

2005, том 41, № 3

УДК 519.642

**О. Е. Трофимов**

*(Новосибирск)*

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ  
РЕНТГЕНОВСКИХ ПРОЕКЦИЙ\***

Предложен численный метод построения виртуальных лучевых рентгеновских проекций для траекторий, не удовлетворяющих условиям Кириллова – Туя (неполных траекторий).

**Введение.** Для формул обращения лучевого преобразования в трехмерном пространстве необходимо выполнение условий Кириллова – Туя [1–5]. Главное из этих условий заключается в следующем: каждая плоскость, пересекающая объект, пересекает траекторию источника. Если объект содержится в единичном шаре, то траектория, состоящая из единичных окружностей, лежащих в плоскостях  $z = 0$  и  $y = 0$ , удовлетворяет указанному условию.

Необходимо отметить, что в реальных ситуациях формулы из [1–5] используются для функций (объектов), имеющих финитный носитель. Эти формулы справедливы и для функций, имеющих бесконечный носитель, но достаточно быстро убывающих на бесконечности, т. е. интегралы по лучам, взятые в бесконечных пределах, должны существовать (иметь конечное значение). Если наложить ограничения на носитель функции, то требования к траектории источника можно существенно ослабить.

Так, в [6] показано, что если носитель функции содержится внутри единичного шара, то для восстановления этой функции по лучевым проекциям достаточно иметь траекторию источника, состоящую из одной окружности, лежащей, например, в плоскости  $z = 0$ .

В работе [7] аналогичный результат доказан для функций, содержащихся в цилиндре. Переход от шара к цилиндру означает, что одной окружности достаточно для восстановления функций, у которых в одном из направлений носитель не ограничен. Разумеется, в реальных ситуациях мы будем восстанавливать функции с финитным носителем. Методы из [6, 7] отличаются друг от друга.

В работе [8] показано, что в задаче реконструкции для неполных траекторий небольшие ошибки в исходных данных могут приводить к сколь угодно большим ошибкам в решении (в смысле норм соболевских пространств).

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 03-01-00910, № 03-07-90-060) и фонда «Научный потенциал».

Необходимо отметить, что значение этого результата для построения численных алгоритмов на реальных дискретных решетках данных еще предстоит выяснить. Доказательство в [8] основано на том, что объекты с разрывными границами могут иметь очень гладкие лучевые проекции. В дискретном варианте значение указанного факта, возможно, удастся ослабить. Обычная дискретизация может быть неплохим регуляризатором.

Как показано в [9], в случае, когда траектория состоит из одной окружности, можно выделить устойчивую подзадачу. Эта подзадача заключается в реконструкции интегралов вдоль прямых, пересекающих внутренние точки круга, если известны интегралы вдоль прямых, проходящих через окружность, которая является границей этого круга. Здесь прямые, пересекающие окружность и круг, лежат в трехмерном пространстве. Причем особый интерес для нас будут представлять лучи, не лежащие в плоскости  $z = 0$ .

Задачей данной работы является построение алгоритма такого восстановления для дискретных исходных данных.

**Математические основы предлагаемого алгоритма.** Как показано в [7], если функция  $\omega(x, s)$   $[(x, s) \in R^{n+1}]$  имеет носитель, заключенный в цилиндре  $K^n \times R^1$ , где  $K \subset R^n$  –  $n$ -мерный единичный шар  $|x| < 1$ , и для почти всех  $x, p \in R^n \times R^n$  имеет смысл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x + ps, s) ds \stackrel{\text{def}}{=} u(x, p), \quad (1)$$

то по заданным значениям

$$\varphi(x, p) = u(x, p) \Big|_{x \in \partial K, p \in R^n} \quad (2)$$

можно восстановить функцию  $\omega(x, s)$ .

Отметим, что в формуле (1) используется интегрирование по  $ds$ . Обычно же при определении лучевого преобразования применяют интегрирование по элементу длины луча  $dl$ . С теоретической точки зрения эти определения эквивалентны, за исключением плоскости  $z = 0$ . На практике возникают некоторые проблемы в случае, когда  $z$  близко к нулю. В этой зоне можно использовать методы классической двумерной компьютерной томографии.

Рассмотрим функции в трехмерном пространстве.

Пусть для функции  $f(x_1, x_2, z)$  известна функция

$$u(x_1, x_2, p_1, p_2) = \int f(x_1 + p_1 z, x_2 + p_2 z, z) dz \quad (3)$$

для всех  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , и всех  $p_1, p_2 \in (-\infty, \infty)$ .

Необходимо найти функцию  $u(x_1, x_2, p_1, p_2)$  для всех  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ , и всех  $p_1, p_2 \in (-\infty, \infty)$ .

Функция

$$\tilde{u}(x, \omega) = \int e^{i(\omega, p)} u(x, p) dp = \iint e^{i(\omega, p)} f(x + pz, z) dp dz$$

есть преобразование Фурье от функции  $u(x, p)$  по переменной  $p$ . Здесь

$$x = (x_1, x_2), \quad p = (p_1, p_2), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad (\omega, p) = (p_1\omega_1 + p_2\omega_2).$$

После замены переменных  $x' = \omega + pz$  имеем

$$\tilde{u}(x, \omega) = \iint \exp((i/z)((\omega, x') - (\omega, x))) f(x', z) |z|^{-2} dx' dz. \quad (4)$$

Из выражения (3) видно, что  $\tilde{u}(x, \omega)$  есть функция не четырех  $(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$ , а трех аргументов  $(q, \omega_1, \omega_2)$  ( $q = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ ). Здесь функция  $|z|^{-2}$  понимается в смысле обобщенных функций [3].

Следовательно, мы имеем возможность создания виртуальных рентгеновских проекций [10]. Если известны проекции для позиций источника, лежащих на единичной окружности, в свою очередь, принадлежащей плоскости  $z = 0$ , можно вычислить проекции для позиций источника, лежащих внутри окружности. Такого рода приемы особенно важны для объектов, имеющих сложную форму, в частности в челюстной хирургии и при зубном протезировании. Метод виртуальных проекций может быть применен при анализе сварных швов труб [10, 11].

Если можно вычислить виртуальные проекции для положений источника внутри единичной окружности, то можно построить алгоритм точного восстановления функции и, следуя, например, работе [7], восстанавливать функцию в сечениях, перпендикулярных плоскости  $z = 0$ . В [7] показано, что для восстановления функции двух переменных, сосредоточенной по одной из координат в полосе  $[-a, a]$ , достаточно знать интегралы этой функции по прямому, пересекающим отрезок  $[-a, a]$ .

**Структура алгоритма.** Опишем структуру алгоритма построения виртуальных лучевых проекций для дискретных решеток данных.

Пусть заданы лучевые проекции, соответствующие определению (1), для конечного числа позиций источника, принадлежащих единичной окружности в плоскости  $z = 0$ . Для простоты изложения будем считать, что положения источника находятся равномерно на окружности, однако известны реальные ситуации, когда условие равномерности не выполняется. Тем не менее это не сильно влияет на структуру алгоритма.

Пусть для каждой позиции источника задана матрица значений интеграла (1) для некоторого набора величин  $(p_1, p_2)$ . Будем также считать, что величины  $(p_1, p_2)$  образуют равномерную сетку.

Шаг 1. Для каждой позиции источника необходимо найти преобразование Фурье от функции  $u(x, p_1, p_2)$  на некоторой дискретной сетке переменных  $(\omega_1, \omega_2)$ , при этом необходимо учитывать, что дискретное преобразование дает переставленные значения приближений к значениям непрерывного преобразования Фурье [12]. В ряде современных программных средств, в частности в MathLab, есть специальная функция, осуществляющая нужную перестановку. Если вычислять преобразование Фурье исходя из определений, то проблем с перестановками не возникает. Непосредственное вычисление преобразования Фурье замедляет вычисления, но его приходится использовать при неравномерной сетке по  $(p_1, p_2)$ . Это происходит, если исходные данные заданы не в координатах  $(p_1, p_2)$ , а в координатах реального детектора, ортогонального плоскости  $z = 0$ .

Итак, пусть на шаге 1 нами вычислено преобразование Фурье на некоторой сетке переменных  $(\omega_1, \omega_2)$  от данных для всех положений источника. Для простоты изложения сетку переменных  $(\omega_1, \omega_2)$  будем считать совпадающей для разных положений источника. (Сетку, а не значения на ней.) Значения преобразования Фурье в одной и той же точке сетки могут сильно отличаться для разных положений источника.

Шаг 2. Пусть мы хотим найти виртуальные лучевые проекции для положения источника  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ . На этом шаге найдем функцию  $\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$  – преобразование Фурье от интересующей нас функции  $u(x_1, x_2, p_1, p_2)$ . В дискретном варианте вычисления производятся на некоторой дискретной сетке переменных  $(\omega_1, \omega_2)$ .

В соответствии с приведенным выше свойством преобразования Фурье лучевых данных значения функции  $\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$  в точке  $(\omega_1, \omega_2)$  совпадают для всех положений источника, находящихся в плоскости  $z = 0$ , на прямой, проходящей через точку  $(x_1, x_2)$  и ортогональной вектору  $(\omega_1, \omega_2)$ . Поскольку нам известны значения функций  $\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$  на границе, т. е. в точках, удовлетворяющих условию  $y_1^2 + y_2^2 = 1$ , необходимо относительно  $(y_1, y_2)$  решить систему уравнений

$$\begin{aligned}(\omega, x) &= \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = (\omega, y); \\ y_1^2 + y_2^2 &= 1.\end{aligned}\tag{5}$$

Для решения этой системы удобно перейти к полярным координатам. Пусть

$$x_1 = R_x \cos F_x, \quad x_2 = R_x \sin F_x, \quad \omega_1 = R_\omega \cos F_\omega, \quad \omega_2 = R_\omega \sin F_\omega,$$

тогда система (5) сводится к уравнению

$$R_\omega R_x \cos(F_x - F_y) = R_\omega \cos(F_x - F_\omega).\tag{6}$$

Если  $R_\omega \neq 0$ , то получаем выражение

$$F_y = F_\omega \pm \arccos(R_x \cos(F_x - F_\omega)) = F_\omega \pm \arccos(x_1 \cos F_\omega + x_2 \sin F_\omega)$$

или

$$F_y = F_\omega \pm \arccos((x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2) / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}),\tag{7}$$

где  $F_y$  – угол на окружности для искомой точки  $y$ .

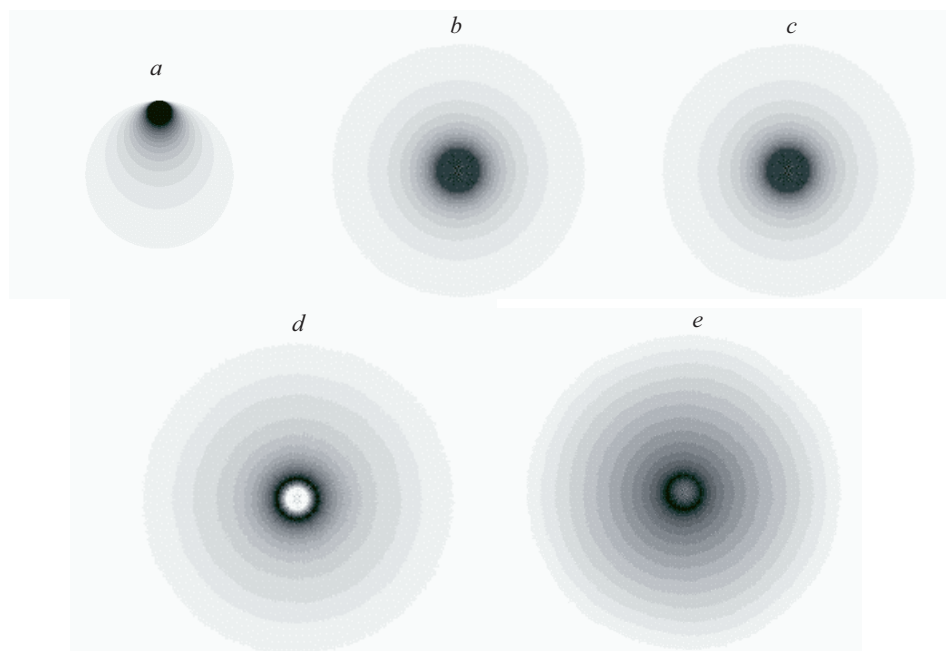
Поскольку  $y$  прямой, лежащей в плоскости  $z = 0$  и проходящей через внутреннюю точку единичного круга, есть две точки пересечения с единичной окружностью, в (7) имеем два решения.

Как было показано, имеет место равенство

$$\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) = \tilde{u}(y_1, y_2, \omega_1, \omega_2).$$

Так как на окружности число позиций конечное, то нужно найти позицию, наиболее близкую к найденному решению.

После повторения процесса для всех  $(\omega_1, \omega_2)$ , принадлежащих выбранной сетке, находим функцию  $\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$ .



Шаг 3. Для того чтобы найти виртуальные проекции (функцию  $u(x_1, x_2, p_1, p_2)$ ), нужно вычислить обратное преобразование Фурье от  $\tilde{u}(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2)$  по переменным  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Вычисление виртуальных проекций для точки  $(x_1, x_2)$  закончено.

На рисунке, *a–e* приведены результаты компьютерного моделирования виртуальных проекций цилиндра. Радиус цилиндра совпадает с радиусом окружности, по которой движется источник, и равен единице, высота нижнего основания  $h_1 = 0,1$ , высота верхнего основания  $h_2 = 1,0$ . Количество позиций источника на окружности 360, количество отсчетов для каждой фиксированной позиции  $512 \times 512$ , отсчеты берутся в плоскости  $z = 0$ .

На рисунке, *a* приведен пример (один из 360) исходных данных. На рисунке, *b* дано точное решение для положения источника в центре круга ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ). Виртуальная проекция для этой точки изображена на рисунке, *c*.

Результат восстановления полого цилиндра (отрезка трубы) представлен на рисунке, *d*. Радиус внешнего цилиндра равен 1,0, радиус внутреннего цилиндра равен 0,8.

На рисунке, *a–d* приведены проекции в смысле А. С. Благовещенского. Как уже указывалось выше, эти проекции несколько отличаются от проекций, являющихся интегралами вдоль лучей. На рисунке, *e*, соответствующем проекции рисунка, *c*, показана проекция с обычным для компьютерной томографии интегрированием по длине луча.

**Заключение.** Предлагаемый алгоритм основан на математических результатах работ Ю. Е. Аниконова и А. С. Благовещенского.

Результаты компьютерного моделирования показывают, что предложенный алгоритм целесообразно применять к реальным объектам.

Автор выражает благодарность Ф. А. Журавлю, А. С. Загоруйко, С. Н. Касьяновой, Ю. А. Стукалину, принимавшим участие в написании программ, использованных при компьютерном моделировании.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Grangeat P.** Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Proc. conf. "Mathematical Methods in Tomography". Germany: Springer-Verlag, 1990. P. 66.
2. **Кириллов А. А.** Об одной проблеме И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. **137**, №2. С. 276.
3. **Lavrentiev M. M., Zerkal S. M., Trofimov O. E.** Computer Modelling in Tomography and Ill-Posed Problems. Utrecht: VSP (Netherlands), 2001.
4. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 524.
5. **Туй Н. К.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM. Journ. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.
6. **Аниконов Ю. Е.** Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.
7. **Благовещенский А. С.** О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Математические заметки. 1986. **39**, №6. С. 841.
8. **Finch D. V.** Cone-beam reconstruction with sources on a curve // SIAM Journ. Appl. Math. 1985. **43**, N 4. P. 665.
9. **Trofimov O.** Computerized x-ray tomography algorithms on base distributions with power singularity Venice-2 // Proc. of Symp. on Appl. Industrial Math. Venice, Italy, 1998. Kluver: Kluver Academic Publ., 2000. P. 287.
10. **Trofimov O., Kasjanova S., Badazhkov D.** Algorithms of 3D cone beam tomography for incomplete data // Proc. of the 1th World Congress on Industrial Process Tomography. Buxton, UK. 1999. P. 181.
11. **Trofimov O.** Virtual beam (X-ray) projections // The VII-th Intern. Conf. on Fully 3D Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine. (Abstracts). Saint-Malo, France, 2003.
12. **Трофимов О. Е.** Соотношение между дискретным и непрерывным преобразованиями Фурье. Новосибирск, 1989. (Препр. /СО АН СССР. ИАиЭ; № 424).

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН,  
E-mail: trofimov@iae.nsk.su*

*Поступила в редакцию  
5 мая 2004 г.*