РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2003, том 39, № 6

УДК 519.725 : 519.24

С. Н. Кириллов, О. Е. Шустиков
(Рязань)

МИНИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРА МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрена задача оптимального оценивания спектра мощности случайного процесса в базисе дискретных экспоненциальных функций. Синтезирована оптимальная весовая функция, обеспечивающая минимизацию квадрата нормированной среднеквадратической ошибки оценивания при заданном ограничении на ошибку смещения. Разработана адаптивная процедура модификации оценки спектра мощности при взаимной компенсации составляющих ошибки смещения, позволяющая дополнительно повысить точность спектрального оценивания.

Введение. В радиотехнических устройствах обработки и распознавания случайных сигналов наибольшее распространение получили алгоритмы спектрального анализа реализаций случайного процесса (СП) в гармонических базисах (представление Крамера). Значительный интерес именно к гармоническому представлению СП обусловлен следующими причинами [1]:

– для эргодических СП при устремлении интервала анализа в бесконечность представление Крамера приближается к разложению Карунена – Лоэва, т. е. является оптимальным по критерию минимума среднеквадратической ошибки (СКО) аппроксимации;

– представление Крамера и преобразование Винера – Хинчина могут быть реализованы на основе быстрого преобразования Фурье, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность алгоритма обработки;

– представление в базисе комплексных экспоненциальных функций допускает простую физическую интерпретацию в виде спектра мощности СП в частотном диапазоне.

Как известно [2], оценка спектра мощности нормального СП в базисе комплексных экспоненциальных функций является несостоятельной. В целях получения состоятельных оценок разработана теория сглаживания, основанная на взвешенном усреднении локальных значений спектральных составляющих [2, 3]. При этом выбор весовой или выделяющей функции является принципиальным вопросом, определяющим эффективность спектрального анализа в целом. В работах [4–8] предложены различные весовые функции, обеспечивающие снижение СКО оценивания спектральных составляющих. В [9–11] на основе критерия минимума СКО оценивания спектральной составляющей синтезирована и исследована оптимальная весовая функция в виде степенного полинома. Там же показана возможность адаптации параметров оптимальной весовой функции к априорной информации об анализируемом СП. Дополнительная возможность уменьшения СКО оценивания связана с компенсацией составляющих ошибки смещения на участках спектра мощности с порядком кривизны больше первого.

Целью авторов является разработка параметрических процедур спектрально-корреляционного анализа реализаций СП, обеспечивающих при оптимизации формы весовой функции дополнительное уменьшение СКО оценивания спектра мощности путем взаимной компенсации составляющих ошибки смещения.

Исходные соотношения. Из теории спектрально-корреляционного анализа известно [2, 3], что при достаточно общих предположениях о спектральных характеристиках анализируемого СП смещение и дисперсия состоятельной оценки спектра мощности определяются соответственно приближенными выражениями

$$b\{G_e(f_0)\} \approx \sum_{l=1}^{2}(1/l!)G^{(l)}(f_0)\mu_l, \qquad D\{G_e(f_0)\} \approx G^2(f_0)\rho,$$

где $G(f_0)$, $G_e(f_0)$ – гипотетическое значение спектра мощности на частоте f_0 и его модифицированная (сглаженная) оценка; $G^{(l)}(f_0)$ – значение l-й производной функции $G(f)$ в точке f_0;

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} f^l W(f)df; \qquad \rho = \int_{-\infty}^{\infty} W^2(f)df;$$

$W(f)$ – весовая функция. Для того чтобы функция корреляционного окна (выделяющая функция) принадлежала области действительных чисел, требуется свойство четности весовой функции $W(f)$ относительно частоты: $W(f) = W(-f)$ [3]. При этом в выражении для $b\{G_e(f_0)\}$ все функционалы с нечетным значением l обращаются в нуль, что приводит к уменьшению ошибки смещения. В рамках цифрового спектрального анализа вышеуказанное свойство четности может не выполняться. В этом случае функционалы μ_l с нечетным значением l отличны от нуля и возможно значительное увеличение ошибки смещения.

Если порядок кривизны функции $G(f)$ больше первого, то на выпуклых и возрастающих или вогнутых и убывающих участках первая и вторая производные имеют противоположные знаки: $G^{(1)}(f_0)G^{(2)}(f_0) < 0$. Тогда определение весовой функции, обеспечивающее условие $\mu_1 \neq 0$ и допускающее свободное изменение значений функционалов μ_1 и μ_2, позволит осуществить взаимную компенсацию составляющих ошибки смещения при выполнении равенства $\left|G^{(1)}(f_0)\right|\mu_1 = 0{,}5\left|G^{(2)}(f_0)\right|\mu_2$ за счет адаптации параметров весовой функции к априорной и апостериорной информации о форме $G(f)$.

Рассмотрим стационарный СП $\Im(n,\omega)$, являющийся функцией двух аргументов: дискретного времени $n \in [0, N-1]$ и элементарного события ω из пространства Ω элементарных событий с заданной на нем вероятностной мерой. Положим, что СП $\Im(n,\omega)$ гильбертов, измерим, имеет нулевое среднее значение и конечную энергию. Тогда СП $\Im(n,\omega)$ является элементом сепарабельного гильбертова пространства элементарных событий над гильбертовым пространством реализаций и представим в виде обобщенного ряда Фурье по ортонормированной системе функций, образующих счетный базис в данном пространстве [1]. Пусть в качестве системы ортогональных функций пространства реализаций выступает система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) $\{\varphi_k(n)\}_{n,k=0}^{N-1}$, где $\varphi_k(n) = \exp(j2\pi kn/N)$, получившая наибольшее распространение в задачах цифрового спектрально-корреляционного анализа. Между комплексными экспоненциальными функциями и ДЭФ имеется ряд существенных отличий, вызванных разной природой переменных континуального и дискретного времени [12]. Последнее обстоятельство выражается в изменении свойств четности и мультипликативности, которые лежат в основе математического аппарата весовой обработки несостоятельных оценок спектра мощности. Для описания свойств четности и мультипликативности в базисе ДЭФ используется N-ичная система счисления, где основной арифметической операцией является сложение по модулю $N - \oplus$ [12]. При этом два числа k, $k^* \in [0, N-1]$ определяются как противоположные в N-ичной арифметике, т. е. $k \oplus k^* = 0$, если $k^* = N - k$.

Модификация несостоятельной оценки спектра мощности СП $\Im(n,\omega)$ в базисе ДЭФ основана на процедуре обобщенной свертки [3, 11]:

$$S_e(k) = \sum_{g=0}^{N-1} F_e(g) R(g \oplus k^*), \tag{1}$$

где $F_e(g) = (1/N^2)\left|\sum_{n=0}^{N-1} \xi(n)\overline{\varphi_g(n)}\right|^2$ – несостоятельная оценка спектра мощности, вычисляемая по реализации $\xi(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, СП $\Im(n,\omega)$; $R(g)$ – некоторая весовая функция; черта над $\varphi_g(n)$ означает комплексное сопряжение. Заметим, что оценка спектра мощности (1) является состоятельной, но смещенной [2, 3]. При этом эффективность данной оценки существенным образом зависит от вида и формы весовой функции $R(g)$. Рассмотрим область определения весовой функции $R(g)$, полагая, что число отсчетов, характеризующих ее длительность, равно $(2L+1)$. Потребуем, чтобы весовая функция $R(g)$ являлась четной функцией относительно N-ичного сдвига: $R(g) = R(g^*)$. Тогда весовая функция $R(g)$ отлична от нуля при $g = L^*, (L-1)^*, \ldots, 2^*, 1^*, 0, 1, 2, \ldots, (L-1), L$.

Квадрат нормированной СКО оценивания k-й спектральной составляющей в базисе ДЭФ можно представить выражением [11]:

$$\varepsilon^2(k) = \mathrm{M}\{[S_e(k) - S(k)]^2\}/[S(k)]^2 =$$

$$= D\{S_e(k)\}/[S(k)]^2 + [b\{S_e(k)\}/S(k)]^2 \approx$$

$$\approx \beta + [(\Delta S(k)/S(k))\alpha_1 + (\Delta^2 S(k)/(2S(k)))\alpha_2]^2, \tag{2}$$

где $S(k)$ – гипотетическое значение k-го отсчета спектра мощности СП $\Im(n,\omega)$; $\Delta S(k), \Delta^2 S(k)$ – первая и вторая конечные разности функции $S(k)$; $\mathrm{M}\{\bullet\}$ – символ математического ожидания; $D\{S_e(k)\}$, $b\{S_e(k)\}$ – дисперсия и смещение состоятельной оценки спектра мощности (1) соответственно; $\beta = 2\sum_{g=L^*}^{L} R^2(g)$;

$$\alpha_1 = \sum_{g=L^*}^{L} gR(g); \qquad \alpha_2 = \sum_{g=L^*}^{L} g^2 R(g). \tag{3}$$

При этом изменение индекса суммирования g в последних выражениях осуществляется в соответствии с областью определения весовой функции $R(g)$. Заметим, что выражение (2) справедливо только в случае выполнения условия нормировки $\alpha_0 = \sum_{g=L^*}^{L} R(g) = 1$ [11].

Представим задачу минимизации $\varepsilon^2(k)$ как задачу минимизации функционала β при наличии ограничений (3) и $\alpha_0 = 1$. Решением данной вариационной задачи является оптимальная весовая функция [11]:

$$R(g) = A_2 g^2 + A_1 g + A_0, \quad g = \overline{L^*, L}, \tag{4}$$

где A_2, A_1, A_0 – некоторые постоянные множители. Выражение (4) содержит, как и в случае «окна» веберовского типа («окна» Каппелини), член с нечетной степенью. Фиксированные значения коэффициентов «окна» Каппелини ограничивают область его применения непараметрическим случаем. Оптимальная весовая функция (4) обеспечивает адаптацию к параметрам анализируемого СП, что выражается в использовании имеющейся априорной и апостериорной информации о форме гипотетического спектра мощности при выборе значений α_1, α_2. Подставляя выражение (4) в условие нормировки $\sum_{g=L^*}^{L} R(g) = 1$ и формулы (3), получим систему из трех алгебраических уравнений, при решении которой найдем значения коэффициентов A_2, A_1, A_0, определяющих форму $R(g)$. В этом случае процедура оптимальной весовой обработки обеспечит минимизацию квадрата нормированной СКО оценивания спектральной составляющей при заданном ограничении на ошибку смещения.

Оптимизация весовой функции. Рассмотрим требования к выбору ограничений на функционалы α_1, α_2, исходя из имеющейся априорной и апостериорной информации о параметрах анализируемого СП. Анализ выражения (2) показывает, что в случаях, если $\Delta S(k)$ и $\Delta^2 S(k)$ имеют противоположные знаки, выбор параметров оптимальной весовой функции позволит осуществить взаимную компенсацию составляющих ошибки смещения. Если обеспечить равенство $\left|\Delta S(k)/S(k)\right|\alpha_1 = \left|\Delta^2 S(k)/[2S(k)]\right|\alpha_2$ при выполнении условия $\Delta S(k)\Delta^2 S(k) < 0$, то приближенно можно считать $b\{S_e(k)\} \approx 0$ и $\varepsilon^2(k) \approx \beta$. В этом случае связь функционалов ошибки смещения определяется соотношением $\alpha_1 = K\alpha_2$, где $K = \left|\Delta^2 S(k)/[2\Delta S(k)]\right|$ – параметр оптимизации, характеризующий априорные или апостериорные сведения о форме спектра мощности анализируемых реализаций СП. Используя условие нормировки и формулы (3), запишем систему уравнений для определения параметров оптимальной весовой функции в случае $\alpha_1 = K\alpha_2$:

$$\sum_{g=L^*}^{L} R(g) = 1, \qquad \sum_{g=L^*}^{L} gR(g) = \alpha_1, \qquad \sum_{g=L^*}^{L} g^2 R(g) = \alpha_1 / K. \tag{5}$$

При подстановке выражения (4) в формулы (5) получим систему из трех уравнений, содержащую пять неизвестных: $A_2, A_1, A_0, \alpha_1, L$. В целях определения значений α_1, L ограничим пространство возможных решений, дополнив систему (5) двумя уравнениями, обеспечивающими равенство нулю оптимальной весовой функции (4) и ее изменения в точках L, L^*:

$$A_2 L^2 + A_1 L + A_0 = 0, \qquad 2A_2 L + A_1 = 0. \tag{6}$$

Решая систему из уравнений (5), (6), получим

$$A_2 = \frac{3}{L(2L^2+1)}, \qquad A_1 = \frac{-6}{(2L^2+1)}, \qquad A_0 = \frac{3L}{(2L^2+1)}, \tag{7}$$

где L зависит от значения параметра оптимизации K и размерности пространства реализаций N. Исследования полученных выше соотношений показали, что применение точной процедуры адаптации параметров оптимальной весовой функции позволяет осуществить взаимную компенсацию составляющих ошибки смещения в достаточно узком диапазоне значений параметра K. Расширение возможностей процедуры адаптации за счет использования большего диапазона значений параметра оптимизации K достигается только при частичной взаимной компенсации составляющих ошибки смещения. Для этого предлагается определять параметры A_2, A_1, A_0 по одной из двух N-ично симметричных частей оптимальной весовой функции (4). В этом случае зависимость решения от размерности пространства реализаций будет отсутствовать. Система уравнений (5) преобразуется к виду

$$R(0) + 2\sum_{g=1}^{L} R(g) = 1, \qquad 2\sum_{g=1}^{L} gR(g) = \alpha_1, \qquad 2\sum_{g=1}^{L} g^2 R(g) = \alpha_1 / K. \tag{8}$$

Решая уравнения (8) совместно с уравнениями (6), получим выражения для параметров A_2, A_1, A_0 в виде формул (7), где $L = [1/4K][5 + \sqrt{25 - 16K^2}]$.

Из анализа выражения для L следует, что при $K > 1{,}25$ под знаком квадратного корня получается отрицательное число, т. е. решение исходной системы уравнений противоречит физическому смыслу задачи. Если значение параметра $K \le 1{,}25$ $(L \ge 1)$, синтез оптимальной весовой функции возможен, так как при этом существуют значения коэффициентов A_2, A_1, A_0, обеспечивающие частичную взаимную компенсацию составляющих ошибки смещения. Зависимость параметра оптимизации K от L приведена на рис. 1. В частности, когда отношение $\Delta^2 S(k) / [2\Delta S(k)]$ начинает возрастать, т. е. уменьшается $\Delta S(k)$ и растет $\Delta^2 S(k)$, что наблюдается при приближении к

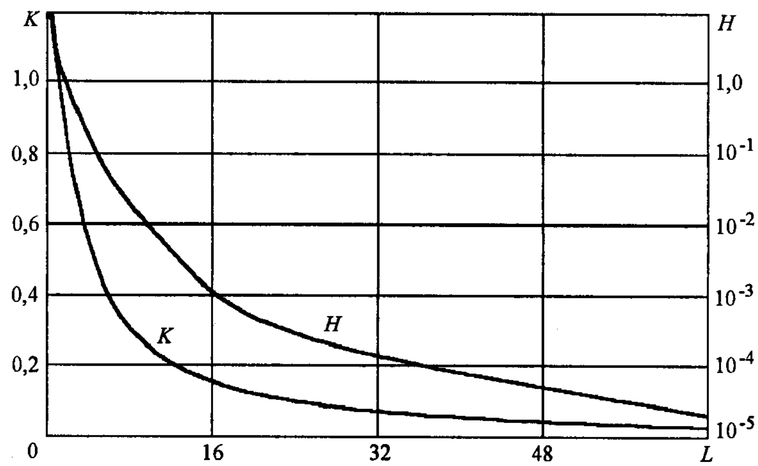

Рис. 1

вершине максимума гипотетического спектра мощности, требуется уменьшать длительность весовой функции. В этом заключается физический смысл существенного снижения ошибки смещения на основе синтезированной оптимальной весовой функции.

Определим параметры оптимальной весовой функции в случаях, если $\Delta S(k)\Delta^2 S(k) > 0$ или $\Delta S(k)\Delta^2 S(k) < 0$, но $K > 1{,}25$. Здесь взаимная компенсация составляющих ошибки смещения невозможна. Предположим, что $\Delta^2 S(k) \ll \Delta S(k)$. Тогда выражение (2) примет вид

$$\varepsilon_1^2(k) \approx \beta + [\Delta S(k)/S(k)]^2 \alpha_1^2 = \beta + H\alpha_1^2, \tag{9}$$

где $H = [\Delta S(k)/S(k)]^2$ – параметр оптимизации, характеризующий априорные и апостериорные сведения о форме спектра мощности анализируемых реализаций СП в случае соотношения (9). Весовую функцию, которая дает минимум функционала (9), будем считать оптимальной. Составим исходную систему уравнений для нахождения коэффициентов A_2, A_1, A_0. Необходимыми требованиями являются условие нормировки и ограничения на форму оптимальной весовой функции (6). Решая полученную систему уравнений, найдем выражения для коэффициентов A_2, A_1, A_0 в виде формул (7), где число L определяется из условия минимума функционала ошибки (9). Исследования оптимальных значений длительности весовой функции в области определения параметра оптимизации позволили получить зависимость H от L, представленную на рис. 1. Как и в предыдущем случае, характерна гибкая адаптация длительности оптимальной весовой функции к виду анализируемого спектра мощности: с ростом изменений функции в окрестности точки k (увеличивается первая конечная разность) требуется меньшая длительность оптимальной весовой функции, что, в свою очередь, обеспечивает минимизацию ошибки оценивания.

Таким образом, адаптивная процедура оптимальной весовой обработки, минимизирующая квадрат нормированной СКО оценивания спектра мощности, включает следующие этапы:

1. По исходной реализации СП $\xi(n)$, $n=\overline{0, N-1}$, вычисляется несостоятельная оценка спектра мощности $F_e(k)$, $k=\overline{0, N-1}$.

2. Определяются параметры оптимизации K или H. Если априорные данные об этих параметрах отсутствуют, то следует использовать их оценки, которые вычисляются на основе $S_e(k)$, $k=\overline{0, N-1}$. При этом в выражении (1) применяется произвольная весовая функция (например, функция спектрального окна Пугачева – Даниэля), позволяющая осуществить предварительное сглаживание для определения оценок значений K, H.

3. Вычисляется оптимальная модифицированная оценка спектра мощности по формуле (1). При этом для каждого отсчета находится своя оптимальная весовая функция. Коэффициенты A_2, A_1, A_0 во всех случаях определяются выражениями (7), в которых значение L зависит от K или от H (см. рис. 1).

Экспериментальные исследования. Исследование эффективности адаптивной процедуры оптимального по критерию (2) оценивания спектра мощности осуществлялось методом имитационного моделирования реализаций СП с заданным спектром мощности. В качестве модели использовался стационарный нормальный СП, имеющий корреляционную функцию

$$K(\tau)=\exp(-2\pi f_* \tau)\cos(2\pi f_+ \tau), \qquad (10)$$

где f_* = 1,3 кГц, $f_+ = 2$ кГц – параметры моделируемого СП. Выбор данных значений параметров f_*, f_+ обусловлен требованием унимодальности функции $G(f)$, соответствующей корреляционной функции (10). В этом случае спектр мощности $G(f)$ содержит ярко выраженный максимум с двухсторонними скатами, имеющими достаточно большой диапазон изменения крутизны. Последнее требование необходимо для более тщательного анализа эффективности процедуры оптимальной весовой обработки во всем возможном диапазоне изменения параметров K и H. В эксперименте использовались $V=250$ реализаций СП, верхняя частота спектра мощности $G(f)$ ограничивалась полосой $f_\text{v}=5f_+=10$ кГц. При этом обеспечивается четкая детализация формы максимума $G(f)$. Исследования показали, что число отсчетов $N=128$ достаточно для выявления позитивных свойств алгоритма оптимальной весовой обработки. Гипотетический спектр мощности, являющийся эталоном в критерии (2), определялся из выражения $S(k)=G(k[f_\text{v}/N])$, $k=\overline{0, N-1}$, (рис. 2). В соответствии с адаптивной процедурой оптимальной весовой обработки производилось оценивание спектра мощности и вычислялось среднее значение оценки квадрата нормированной СКО оценивания спектральной составляющей

$$\varepsilon_e^2(k)=(1/V)\sum_{\nu=1}^{V}([S_e^\nu(k)-S(k)]^2/[S(k)]^2),$$

усреднение которой $\varepsilon_{e0}^2=(1/N)\sum\limits_{k=0}^{N-1}\varepsilon_e^2(k)$ позволяло выбрать оптимальную длительность весовой функции Пугачева – Даниэля исходя из минимума функционала ε_{e0}^2. На рис. 2 кривой 1 представлена зависимость $\varepsilon_e^2(k)$ от номера k, при этом осредненное значение составило ε_{e0}^2 = 0,232.

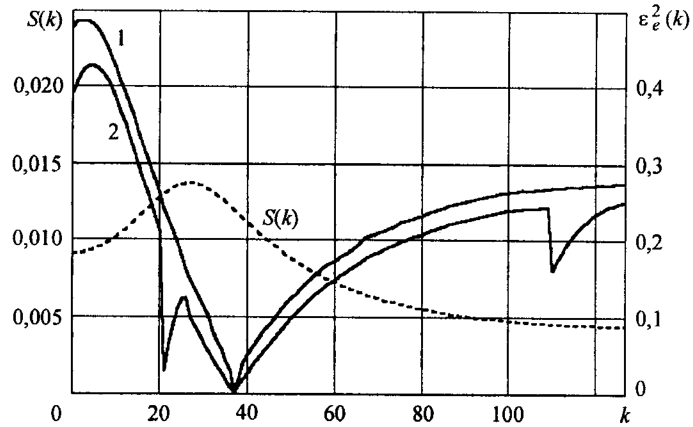

Рис. 2

Полученный при оптимальной длительности весовой функции Пугачева – Даниэля ансамбль реализаций оценок $S_e^{\nu}(k)$, $\nu=\overline{1,V}$, гарантировал достаточно точное определение параметров оптимизации K, H. Затем производились повторные операции обобщенной свертки несостоятельных оценок спектра мощности с оптимальными весовыми функциями и вычислялись новые оптимальные модифицированные оценки $S_e^{\nu}(k)$, $\nu=\overline{1,V}$. Контроль качества осуществлялся с помощью среднего значения оценки квадрата нормированной СКО оценивания по аналогии с $\varepsilon_e^2(k)$. Зависимость $\varepsilon_e^2(k)$ от номера спектральной составляющей при использовании предложенной адаптивной процедуры весовой обработки, оптимальной по критерию (2), представлена на рис. 2 кривой 2. При этом усредненное по номерам спектральных составляющих значение оценки квадрата нормированной СКО оценивания составило $\varepsilon_{e0}^2 = 0{,}193$.

Сравнительный анализ зависимостей на рис. 2 показывает, что точность оценивания на основе предложенной адаптивной процедуры весовой обработки, оптимальной по критерию (2), существенно выше, чем точность оценивания при использовании известных непараметрических алгоритмов сглаживания типовыми весовыми функциями. Выигрыш по ε_{e0}^2 составлял в среднем 17 %. Такое преимущество обусловлено позитивными выбросами (см. рис. 2, кривая 2), где проявляется эффект частичной взаимной компенсации составляющих ошибки смещения. Преимущество предложенного подхода к определению оптимальной весовой функции сохранялось также при использовании в качестве параметра оптимизации H (средний выигрыш по критерию (2) составлял 9–11 %, а в отдельных точках достигал 23 %).

В целом можно заключить, что применение предложенной адаптивной процедуры оптимальной весовой обработки при спектральном анализе дискретных СП является целесообразным, так как позволяет получить существенный выигрыш по критерию минимума нормированной СКО оценивания за счет использования априорной и апостериорной информации о локальных особенностях оцениваемого спектра мощности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Омельченко В. А.** Основы спектральной теории распознавания сигналов. Харьков: Вища шк., 1983.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Т. 1.
3. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Выборочные оценки спектральных характеристик стационарных случайных процессов. М.: Энергия, 1978.
4. **Grenander U., Rosenblatt M.** Statistical Analysis of Stationary Time Series. N. Y.: John Willey, 1957.
5. **Lomnicki A. A., Zaremba S. K.** On estimating the spectral density function of a stochastic process // Journ. Roy. Statist. Soc. 1957. **B19**, N 13.
6. **Кулешов Е. Л.** Оптимальные сглаживающие окна в спектральном анализе случайных процессов // Автометрия. 1999. № 2. С. 44.
7. **Алексеев В. Г.** Непараметрический спектральный анализ стационарных случайных процессов // Автометрия. 2000. № 4. С. 131.
8. **Алексеев В. Г.** Выбор спектрального окна при построении оценки спектральной плотности случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 9. С. 38.
9. **Кириллов С. Н.** Увеличение разрешающей способности по времени сигналов с ограниченной полосой частот // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. № 4. С. 100.
10. **Кириллов С. Н., Соколов М. Ю., Стукалов Д. Н.** Оптимальная весовая обработка при спектральном анализе сигналов // Радиотехника. 1996. № 6. С. 36.
11. **Кириллов С. Н., Шустиков О. Е.** Оптимальная весовая обработка периодограммы обобщенной спектральной плотности случайного процесса // Автометрия. 2000. № 3. С. 54.
12. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

Рязанская государственная
радиотехническая академия,
E-mail: snk@rinf.ryazan.ru

Поступила в редакцию
26 ноября 2002 г.