

Д. Ю. Акатьев, В. В. Савченко

*(Нижний Новгород)***ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА
НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА
ИНФОРМАЦИОННОГО РАССОГЛАСОВАНИЯ**

Поставлена и решена задача обнаружения разладки случайного гауссовского процесса по имеющейся конечной выборке наблюдений с использованием принципа минимального информационного рассогласования распределений в метрике Кульбака – Лейблера.

Введение. Во многих областях прикладных исследований, например в технической и медицинской диагностике, где вся доступная информация заключена в конечных выборках многомерных наблюдений, возникает необходимость по возможности точно ответить на вопрос: насколько существенно отличаются свойства анализируемых сигналов, характеризующие различные состояния изучаемого объекта? Ответ на вопрос сводится к задаче обнаружения разладки случайного процесса X по выборке повторных наблюдений. Такая задача рассмотрена в работе [1] в предположении о гауссовском законе распределения случайных сигналов и заданной априори исходной матрице автоковариаций. В работе [2] показано, что предположение о гауссовском законе не является чрезмерно жестким ограничением, поскольку оно отталкивается от естественного стремления ограничиться рассмотрением моментов распределений не выше второго порядка, таких как автоковариационная функция и спектральная плотность мощности. В этом случае наиболее важным является ограничение, связанное с заданием автоковариационной матрицы сигнала. В предлагаемой работе снимается и это ограничение. В отличие от работы [1] обработка велась по конечным выборкам наблюдений при отсутствии точных данных в отношении автоковариационной матрицы. При этом исследование проводилось на основе универсального теоретико-информационного подхода с применением метрики Кульбака – Лейблера [3].

Постановка задачи. Задача обнаружения разладки гауссовского процесса X по однородной выборке многомерных повторных наблюдений традиционно формулируется в терминах проверки статистических гипотез [2]: проверяется гипотеза

$$W_0: P = N(\mu, K_1)$$

против альтернативы

$$W_1: P = N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{K}_2), \quad \mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_2.$$

Здесь $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{K})$ – гауссовский закон распределения, заданный n -вектором средних значений $\boldsymbol{\mu}$ и матрицей $(n \times n)$ автоковариаций \mathbf{K} ; \mathbf{K}_1 – исходная матрица автоковариации. В дальнейшем без нарушения общности формулировки задачи будем полагать процесс X центрированным, т. е. $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

Так как в большинстве практических ситуаций автоковариационные матрицы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 заранее неизвестны, то информация о них заключена в двух независимых выборках многомерных наблюдений $X_1 = (\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,2}, \dots, \mathbf{x}_{1,M_1})^T$ и $X_2 = (\mathbf{x}_{2,1}, \mathbf{x}_{2,2}, \dots, \mathbf{x}_{2,M_2})^T$ объемов M_1 и M_2 соответственно. Здесь $\mathbf{x}_{i,j} = (x_{i,j}(1), x_{i,j}(2), \dots, x_{i,j}(n))$ – n -выборка в j -м цикле наблюдений над i -м случайным процессом X_i , $i=1,2$, со свойством $\mathbf{M}_x(\mathbf{x}_{i,j} \mathbf{x}_{i,j}^T) = \mathbf{K}_i$ (\mathbf{M}_x – символ математического ожидания, T – операция транспонирования векторов). В общем случае количество циклов наблюдений M_1, M_2 различно, причем предполагается, что выполняется соотношение $M_1 \gg M_2$, так как естественным является требование к оперативному принятию решения по выборке X_2 .

Введем понятие объединенной выборки $X_0 = (X_1, X_2)$ суммарного объема $M_0 = M_1 + M_2$. Тогда задача формулируется в терминах проверки гипотез в отношении двух автоковариационных матриц \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 : проверяется сложная гипотеза об их равенстве

$$W_0: \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{K}_0$$

против сложной альтернативы об их неравенстве

$$W_1: \mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_2.$$

Выборке X_1 соответствует автоковариационная матрица \mathbf{K}_1 , а выборке X_2 – либо \mathbf{K}_1 , либо нет. Причем \mathbf{K}_1 нам не задана. Именно по выборке X_2 принимается решение о разладке. Воспользуемся асимптотически минимаксным критерием отношения правдоподобия [4]. При этом критическая область в объединенном выборочном пространстве X_0 определяется согласно следующему правилу:

$$\lambda(X_0) = \left[\sup_{\mathbf{K}_1} p(X_1 | W_1) \sup_{\mathbf{K}_2} p(X_2 | W_1) \right] / \sup_{\mathbf{K}_0} p(X_0 | W_0) > \lambda_0, \quad (1)$$

где $p(X_0 | W_1) = p(X_1 | W_1)p(X_2 | W_1)$ и $p(X_0 | W_0) = p(X_1 | W_0)p(X_2 | W_0)$ – функции правдоподобия гипотез W_1 и W_0 соответственно (\sup обозначает верхнюю границу каждой функции на множестве допустимых автоковариаций). Пороговый уровень $\lambda_0 = \text{const}$ устанавливается в зависимости от требований к уровню значимости α_0 принимаемого решения:

$$P\{\lambda(X_0) > \lambda_0 | W_0\} = \alpha_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Синтез алгоритма. Учитывая независимость наблюдений $\{\mathbf{x}_{i,j}\}$ в совокупности, получим систему равенств [1]:

$$p(X_k | W_1) = \prod_{i=1}^{M_k} p(\mathbf{x}_{k,i}) = ((2\pi)^n |\mathbf{K}_k|)^{-M_k/2} \exp\left(-0,5 \sum_{i=1}^{M_k} \mathbf{x}_{k,i}^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{x}_{k,i}\right), k=1,2,$$

$$p(X_0 | W_1) = \prod_{i=1}^{M_1} p(\mathbf{x}_{1,i}) \prod_{i=1}^{M_2} p(\mathbf{x}_{2,i}) = (2\pi)^{-(M_1+M_2)n/2} |\mathbf{K}_1|^{-M_1/2} |\mathbf{K}_2|^{-M_2/2} \times \\ \times \exp\left\{-0,5 \left[\sum_{i=1}^{M_1} \mathbf{x}_{1,i}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{x}_{1,i} + \sum_{i=1}^{M_2} \mathbf{x}_{2,i}^T \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{x}_{2,i} \right]\right\}, k=0,$$

$$p(X_k | W_0) = ((2\pi)^n |\mathbf{K}_0|)^{-M_k/2} \exp\left[-0,5 \sum_{i=1}^{M_k} \mathbf{x}_{k,i}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{x}_{k,i}\right], k=0,1,2,$$

или после логарифмирования

$$\ln p(X_k | W_1) = -\frac{M_k}{2} \left[\ln |\mathbf{K}_k| + \text{tr}(\mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^{-1}) + n \ln(2\pi) \right],$$

$$\ln p(X_k | W_0) = -\frac{M_k}{2} \left[\ln |\mathbf{K}_0| + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{K}_0^{-1}) + n \ln(2\pi) \right], k=0,1,2,$$

где

$$\mathbf{S}_1 = M_1^{-1} \sum_{i=1}^{M_1} \mathbf{x}_{1,i} \mathbf{x}_{1,i}^T; \quad \mathbf{S}_2 = M_2^{-1} \sum_{i=1}^{M_2} \mathbf{x}_{2,i} \mathbf{x}_{2,i}^T;$$

$$\mathbf{S}_0 = (M_1/M_0) \mathbf{S}_1 + (M_2/M_0) \mathbf{S}_2$$

– отвечающие критерию максимального правдоподобия выборочные оценки автоковариационных матриц \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 и \mathbf{K}_0 соответственно ($|\cdot|$ обозначает их определители, $\text{tr}(\cdot)$ – след квадратных $(n \times n)$ -матриц).

Произведя ряд вычислений [5], получим

$$\ln \text{sup} p(X_k | W_1) = -\frac{M_k}{2} [\ln |\mathbf{S}_k| + nC], \quad k=1,2;$$

(3)

$$\ln \text{sup} p(X_0 | W_0) = -\frac{M_0}{2} [\ln |\mathbf{S}_0| + nC],$$

где $C = \ln(2\pi) + 1 = \text{const}$. Здесь учтено, что на множестве допустимых ковариаций выборочных данных X_1 и X_2 верхняя граница функции правдоподобия достигается при выборе автоковариационных матриц $\mathbf{K}_1 = \mathbf{S}_1$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{S}_2$, когда справедлива гипотеза W_1 , и $\mathbf{K}_0 = \mathbf{S}_0$ в противном случае [2].

Выражения (3) совместно с выражением (1) определяют искомый алгоритм обнаружения разладки гауссовского процесса X по правилу

$$\lambda(X_0) = -\frac{M_1}{2} [\ln |\mathbf{S}_1| + nC] - \frac{M_2}{2} [\ln |\mathbf{S}_2| + nC] + \frac{M_0}{2} [\ln |\mathbf{S}_0| + nC] > \ln \lambda_0 \quad (4)$$

или в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \lambda(X_0) &= 0,5 [M_1 \ln |\mathbf{S}_0| - M_1 \ln |\mathbf{S}_1| + M_2 \ln |\mathbf{S}_0| - M_2 \ln |\mathbf{S}_2|] = \\ &= 0,5 M_1 [\ln |\mathbf{S}_0| - \ln |\mathbf{S}_1| + \text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1}) - \text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1})] + \\ &+ 0,5 M_2 [\ln |\mathbf{S}_0| - \ln |\mathbf{S}_2| + \text{tr}(\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1}) - \text{tr}(\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1})] = \\ &= 0,5 \left\{ M_1 \left[\text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1}) - \ln \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_0|} \right] + M_2 \left[\text{tr}(\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1}) - \ln \frac{|\mathbf{S}_2|}{|\mathbf{S}_0|} \right] - \right. \\ &\left. - M_1 \text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1}) - M_2 \text{tr}(\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1}) \right\} = 0,5 M_1 [\text{tr}(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1}) - \ln |\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_0^{-1}|] + \\ &+ 0,5 M_2 [\text{tr}(\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1}) - \ln |\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_0^{-1}|] - 0,5 M_0 \text{tr} \left(\frac{M_1 \mathbf{S}_1 + M_2 \mathbf{S}_2}{M_0} \mathbf{S}_0^{-1} \right) = \\ &= M_1 \gamma_{1,0} + M_2 \gamma_{2,0} - 0,5 M_0 n \geq \ln \lambda_0, \end{aligned}$$

где $\gamma_{k,0} = 0,5 [\text{tr}(\mathbf{S}_k \mathbf{S}_0^{-1}) - \ln |\mathbf{S}_k \mathbf{S}_0^{-1}|]$. Это с точностью до константы $0,5n$ – величина информационного рассогласования гауссовского процесса с автоковариационной матрицей \mathbf{S}_k , $k=1,2$, по отношению к процессу с матрицей \mathbf{S}_0 [3].

Таким образом, гипотеза о разладке принимается по выборке X_2 при условии

$$W_1: M_1 \gamma_{1,0} + M_2 \gamma_{2,0} \geq \ln \lambda_0 + 0,5 M_0 n = \gamma_0. \quad (5)$$

Решение здесь формируется по принципу минимума информационного рассогласования (МИР) между двумя гипотетическими гауссовскими распределениями с автоковариационными матрицами \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 . Чем ближе в теоретико-информационном смысле выборки X_1 и X_2 расположены друг к другу, тем меньше информационное рассогласование их распределений и распределения объединенной выборки $X_0 = (X_1, X_2)$.

Анализ эффективности разработанного алгоритма в общем случае встречает значительные трудности вычислительного характера. Поэтому упростим задачу, сведя ее к асимптотическому случаю $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим в качестве объектов анализа стационарные гауссовские процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$. В предположении о несингулярности автоковариационных матриц $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1$ и \mathbf{S}_2 будем иметь [5]

$$n^{-1} \ln |\mathbf{S}_k| \Big|_{n \rightarrow \infty} = \ln \sigma_k^2,$$

где $\sigma_k^2 = \sigma_k^2(\mathbf{S}_k)$ – минимальное собственное число автоковариационной матрицы \mathbf{S}_k , $k=0,1,2$, в асимптотическом случае. Величина σ_k^2 определяет мощность порождающего белого гауссовского шума в авторегрессионной модели наблюдений процесса $X_k(t)$ или его некомпенсированного остатка на выходе соответствующего обеляющего фильтра [2]. На основании (4) синтезированный алгоритм (5) может быть переписан в асимптотически эквивалентном виде:

$$W_1: \lambda_M(X) = \frac{\sigma_0^2(\mathbf{S}_0)}{\sigma_1^{2M_1/M_0}(\mathbf{S}_1)\sigma_2^{2M_2/M_0}(\mathbf{S}_2)} \geq \lambda_1, \quad (6)$$

где $\lambda_1 = \text{const}$ – пересчитанное из выражения (1) ко входу логарифмического преобразователя значение оптимального порогового уровня. Решение в данном случае принимается в пользу гипотезы W_0 по признаку минимума дисперсии порождающего шума в линейной модели наблюдений соответствующей структуры или (что эквивалентно) по признаку минимума дисперсии некомпенсированного остатка на выходе соответствующего обеляющего фильтра.

Таким образом, принятию оптимального решения согласно алгоритму (6) предшествует следующая совокупность операций над имеющимися наблюдениями:

- 1) определяются три варианта выборочных оценок неизвестных автоковариационных матриц $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$;
- 2) по ним настраиваются коэффициенты трех разновидностей обеляющего фильтра;
- 3) на фильтры с номерами $k=1,2$ подаются процессы X_1, X_2 , а на объединенный фильтр – последовательно оба процесса X_1 и X_2 , после чего в серии из M_0 независимых испытаний формируются соответствующие отклики обеляющих фильтров;
- 4) по формуле выборочной дисперсии оцениваются значения $\sigma_k^2(\mathbf{S}_k^2)$;
- 5) полученные оценки подставляются в выражение для решающей статистики в левой части алгоритма (6).

В предложенной интерпретации синтезированного алгоритма предельно ясным становится физический смысл осуществляемой обработки: случаю двух однородных гауссовских процессов X_1 и X_2 отвечает в равной мере высокая степень декорреляции или компенсации анализируемых процессов одновременно в каждом обеляющем фильтре. Напротив, если процессы неоднородны, то объединенный фильтр, настроенный по объединенной выборке наблюдений, заведомо проигрывает в качестве компенсации двум другим обеляющим фильтрам, настроенным на каждый из процессов в отдельности.

Отметим, что при учете существенного различия объемов выборок, а именно $M_1 \gg M_2$, оценки дисперсий $\sigma_0^2(\mathbf{S}_0)$ и $\sigma_1^2(\mathbf{S}_1)$ будут практически мало отличаться между собой, так как вклад небольшой выборки X_2 в процедуру настройки объединенного обеляющего фильтра значительно менее выражен по сравнению с влиянием выборки X_1 , и, следовательно, правило (6) может быть сведено к упрощенному виду:

$$W_1: \lambda_M(X) = \frac{\sigma_0^{2M_2/M_0}(\mathbf{S}_0)}{\sigma_2^{2M_2/M_0}(\mathbf{S}_2)} \geq \lambda_1$$

или

$$\tilde{\lambda}_M(X) = \frac{\sigma_0^2(\mathbf{S}_0)}{\sigma_2^2(\mathbf{S}_2)} \geq \tilde{\lambda}_1, \quad (7)$$

где $\tilde{\lambda}_1$ – пересчитанный пороговый уровень. При этом в качестве решающей статистики будем рассматривать модифицированную величину

$$\frac{\sigma_0^2(\mathbf{S}_0)}{\sigma_2^2(\mathbf{S}_2)} = \frac{\chi_{M_1}^2}{\chi_{M_2}^2} \gamma_{1,2} = F_{M_1, M_2} \gamma_{1,2},$$

которая в пренебрежении взаимной коррелированностью χ^2 – статистик Пирсона $\chi_{M_1}^2$ и $\chi_{M_2}^2$ – сводится к статистике Фишера F_{M_1, M_2} порядка (M_1, M_2) с весовым коэффициентом

$$\gamma_{1,2} = \frac{\mathbf{M}_x(\sigma_0^2(\mathbf{S}_0))}{\mathbf{M}_x(\sigma_2^2(\mathbf{S}_2))} = \frac{\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{\Gamma}}{\mathbf{\Gamma}^T [(M_1/M_0) \mathbf{K}_1 + (M_2/M_0) \mathbf{K}_2]^{-1} \mathbf{\Gamma}},$$

зависящим от степени неоднородности выборочных распределений [5] с очевидным свойством $\gamma_{1,2} \geq 1$. Здесь $\mathbf{\Gamma}^T = (1, 0, \dots, 0)$ есть вектор-столбец n , составленный из одних нулей за исключением единицы на первой позиции.

При справедливости исходной гипотезы W_0 об однородности выборок X_1 и X_2 имеем тождественное равенство

$$\gamma_{1,2} = \frac{\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{\Gamma}}{\mathbf{\Gamma}^T [(M_1/M_0) \mathbf{K}_0 + (M_2/M_0) \mathbf{K}_0]^{-1} \mathbf{\Gamma}} = 1$$

и, следовательно, вероятность ошибки первого рода

$$P\{F_{M_1, M_2} > \tilde{\lambda}_1\} = 1 - \Phi_{M_1, M_2}(\tilde{\lambda}_1),$$

где $\Phi_{M_1, M_2}(\tilde{\lambda}_1)$ – интегральная функция F -распределения, значения которой табулированы [6]. Приравнивая правую часть последнего соотношения к фиксированному значению α_0 , из выражения (2) получим зависимость оптимального порогового уровня от заданной вероятности ошибки первого рода:

$$\tilde{\lambda}_1 = \Phi_{M_1, M_2}^{-1}(1 - \alpha_0).$$

Например, для случая $\alpha_0 = 0,05$ при $M_1 = 100$ и $M_2 = 10$ получаем $\tilde{\lambda}_1 = 2,59$. Этот результат характеризует пороговую чувствительность синтезированного алгоритма к различиям в корреляционных свойствах анализируемых выборочных данных. При увеличении объемов наблюдений M_1 и M_2 пороговый уровень алгоритма (7) в пределе уменьшается до единицы, что означает оптимальное решение поставленной задачи (1), (2) в асимптотическом слу-

чае. Сделанный вывод дополнительно обосновывается следующим выражением для вероятности ошибки второго рода:

$$\beta = P\{\tilde{\lambda}_M(X) < \tilde{\lambda}_1 | W_1\} \leq P\{F_{M_1, M_2} < \tilde{\lambda}_1 / \gamma_{1,2}\} = \Phi_{M_1, M_2}(\tilde{\lambda}_1 / \gamma_{1,2}).$$

Для любого $\gamma_{1,2} > 1$ в пределе при $M_1, M_2 \rightarrow \infty$ ошибка будет стремиться к нулю.

Заключение. Таким образом, благодаря проведенному исследованию предложен асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения разладки по выборке наблюдений в отсутствие априорных сведений о корреляционных свойствах случайного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Савченко В. В.** Обнаружение и прогнозирование разладки случайного процесса на основе спектрального оценивания // Автометрия. 1996. № 2. С. 77.
2. **Савченко В. В.** Различение случайных сигналов в частотной области // Радиотехника и электроника. 1997. № 4.
3. **Кульбак С.** Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.
4. **Боровков А. А.** Математическая статистика. Дополнительные главы. М.: Наука, 1984.
5. **Савченко В. В.** Проверка однородности выборочных данных в задачах спектрального оценивания // Радиотехника и электроника. 1999. № 1.
6. **Мюллер П., Нойман П., Шторм Р.** Таблицы по математической статистике. М.: Финансы и статистика, 1982.

*Нижегородский государственный
лингвистический университет,
E-mail: svv@lunn.sci-nnov.ru*

*Поступила в редакцию
11 июня 2003 г.*