)$, $p_n=2p(n)$. Минимизация (8) по переменным $\{a_{k0}\}$, $\{a_{kr}\}$, $\{b_{kr}\}$ дает совокупность $(2M+1)$ систем уравнений, каждая из которых содержит N переменных. Определитель $|C|$ всех этих систем одинаков. Элемент определителя

$$c_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\cos\frac{2\pi}{N\Delta}n(t_i-t_j)=c(t_i-t_j)\qquad(9)$$

(здесь i – строка, j – столбец). Величина $c(t_i-t_j)$ является значением нормированной корреляционной функции сигнала с квантованным по частоте $\left(\text{шаг квантования} - \frac{2\pi}{N\Delta}\right)$ спектром мощности. Каждая из $(2M+1)$ систем уравнений служит для нахождения компонент векторов $\mathbf{a}_0=\{a_{0,0},a_{1,0},\ldots$ $\ldots,a_{N-1,0}\}$, $\mathbf{a}_r=\{a_{0,r},a_{1,r},\ldots,a_{N-1,r}\}$ и $\mathbf{b}_r=\{b_{0,r},b_{1,r},\ldots,b_{N-1,r}\}$, $r=\overline{1,M}$. Структура всех этих систем однотипна. Правая часть системы, описывающей компоненты вектора $\mathbf{a}_0$, представляет собой вектор-столбец $\mathbf{p}_0=\{p_0,\ldots,p_0\}^{\mathrm{T}}$, а правые части систем, соответствующих векторам $\mathbf{a}_r$ и $\mathbf{b}_r$, есть вектор-столбцы

$$\mathbf{p}_r=\left\{p_r\cos\frac{2\pi}{N\Delta}rt_0,\ldots,p_r\cos\frac{2\pi}{N\Delta}rt_{N-1}\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{q}_r=\left\{p_r\sin\frac{2\pi}{N\Delta}rt_0,\ldots,p_r\sin\frac{2\pi}{N\Delta}rt_{N-1}\right\}^{\mathrm{T}},\qquad r=\overline{1,M}.$$

В соответствии с изложенным выше

$$a_{kr}=p_r\frac{|C|_{a_{kr}}}{|C|},\qquad b_{kr}=p_r\frac{|C|_{b_{kr}}}{|C|},\qquad(10)$$

где $|C|_{a_{kr}}$ – определитель $|C|$, в котором k-й столбец заменен на столбец $\cos\frac{2\pi}{N\Delta}rt_i$, $i=\overline{0,N-1}$, а $|C|_{b_{kr}}$ – определитель $|C|$, в котором k-й столбец заменен на столбец $\sin\frac{2\pi}{N\Delta}rt_i$, $i=\overline{0,N-1}$.

Кроме того, как следует из (3), система уравнений для совокупности весовых функций $\{w_k(t)\}$ $(k=\overline{0,N-1})$ имеет тот же определитель и правую часть уравнений

$$c(t-t_i)=\sum_{r=0}^{M}p_r\cos\frac{2\pi}{N\Delta}r(t-t_i),\qquad i=\overline{0,N-1}. \tag{11}$$

Из соотношений (9) и (11) вытекает, что значение весовой функции $w_k(t_m)=1$ при $k=m$ только в том случае, если все величины $p_r=0$ при $r>M$. Более того, по-видимому, только при выполнении последнего условия значение весовой функции равно нулю при $k\neq m$.

Для оптимального набора коэффициентов $\{a_{k0}\}_0$, $\{a_{kr}\}_0$, $\{b_{kr}\}_0$ величина дисперсии ошибки

$$\left\langle\varepsilon_f^2\right\rangle=\sigma_f^2\left(1-p_0\sum_{k=0}^{N-1}a_{k0}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{M}p_r\sum_{k=0}^{N-1}\left(a_{kr}\cos\frac{2\pi}{N\Delta}rt_k+b_{kr}\sin\frac{2\pi}{N\Delta}rt_k\right)\right). \tag{12}$$

С использованием (10) эта величина может быть представлена в виде

$$\left\langle\varepsilon_f^2\right\rangle=\sigma_f^2\left(1-p_0^2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{C_{km}}{|C|}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{M}p_r^2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{|C|_{kr}}{|C|}\right), \tag{13}$$

где C_{km} – алгебраическое дополнение определителя $|C|$; $|C|_{kr}$ – определитель $|C|$, в котором k-й столбец заменен на столбец $\cos\frac{2\pi}{N\Delta}r(t_i-t_k)$, $i=\overline{0,N-1}$.

Если математическое ожидание сигнала $f(t)$ неизвестно и, следовательно, центрирование невозможно, то при минимизации (8) естественно потребовать, чтобы сумма весовых функций равнялась единице при любых t:

$$\sum_{m=1}^{N-1}w_m(t)=1. \tag{14}$$

При этом, как показывает анализ, весовые коэффициенты $\{\mathring{a}_{k0}\}$, $\{\mathring{a}_{kr}\}$, $\{\mathring{b}_{kr}\}$ будут определяться очевидными соотношениями

$$\mathring{a}_{k0}=a_{k0}+\frac{\left(1-\sum\limits_{k=0}^{N-1}a_{k0}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1}C_{km}}\sum_{m=0}^{N-1}C_{km},\qquad \mathring{a}_{kr}=a_{kr}-\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1}a_{kr}}{\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1}C_{km}}\sum_{m=0}^{N-1}C_{km}, \tag{15}$$

$$\mathring{b}_{kr} = b_{kr} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} b_{kr}}{\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1} C_{km}} \sum_{m=0}^{N-1} C_{km},$$

(1) последовательность отсчетов необходимо очевидным образом разбить на N подпоследовательностей. При этом весовые функции $w_k(t)$ одинаковы и отличаются друг от друга только сдвигом:

$$w_k(t) = w_0(t - k\Delta) = a_{00} + \sum_{r=1}^{M} a_{0r} \cos \frac{2\pi}{N\Delta} r(t - k\Delta). \tag{16}$$

В соответствии с этим равенством

$$a_{kr} = a_{0r} \cos \frac{2\pi}{N\Delta} rk, \qquad b_{kr} = a_{0r} \sin \frac{2\pi}{N\Delta} rk \quad (k = \overline{0, N-1}). \tag{17}$$

Входящие в соотношение (6) для дисперсии ошибки воспроизведения сигнала величины $\frac{1}{N\Delta}\left\langle w_k(t) \cos \frac{2\pi}{N\Delta} n(t - k\Delta) \right\rangle = a_{0n}$ при $n \geq 0$ имеют вид

$$\frac{1}{N\Delta} \left\langle w_k(t) w_m(t) \right\rangle = a_{00}^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{M} a_{0r}^2 \cos \frac{2\pi}{N\Delta} r(k - m). \tag{18}$$

Поэтому минимум дисперсии ошибки достигается, если

$$a_{0r} = p_r \frac{N}{N + 2\sum\limits_{k=1}^{N-1} (N - k) c(k\Delta) \cos \frac{2\pi}{N} rk} \quad (k = \overline{0, N-1}), \tag{19}$$

где корреляционная функция

$$c(k\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos \frac{2\pi}{N} kn. \tag{20}$$

Знаменатель в формуле (19) преобразуется к выражению

$$N + 2\sum_{k=1}^{N-1} (N - k) c(k\Delta) \cos \frac{2\pi}{N} rk = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{\sin^2 \pi(n - r)}{\sin^2 \frac{\pi}{N}(n - r)} + \frac{\sin^2 \pi(n + r)}{\sin^2 \frac{\pi}{N}(n + r)} \right). \tag{21}$$

В соответствии с формулой (21) соотношение для дисперсии ошибки выглядит следующим образом:

$$\left\langle \varepsilon_f^2 \right\rangle = \sigma_f^2 - \sum_{r=-M}^{M} \frac{\left(\int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}r - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}r + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f(\omega) \right)^2}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{N\Delta}r - \frac{\pi}{N\Delta}}^{\frac{2\pi}{N\Delta}r + \frac{\pi}{N\Delta}} d\omega S_f\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}n\right)}. \tag{22}$$

Напомним, что при оптимальной фильтрации сигнала по последовательности его равноотстоящих отсчетов дисперсия ошибки воспроизведения

$$\left\langle \varepsilon_f^2 \right\rangle = \sigma_f^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega S_f^2(\omega)}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} S_f\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}n\right)}. \tag{23}$$

Нетрудно убедиться, что при $N \to \infty$ и $M \to \infty$ соотношение (22) превращается в соотношение (23).

Эффективность интерполяционных формул и «гладкость» сигнала. Для иллюстрации полученных выше соотношений рассмотрим случай, когда период неравномерности $N = 3$, а величины $t_0 = -\alpha\Delta$, $t_1 = 0$ и $t_2 = \alpha\Delta$. При этом значение дисперсии ошибки, как следует из (13),

$$\frac{\varepsilon^2}{\sigma_f^2} = 1 - p_0^2 \mu(\alpha_0, 0) - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{M} p_r^2 \mu(\alpha_0, r), \tag{24}$$

где весовой множитель

$$\mu(\alpha_0, r) = \frac{(1 - c(2\alpha_0))(3 - 4c(\alpha_0) + c(2\alpha_0)) + \delta_r}{(1 - c(2\alpha_0))(1 - 2c^2(\alpha_0) + c(2\alpha_0))}, \tag{25}$$

а величина

$$\delta_r = 2(c(2\alpha_0) - c^2(\alpha_0))(1 - \cos(2r\alpha_0)) +$$

$$+ 4c(\alpha_0)(1 - c(2\alpha_0))(1 - \cos(r\alpha_0)). \tag{26}$$

В этих соотношениях параметр близости отсчетов $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}\alpha$. Наибольший интерес представляют случаи, когда коэффициент $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 1$. В первом случае абсциссы двух крайних отсчетов $f(t_0)$ и $f(t_2)$ стремятся к абсциссе среднего значения $f(0)$, а во втором случае периодически неравномерная дискретизация превращается в равномерную. Предельное значение весового множителя $\mu(0,r)$ зависит от дифференциальных свойств сигнала $f(t)$. Если сигнал не имеет первой среднеквадратичной производной, то при $\alpha_0 \to 0$

$$c(\alpha_0) \cong 1 + c^{(1)}(0)|\alpha_0|, \qquad \mu(0,r) = 1. \tag{27}$$

При однократной среднеквадратичной дифференцируемости сигнала и $\alpha_0 \to 0$

$$c(\alpha_0) \cong 1 + c^{(2)}(0)\frac{\alpha_0^2}{2!} + c^{(3)}(0)\frac{|\alpha_0|^3}{3!}, \qquad \mu(0,r) = 1 + \frac{r^2}{|c^{(2)}(0)|}. \tag{28}$$

Если сигнал дифференцируем два раза или более, то при $\alpha_0 \to 0$

$$c(\alpha_0) \cong 1 + c^{(2)}(0)\frac{\alpha_0^2}{2!} + c^{(4)}(0)\frac{\alpha_0^4}{4!}, \tag{29}$$

$$\mu(0,r) = \frac{|c^{(2)}(0)|c^{(4)}(0) + r^2(c^{(4)}(0) - 3(c^{(2)}(0))^2) + r^4|c^{(2)}(0)|}{|c^{(2)}(0)|(c^{(4)}(0) - (c^{(2)}(0))^2)}.$$

В качестве примера недифференцируемого процесса рассмотрим сигнал с нормированной корреляционной функцией

$$c(\alpha_0) = 1 - \frac{3\pi}{2} q \cos\left(\frac{\pi - \alpha_0}{2}\right). \tag{30}$$

Для этого сигнала величина $p_0 = 1 - 3q$, а $p_r = \dfrac{6}{4r^2 - 1} q$. Величина q – энергия сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$. Так как производная функции $c(\alpha_0)$ при $\alpha_0 = 0$ есть $c^{(1)}(0) = -\dfrac{3\pi}{4} q$, то весовой множитель $\mu(0,r) = 1$ и дисперсия ошибки реконструкции сигнала при $\alpha_0 \to 0$, как следует из (24),

$$\frac{\varepsilon^2}{\sigma_f^2} = 1 - p_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} p_r^2 = 6q - \frac{9\pi^2}{8} q^2. \tag{31}$$

При равномерной дискретизации такого сигнала $\left(\alpha_0 = \dfrac{2\pi}{3}\right)$ и величине $M = 3$ (дальнейшее увеличение числа M практически не уменьшает дисперсию ошибки реконструкции сигнала), как следует из соотношения (22), дисперсия ошибки $\varepsilon^2/\sigma_f^2 \cong 1{,}75q$. Из сравнения этой величины с величиной, определяемой соотношением (31), следует, что для недифференцируемого сигнала сближение трех отсчетов ($\alpha_0 \to 0$) просто приводит к уменьшению частоты дискретизации сигнала в 3 раза. Этого результата следовало ожидать, так как для марковского сигнала асимптотически оптимальной является линейная интерполяция по двум отсчетам [5], а при высокой точности реконструкции сигнала дисперсия ошибки

$$\frac{\langle \varepsilon_f^2 \rangle}{\sigma_f^2} = \frac{\beta}{3N\Delta}\left((N\Delta + t_0 - t_{N-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1}(t_k - t_{k-1})^2 \right). \qquad (32)$$

Действительно, для рассматриваемого примера расположения абсцисс отсчетов сигнала $(N=3, t_0 = -\alpha\Delta, t_1 = 0, t_2 = \alpha\Delta)$ при $\alpha \to 0$ определяемая соотношением (32) величина $\langle \varepsilon_f^2 \rangle / \sigma_f^2 \cong \beta\Delta$, в то время как при $\alpha = 1$ эта величина $\langle \varepsilon_f^2 \rangle / \sigma_f^2 \cong \beta\Delta/3$.

Рассмотрим далее аналитический сигнал с распределением $p_r = (1-p)p^r$ (p^2 – энергия сигнала на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$) и корреляционной функцией

$$c(\alpha_0) = (1-p)\frac{1 - p\cos\alpha_0}{1 - 2p\cos\alpha_0 + p^2}. \qquad (33)$$

При $\alpha_0 \to 0$ для весового множителя $\mu(0, r)$ справедливо соотношение (29), а величины соответствующих производных представлены в виде

$$c^{(2)}(0) = -\frac{p(1+p)}{(1-p)^2}, \qquad c^{(4)}(0) = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\left(1 + 12\frac{p}{(1-p)^2}\right). \qquad (34)$$

Вычисление дисперсии ошибки с использованием соотношений (24), (29) и (34) при $M = 2$ (дальнейшее увеличение числа M практически не уменьшает дисперсию ошибки реконструкции сигнала) дает следующий результат:

$$\frac{\langle \varepsilon_f^2 \rangle}{\sigma_f^2} \cong 2p^2 \frac{10 + 11p}{1 + 13p}. \qquad (35)$$

Из этого соотношения следует, что дисперсия ошибки лежит между двумя величинами: удвоенной энергией сигнала $\sigma_f^2 2p^2$ на частотах $|\omega| > \pi/\Delta$, что соответствует равномерной дискретизации ($\alpha = 1$), и удвоенной энергией сигнала $\sigma_f^2 2p$ на частотах $|\omega| > \pi/3\Delta$.

Сравним приведенные выше данные с аналогичными результатами, когда для реконструкции рассмотренных выше сигналов использовалась теорема Йена [1, 2] с весовыми функциями (4), так что частотные составляющие сигнала на частотах $|\omega| \geq \pi/\Delta$ предполагались отсутствующими. Из соотношений (28) и (30) работы [3] следует, что при периоде неравномерности $N = 3$ дисперсия ошибки реконструкции сигнала

$$\frac{\langle \varepsilon_f^2 \rangle}{\sigma_f^2} = 2q + \frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} \frac{1}{4}\left(\cos\alpha_0(1 - c(\alpha_0)) - c(\alpha_0) + \frac{1}{2}(1 + c(2\alpha_0))\right). \qquad (36)$$

Таким образом, при сближении отсчетов дисперсия ошибки для марковского сигнала неограниченно возрастает.

Для «гладкого» сигнала с корреляционной функцией (33) при сближении абсцисс отсчетов величина дисперсии ошибки

$$\frac{\left\langle \varepsilon_f^2 \right\rangle}{\sigma_f^2} = 2p^2\left(1+\frac{9(1+p)}{(1-p)^4}\right). \tag{37}$$

Из сравнения дисперсий (35) и (37) следует, что их предельные значения при $p \to 0$ совпадают. Но величина, определяемая формулой (35), подходит к предельному значению, возрастая снизу, а величина, определяемая соотношением (37), стремится к пределу при $p \to 0$, убывая.

При равномерной дискретизации ($\alpha = 1$) для сигнала с характеристической функцией (33) определение коэффициентов формулы (3) из условия минимума дисперсии ошибки реконструкции сигнала оказывается неэффективным.

Заключение. Использование априорной информации о спектральной плотности реконструируемого сигнала с неограниченным по частоте спектром позволяет расширить возможности теоремы отсчетов [1, 2]. Сохранение ее структуры и определение соответствующим образом коэффициентов весовой функции (3) уменьшают дисперсию ошибки реконструкции сигнала. Снижение дисперсии ошибки может оказаться значительным при существенной неравномерности расположения абсцисс отсчетов на периоде $N\Delta$ и зависит от «гладкости» сигнала. Использование теоремы отсчетов [1, 2] при равномерной дискретизации, т. е. использование разбиения всей последовательности отсчетов на подпоследовательности, дает незначительный выигрыш в уменьшении дисперсии ошибки, который, как следует из теории оптимальной фильтрации, в принципе не может превышать 3 дБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yen J. L.** On nonuniform sampling on bandwidth limited signal // Trans. IRE. 1956. **CT-3**.
2. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Методы теории целых функций в радиотехнике, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.
3. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Восстановление сигнала с неограниченным по частоте спектром при периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 2002. № 5. С. 30.
4. **Ефимов В. М.** Влияние амплитудных шумов на точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 1999. № 5. С. 52.
5. **Ефимов В. М.** Асимптотически оптимальные интерполяционные соотношения // Автометрия. 1992. № 4. С. 3.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
25 апреля 2003 г.