

Е. В. Шапошникова

(Новосибирск)

**О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЪЕКТА
ПРИ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ
В КОНУСАХ ЛУЧЕЙ***

Для метода томографической реконструкции объекта в конусах лучей рассмотрена траектория движения источника излучения, состоящая из двух пересекающихся окружностей. Предложен алгоритм выбора окружности для каждой плоскости, пересекающей объект, который может применяться в целях получения наиболее точного результата при реконструкции. Приведены результаты компьютерного моделирования, позволяющие качественно оценить преимущество алгоритма выбора окружности. Показано, что для рассматриваемой траектории точность определения границ зависит от их расположения. Найдены направления с наибольшей точностью реконструкции.

Задача томографической реконструкции в конусах лучей заключается в восстановлении плотности трехмерного объекта в заданной точке. Исходными данными являются значения на пленке или двумерной матрице детекторов, полученные при разных положениях источника излучения, дискретно движущегося по некоторой трехмерной траектории. Математически решается задача определения функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, лежащих в трехмерном пространстве.

При использовании метода трехмерной томографической реконструкции предполагается, что для исследуемого объекта и траектории движения источника излучения выполняется условие Кириллова – Туя [1, 2]: любая плоскость, пересекающая носитель функции, пересекает траекторию движения источника. Этому условию удовлетворяют траектория, состоящая из двух пересекающихся окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, и носитель функции – сфера.

Для формул обращения трехмерной томографической реконструкции [1–4] в работе [5] приводятся численные алгоритмы и результаты моделирования томографической реконструкции, когда траектория движения источника состоит из двух пересекающихся окружностей; исходными данными являются значения функции, заданные на поверхности сферы.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00910, № 03-7-90060) и фонда «Научный потенциал».

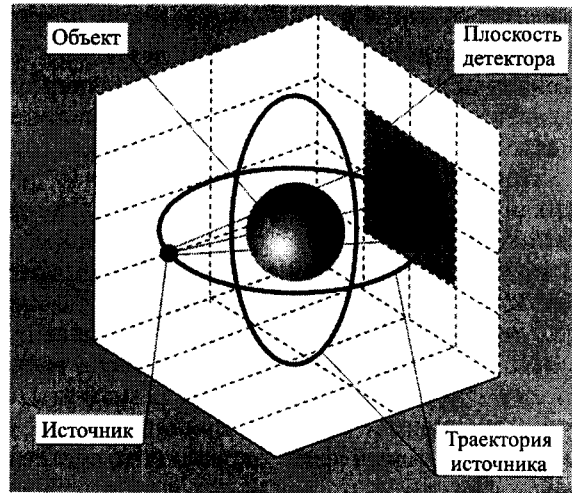


Рис. 1. Возможная схема получения данных при трехмерной томографической реконструкции: траектория движения источника – две пересекающиеся окружности, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, плоский детектор

В данной работе рассматривается случай, когда траектория состоит из двух пересекающихся окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, а исходными данными являются значения функции, заданные на поверхности плоского детектора (рис. 1).

Формула обращения трехмерной томографической реконструкции, пригодная для построения численных алгоритмов, приведена в [5, 6] в следующем виде:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{\langle \gamma'(\lambda), \beta \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{S(\beta)} U(\beta, D) g^+(\lambda, \xi) \Omega(\xi) \right] d\theta d\varphi. \quad (1)$$

Здесь $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ – искомая функция; $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \gamma_3(\lambda))$ – траектория движения источника; $g^+(\lambda, \xi)$ – интеграл от функции $f(x)$ вдоль луча, проходящего через точку $\gamma(\lambda)$ в направлении вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi, \cos\theta \cdot \sin\varphi, \sin\theta)$ (где θ – угол между вектором и плоскостью $z = 0$, а φ – угол между проекцией вектора на плоскость $z = 0$ и осью OX); $\lambda = \lambda(\theta, \varphi) = \lambda(x, \beta)$ такое, что $\langle \beta, x \rangle = \langle \beta, \gamma(\lambda) \rangle$ и $\langle \beta, \gamma'(\lambda) \rangle \neq 0$; $S(\beta)$ – окружность, являющаяся пересечением единичной сферы и плоскости $P(\beta)$. Плоскость $P(\beta)$ проходит через начало координат и ортогональна вектору β . Символ $\Omega(\xi)$ означает интегрирование по окружности, оператор $U(\beta, D)$ – дифференцирование функции $g^+(\lambda, \xi)$ в направлении вектора β .

В предлагаемой работе при моделировании траекторию источника составили две пересекающиеся окружности единичного радиуса, лежащие в плоскостях $z = 0$ и $y = 0$. Восстанавливался однородный шар радиуса 0,1 с внутренней шаровой полостью радиуса 0,02. Шаг дискретизации при движении источника $\delta\lambda = 2\pi/360$. Моделировался случай, когда исходными данными

ми являлись значения функции $g^+(\lambda, \xi)$, заданные на поверхности плоского детектора; размер регистрирующей матрицы детектора $0,4 \times 0,4, 512 \times 512$ ячеек. Такие параметры схемы получения данных используются в реальной системе, предназначенной для исследования головы человека. Центры шара и полости находятся в точке $(0, 0, 0)$.

Так как траектория движения источника состоит из двух окружностей, лежащих во взаимно ортогональных плоскостях, то возможно пересечение обеих окружностей плоскостью $P(\beta(\varphi, \theta))$, проходящей через точку $x = (x_1, x_2, x_3)$. В таких случаях выбор окружности оказывает существенное влияние на результаты реконструкции. Если точку положения источника выбирать на окружности, плоскость которой составляет с вектором $x = (x_1, x_2, x_3)$ большой угол, то такой алгоритм выбора точки положения источника позволяет получать наиболее точные результаты. При этом самые точные результаты получаются в точках, принадлежащих прямым, ортогональным плоскостям, в которых лежат окружности, составляющие траекторию источника.

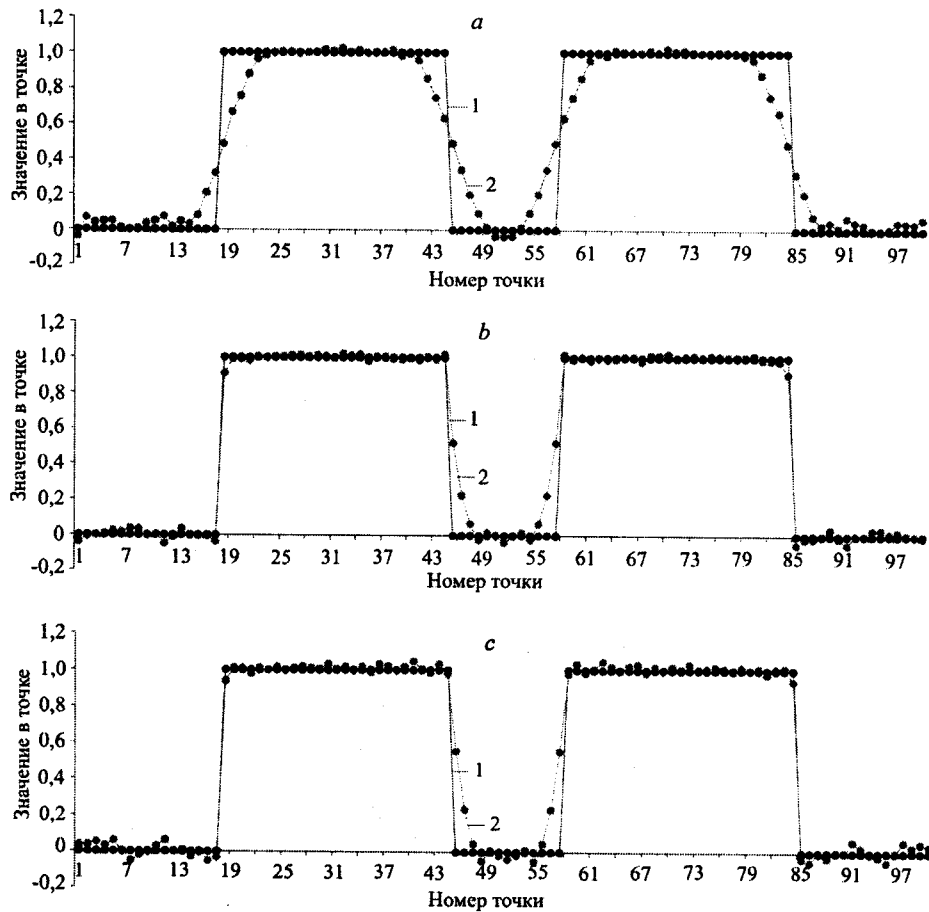


Рис. 2. Результаты реконструкции в точках: по оси X (a), по оси Y (b), по оси Z (c); кривые 1 – действительные значения, 2 – восстановленные значения

В работе [5] предложен алгоритм выбора окружности с проверкой выполнения условия трансверсальности. Но для описываемых параметров схемы получения данных алгоритм в предлагаемой работе дал лучшие результаты при реконструкции объекта.

На рис. 2 представлены результаты реконструкции в точках, принадлежащих прямым – осям координат. Восстанавливались значения в 100 точках на отрезках, принадлежащих осям X , Y , Z , с шагом 0,3 для каждой оси. Шаги для $\beta(\varphi, \theta)$: $\delta\varphi = 2\pi/200$, $\delta\theta = \pi/100$. Наиболее точные результаты получены в точках, лежащих на осях Y и Z , наименее точные – в точках на оси X . Это позволяет сделать вывод, что для наиболее точного восстановления значения в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ необходимо иметь траекторию движения источника, лежащую в плоскости, ортогональной вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$.

В некоторых случаях можно выбирать траекторию источника, оптимальную для заданного направления. В случаях, когда этого делать нельзя, необходимо учитывать, что в направлении, ортогональном отсутствующей плоскости, качество восстановления будет хуже, чем в направлениях, ортогональных плоскостям траектории источника.

Нечеткость границ шара и полости обусловлена объемом проекционных данных. Для 360 положений источника на окружности при вычислении производной по λ в формуле (1) приращение $\partial\lambda = 1^\circ$. На рис. 3 для сравнения приведены результаты реконструкции в точках по осям X и Y для 720 ($\partial\lambda = 0,5^\circ$) и 360 положений источника на окружности. Качество реконструкции повышается, при этом эффект разной точности сохраняется.

На рис. 4 представлен результат реконструкции в плоскости $z = 0$ с шагом $\delta x = \delta y = 0,3$. Белыми линиями показаны реальные границы шара и полости. Описанный эффект проявляется в виде размытых границ по оси X .

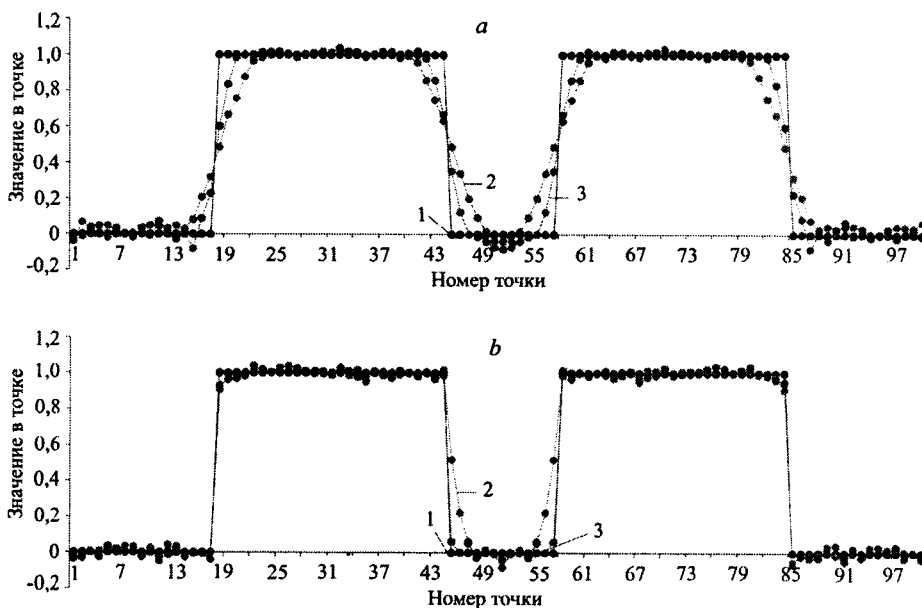


Рис. 3. Результаты реконструкции в точках: по оси X (а), по оси Y (б); кривые 1 – действительные значения, 2 – восстановленные значения при $\partial\lambda = 1^\circ$, 3 – восстановленные значения при $\partial\lambda = 0,5^\circ$

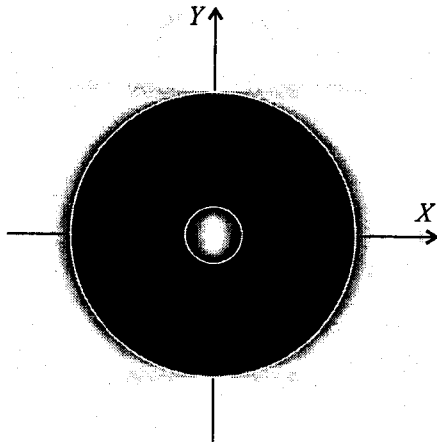


Рис. 4. Результат реконструкции в сечении $z = 0$

В данной работе не рассматривались погрешности, связанные с влиянием случайных помех. Степень размытия контрастных деталей определяется объемом проекционных данных, а также параметрами алгоритма реконструкции, в частности параметрами алгоритма численного дифференцирования. Однако полученные результаты позволяют предположить, что отмеченный эффект сохранится и при учете случайных погрешностей, и при использовании более тонких алгоритмов

дифференцирования, хотя, возможно, будет менее выражен.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук О. Е. Трофимову за внимание к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. А. Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. 137, № 2. С. 276.
2. Туу Н. К. An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM Journ. Appl. Math. 1983. 43, N 3. P. 546.
3. Денисюк А. С. Исследование по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук /МГУ. М., 1991. С. 16.
4. Трофимов О. Е. К задаче восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Методы решения условно-корректных задач. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1991.
5. Касьянова С. Н., Трофимов О. Е. Компьютерное моделирование алгоритма трехмерной томографии для траектории источника, состоящей из двух пересекающихся окружностей // Автометрия. 1996. № 6. С. 50.
6. Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.

Новосибирский государственный
технический университет,
Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
E-mail: shaposhnikova_e@ngs.ru

Поступила в редакцию
8 августа 2003 г.