

В. В. Пикалов, А. В. Лихачев*(Новосибирск)***СРАВНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ СХЕМ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ
И КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИЯМИ ИСТОЧНИКА
В ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ**

Изучаются погрешности трехмерной трансмиссионной томографии. Сравняются схемы регистрации проекционных данных с источником, движущимся вдоль прямой и вдоль спирали, лежащей в плоскости, параллельной детектору. В вычислительном эксперименте показано преимущество последней схемы.

Введение. В настоящее время томографические методы используются во многих практических приложениях для получения информации о внутренней структуре объекта без его разрушения. В связи с этим разработано большое количество оборудования, реализующего различные схемы сбора проекционных данных. Представленная работа посвящена задаче трехмерной трансмиссионной томографии, в которой источник зондирующего излучения движется лишь в одной плоскости. Такая постановка задачи часто возникает, например, при тестировании качества больших строительных конструкций, а также трубопроводов, находящихся в эксплуатации. В частности, в [1] представлен переносной прибор для поиска трещин в сварных швах, соединяющих трубы. В работе [1], а также в ряде других исследований реализована простая проекционная схема, где источник движется по прямой, параллельной плоскости, в которой лежит детектор, находящийся с противоположной стороны объекта. При этом детектор либо неподвижен, как, например, в [1], либо движется параллельно источнику. Иногда томографические постановки с проекционной геометрией подобного рода называют задачей ламинографии [2].

В данной работе предлагается перемещать источник не по прямой, а по некоторой кривой в плоскости, параллельной той, в которой лежит детектор. В частности, рассмотрена синусоида, в которую вырождается трехмерная эллиптическая спираль при обращении одного из ее радиусов в ноль. Основания для замены прямой на кривую типа синусоиды следующие. Как известно, в работе [3] (и еще ранее в [4]) были выведены достаточные условия, которым должна удовлетворять траектория движения источника, чтобы была возможна точная реконструкция функции трех переменных по ее лучевым конусным проекциям. Среди этих условий основным является то, что любая плоскость, пересекающая носитель функции, также должна пересекать тра-

екторию источника хотя бы в одной точке. Очевидно, что ни прямая, ни синусоида, лежащие вне носителя функции, не удовлетворяют данному условию. Однако ясно, что при определенных взаимных положениях прямой и синусоиды множество плоскостей, пересекающих носитель и синусоиду, строго включает множество плоскостей, пересекающих носитель и прямую. Таким образом, можно заключить, что задача трансмиссионной трехмерной томографии с источником, движущимся по кривой в плоскости, является лучше обусловленной в смысле условий полноты Кириллова – Туя, нежели постановка с источником, движущимся по прямой.

Постановка задачи и алгоритм реконструкции. На рис. 1 представлены две схемы сбора проекционных данных. Слева на рисунке дана проекционная геометрия, в которой источник движется вдоль прямой L в направлении \mathbf{V} . Излучение проходит через объект, изображенный в виде цилиндра, и регистрируется двумерным детектором D_1 , также движущимся в направлении \mathbf{V} . Прямая L и вектор \mathbf{V} параллельны плоскости, в которой лежит детектор D_1 . Справа на рисунке источник движется вдоль кривой K , принадлежащей плоскости P . Детектор D_2 перемещается вдоль вектора \mathbf{V} . Поверхность детектора D_2 , плоскость P и вектор \mathbf{V} параллельны.

Обозначим через $g(x, y, z)$ распределение коэффициента поглощения внутри исследуемого объекта. Будем параметризовать траекторию движения источника (прямую L или кривую K) посредством параметра λ . Введем на детекторе систему координат (O, u, v) . Через $f(u, v, \lambda)$ обозначим распределение интегрального поглощения по детектору при фиксированном положении источника. В приложениях обычно рассматривается приближение лучевой томографии. В этом случае связь между функциями $g(x, y, z)$ и $f(u, v, \lambda)$ определяется следующим образом:

$$f(u, v, \lambda) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{s}(\lambda) + l\boldsymbol{\beta}(u, v, \lambda)) dl, \quad (1)$$

где $\mathbf{s}(\lambda)$ – точка, в которой находится источник; $\boldsymbol{\beta}(u, v, \lambda)$ – единичный вектор в направлении луча, соединяющего источник и точку с координатами (u, v) на детекторе.

Рассматриваемая задача трансмиссионной томографии заключается в следующем. Пусть λ параметризует некоторую траекторию, по которой дви-

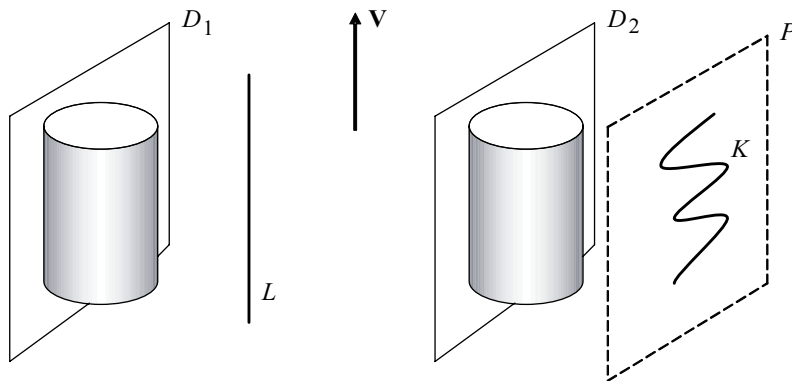


Рис. 1. Проекционные схемы сбора данных: расширение углового диапазона видимости объекта для синусоидальной траектории источника K

жется источник, а также пусть известны двумерные проекции (1) для ряда значений параметра λ из интервала $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$. По этим данным требуется определить функцию трех переменных $g(x, y, z)$.

Если кривая, по которой движется источник, удовлетворяет условиям полноты Кириллова – Туя, то для реконструкции функции $g(x, y, z)$ известна аналитическая формула [3]. Однако в рассматриваемом случае эти условия не выполняются. Поэтому для восстановления $g(x, y, z)$ был использован итерационный алгебраический алгоритм ART (Algebraic Reconstruction Technique), который может применяться для любой проекционной геометрии. При этом на первом этапе производится дискретизация восстанавливаемой функции и проекционных данных [5]. В результате получается система линейных алгебраических уравнений $Ag = f$, связывающая искомый вектор $g \in \mathbf{R}^J$ с вектором измерений $f \in \mathbf{R}^I$. Матрица этой системы существенно зависит от схемы сбора данных и способа дискретизации. В приближении лучевой томографии элемент проецирующей матрицы a_{ij} часто определяют как длину пересечения i -го луча с j -м вокселем. (Воксели – это элементарные объемы, на которые разбивается область реконструкции.) Согласно [4] $(k + 1)$ -й шаг для ART дается формулой

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \mu \frac{f_{i(k)} - (a^{i(k)}, g^{(k)})}{\|a^{i(k)}\|^2} a^{i(k)}. \quad (2)$$

Здесь $a^{i(k)}$ – $i(k)$ -я строка матрицы A ; μ – так называемый параметр релаксации, влияющий на скорость сходимости алгоритма; $i(k) = [k(\text{mod} I) + 1]$, т. е. строки матрицы перебираются циклически; (\circ, \circ) – скалярное произведение; $\|\circ\|$ – евклидова норма в \mathbf{R}^J . В работе [4] показано, что итерационный процесс (2) сходится для любого начального приближения $g^{(0)} \in \mathbf{R}^J$, если $0 < \mu < 2$.

Вычислительный эксперимент. Выбранная для вычислительного эксперимента модель представляет собой полый цилиндр без торцов. Его центр находится в начале координат, ось совпадает с осью Z . Высота цилиндра в выбранных безразмерных единицах 1,6, радиус 0,85, толщина стенок 0,2, их плотность 1,0. Внутри стенки расположены три сферические полости маленьких размеров. Центры всех трех полостей лежат в плоскости $z = 0$, радиусы двух из них 0,03, радиус третьей 0,035. На рис. 2, а приведено изображение сечения модели плоскостью $z = 0$.

В качестве области реконструкции был взят куб с центром в начале координат и ребром длиной 2,0. На кубе задана равномерная сетка $129 \times 129 \times 129$ узлов. Расстояние между ближайшими узлами равнялось 0,015625. На детекторе размером $4,0 \times 4,0$ задавалась сетка 257×257 узлов, т. е. шаг дискретизации по детектору был таким же, как и по области реконструкции.

Для количественной оценки точности восстановления использовалась нормированная среднеквадратичная ошибка Δ , которая определялась как

$$\Delta = \left(\sum_{i,j,k} (g_0(x_i, y_j, z_k) - g(x_i, y_j, z_k))^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j,k} g_0(x_i, y_j, z_k)^2 \right)^{-1/2}, \quad (3)$$

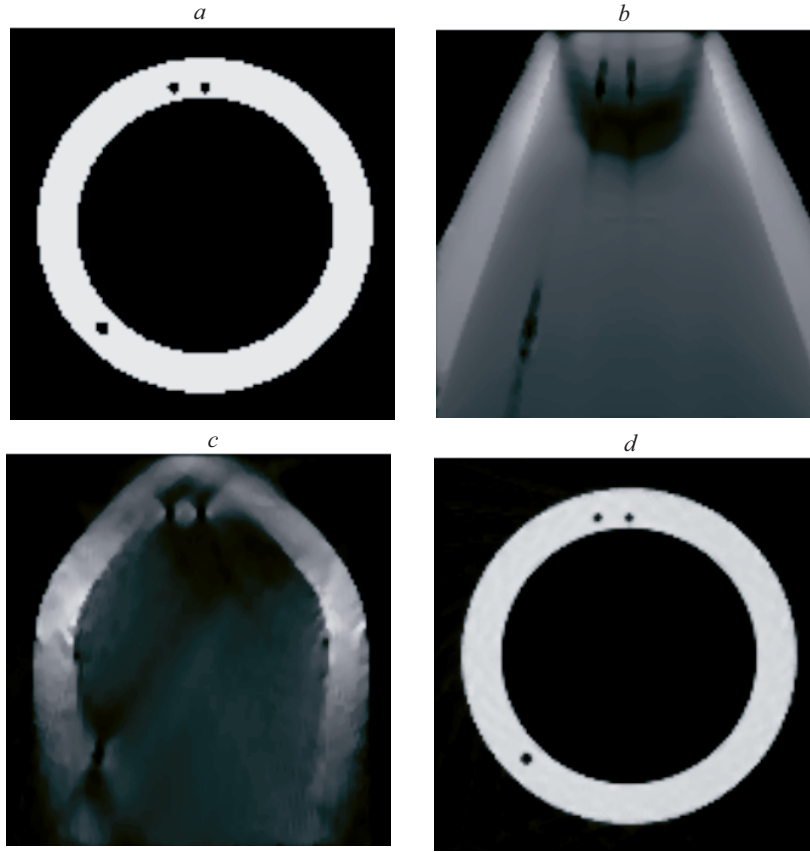


Рис. 2. Изображения сечения модели плоскостью $z = 0$: a – точная модель; результаты реконструкции (ART с медианной фильтрацией, $M = 150$): b – источник движется вдоль прямой ($\Delta = 0,751$), c – источник движется по синусоиде ($R_{s1} = 0,8$, $N = 5$, $\Delta = 0,633$), d – источник движется по спирали ($\Delta = 0,132$)

где $g_0(x_i, y_j, z_k)$ и $g(x_i, y_j, z_k)$ – значения модели и восстановленной функции в узле с координатами (x_i, y_j, z_k) соответственно; суммирование ведется по всем узлам.

В вычислительном эксперименте траектории движения источника $\mathbf{s}(\lambda)$ и центра детектора $\mathbf{d}(\lambda)$ задавались общими уравнениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\lambda) &= (R_{s1} \cos \lambda + x_{s0}, R_{s2} \sin \lambda + y_{s0}, H\lambda + z_{s0}); \\ \mathbf{d}(\lambda) &= (R_{d1} \cos \lambda + x_{d0}, R_{d2} \sin \lambda + y_{d0}, H\lambda + z_{d0}). \end{aligned} \quad (4)$$

Каждое из уравнений (4) описывает пространственную эллиптическую спираль, ось которой параллельна оси Z . Поскольку в данной работе рассматривается движение источника и центра детектора в параллельных плоскостях, при моделировании полагалось $R_{s2} = R_{d2} = 0$. Значения других параметров были следующими: $R_{d1} = 0$, $x_{s0} = x_{d0} = 0$, $y_{s0} = 2,0$, $y_{d0} = -1,0$, $z_{s0} = z_{d0} = -1,0$. Область изменения траектории источника и центра детектора вдоль оси Z была всегда одинакова и равнялась $2,0$ (от $-1,0$ до $1,0$). Параметры R_{s1} , H , а также число проекций M варьировались в процессе вычисли-

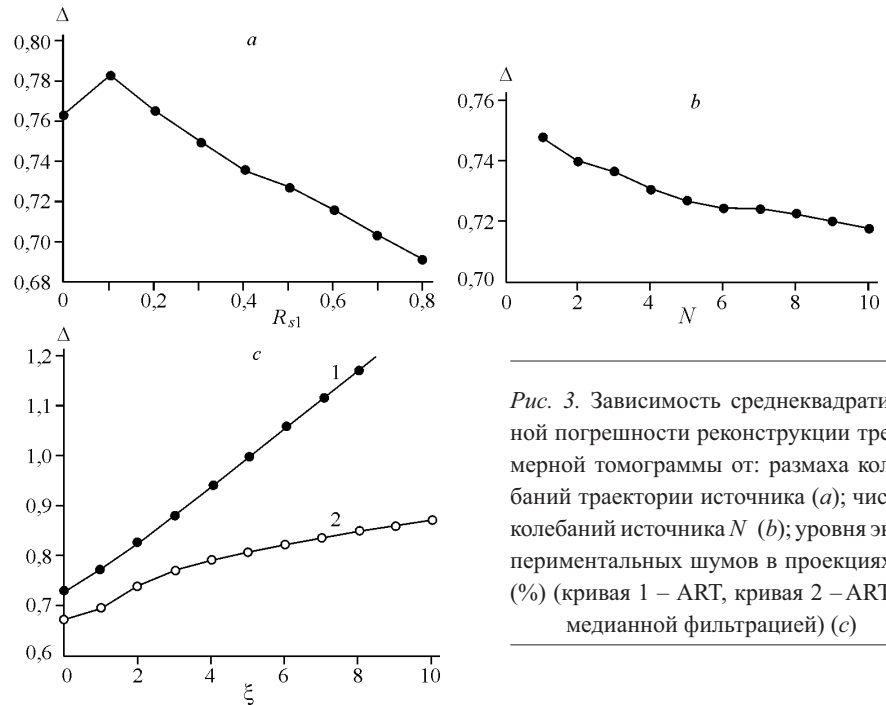


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности реконструкции трехмерной томограммы от: размаха колебаний траектории источника (a); числа колебаний источника N (b); уровня экспериментальных шумов в проекциях ξ (%) (кривая 1 – ART, кривая 2 – ART с медианной фильтрацией) (c)

тельного эксперимента. Таким образом, при моделировании центр детектора двигался по прямой $x = 0, y = -1,0$, при этом поверхность детектора перемещалась параллельно самой себе. Источник двигался в плоскости $y = 2$, параллельной поверхности детектора, либо по прямой (при $R_{s1} = 0$), либо по синусоиде (при $R_{s1} \neq 0$).

Некоторые результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 3. На рис. 3, a дана зависимость среднеквадратичной ошибки Δ от амплитуды синусоиды R_{s1} . Количество проекций $M = 150$. Число периодов синусоиды 5, при этом λ меняется в промежутке $[0, 10\pi]$. Из рисунка видно, что переход от прямолинейной траектории источника к синусоидальной в целом приводит к повышению качества восстановления. Причем с ростом амплитуды синусоиды ошибка реконструкции Δ уменьшается. Таким образом, рис. 3, a подтверждает предположение о преимуществе криволинейного движения источника перед прямолинейным. Однако тут следует заметить, что при чрезмерно больших значениях R_{s1} для положений источника, максимально отстоящих от оси, часть лучей, прошедших через объект, может не попасть на детектор. Тогда некоторые проекции окажутся усеченными, что ведет к ухудшению точности восстановления. Возникшее затруднение может быть преодолено, по крайней мере, двумя очевидными способами: с одной стороны, путем увеличения размеров детектора, с другой – путем перемещения детектора синфазно с источником.

На рис. 3, b приведена зависимость ошибки Δ от числа периодов синусоиды $N = 2,0/H$. При этом число проекций было постоянным, $M = 150$. Амплитуда синусоиды R_{s1} равнялась 0,5. Из рисунка видно, что при увеличении числа периодов N точность реконструкции возрастает, однако не столь значительно.

В вычислительном эксперименте также было исследовано влияние количества проекций M на точность восстановления при постоянном числе периодов N . Расчет произведен для $N = 5$. Оказалось, что зависимость $\Delta(M)$ имеет локальный минимум при $M \approx 30$, после которого при увеличении M ошибка Δ несколько возрастает.

Была произведена серия расчетов, в которых для реконструкции использовались зашумленные проекционные данные. Шум предполагался гауссовским со средним, равным нулю, и постоянной для каждой двумерной проекции дисперсией, составляющей ξ процентов от ее максимального значения. На рис. 3, *c* представлены результаты этого исследования в виде зависимостей Δ от ξ . Значения параметров следующие: $M = 150$, $N = 5$, $R_{s1} = 0,5$. Для кривой 1 восстановление производилось непосредственно алгоритмом (2). Для кривой 2 решение, полученное на каждой итерации алгоритма ART, сглаживалось трехмерным медианным фильтром в скользящем окне $3 \times 3 \times 3$ [6]. По рис. 3, *c* можно заключить, что применение медианного фильтра повышает устойчивость алгоритма по отношению к случайным шумам. Помимо этого, из сравнения кривых 1 и 2 в точке $\xi = 0$ видно, что медианный фильтр также увеличивает точность реконструкции при восстановлении по незашумленным данным.

На рис. 2, *b-d* приведены изображения сечений модели плоскостью $z = 0$ реконструированных трехмерных томограмм. На рис. 2, *b* показано движение источника по прямой, а на рис. 2, *c* – по синусоиде, число периодов $N = 5$, а ее амплитуда $R_{s1} = 0,8$. Как видно из рис. 2, *b*, при прямолинейном движении источника форма восстановленного объекта существенно отличается от формы исходного (см. рис. 2, *a*). Кроме того, отверстия на рис. 2, *b* хотя и видны, но сильно вытянуты в направлении источник – детектор, что практически делает невозможным определение их правильного местоположения. В то же время на рис. 2, *c* форма реконструируемого объекта в целом передана верно, а отверстия локализованы значительно лучше, нежели на рис. 2, *b*. Таким образом, рис. 2, *b, c* на качественном уровне подтверждают преимущество использования проекционных схем с криволинейным движением источника.

Рис. 2, *d* приведен для сравнения возможностей плоского и пространственного перемещения источника. На рисунке показано сечение трехмерной томограммы, реконструированной по проекционным данным, полученным в результате движения источника по пространственной спирали, охватывающей объект. При этом значения параметров в уравнениях (4) были следующие: $x_{s0} = x_{d0} = y_{s0} = y_{d0} = 0$, $z_{s0} = z_{d0} = -1,0$, $R_{s1} = R_{s2} = 2,0$, $R_{d1} = R_{d2} = 1,0$, $H = 0,4$. Число оборотов спирали равнялось пяти. Размеры детектора и количество проекций были такими же, как для рис. 2, *b, c*. Из рис. 2 следует очевидное преимущество спиральной траектории источника. Поэтому именно она должна применяться, если это позволяют экспериментальные условия.

Заключение. В работе проведено сравнение схем регистрации проекционных данных для задачи трехмерной трансмиссионной томографии. Сравнивались проекционные геометрии с источником, движущимся вдоль прямой и вдоль кривой, в частности синусоиды, лежащей в плоскости, параллельной поверхности детектора. Проведенный вычислительный эксперимент показал преимущество последней геометрии. В том числе было получено, что при увеличении ширины области, включающей в себя траекторию источника, точность реконструкции растет. Однако в случае, когда центр детек-

тора движется по прямой, чрезмерное удаление источника от нее приводит к усечению некоторых проекций, что негативно сказывается на качестве восстановления.

Специально проведенный расчет показал, что пространственное, в частности спиральное вокруг объекта, движение источника обеспечивает гораздо более высокое качество реконструкции, нежели его движение в одной плоскости. Таким образом, рассмотренные в работе проекционные геометрии целесообразно применять только тогда, когда доступ к исследуемому объекту возможен лишь с одной стороны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Redmer B., Ewert U., Likhachov A. V. et al.** Sensitive detection of planar defects by a mechanised radiometric weld inspection system // Proc. of the 15th World Conf. on Non-Destructive Testing. Roma, Italy, 2000. N IDN370.
2. **Ewert U., Robbel J., Bellon C. et al.** Digital laminography // Materialpruefung. 1995. **37**, N 6. P. 218.
3. **Туй Н. К.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM Journ. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.
4. **Кириллов А. А.** Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. **137**, № 2. С. 276.
5. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
6. **Rangayyan R. M., Gordon R.** Streak preventive image reconstruction with ART and adaptive filtering // IEEE Trans. Med. Imag. 1982. **1**, N 3. P. 173.

*Институт теоретической
и прикладной механики СО РАН,
E-mail: pickalov@itam.nsc.ru*

*Поступила в редакцию
1 июля 2004 г.*