РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 1

УДК 519.642

А. В. Лихачев

(Новосибирск)

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМА ФЕЛЬДКАМПА С АЛГОРИТМОМ СИНТЕЗА ФУРЬЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Для проекционной геометрии с источником, движущимся по окружности, предложен новый алгоритм послойной реконструкции, основанный на методе фурье-синтеза. Оценка времени реконструкции этим алгоритмом на сетке $N \times N \times N$ по M проекциям составляет $O(MN^2 \log_2 N)$, что в $O(N / \log_2 N)$ раз меньше, чем оценка для классической реализации алгоритма Фельдкампа. Вычислительный эксперимент показал, что алгоритм Фельдкампа уступает по точности методу послойного фурье-синтеза в случае относительно небольшого радиуса окружности движения источника (3–8 радиусов области реконструкции). Однако алгоритм Фельдкампа оказался более устойчивым к шумам в проекционных данных.

Введение. Томографические методы реконструкции внутренней структуры объектов широко используются в медицине, некоторых отраслях промышленности, а также при проведении физических исследований. Первичные сведения о томографии можно получить, например, из работы [1], где в доступной форме изложены ее физические и математические основания. Более строгое изложение математического аппарата содержится в [2, 3].

Рассмотрим трансмиссионную рентгеновскую томографию – восстановление внутренней структуры твердых тел путем зондирования проникающим излучением. Классический подход к решению этой задачи состоит в том, что измерения производятся в одной плоскости при помощи линейных детекторов и по этим данным реконструируется слой объекта. Система регистрации смещается вдоль некоторой оси, что позволяет последовательно восстанавливать слои, перпендикулярные ей. В частности, отсюда происходит термин «томография» (tomos по-латински означает слой). Однако с течением времени способы сбора проекционных данных изменились, что, в свою очередь, привело к появлению новых методов томографической реконструкции. Все чаще измерения производятся при помощи плоских двумерных детекторов или матриц детекторов. Именно такая схема регистрации данных рассматривается в предлагаемой работе.

Обычно (в том числе и в данной работе) принимается приближение лучевой томографии, согласно которому каждому измерению ставится в соответствие интеграл от искомого распределения вдоль некоторой прямой. Для задачи трансмиссионной рентгеновской томографии лучевое приближение будет удовлетворяться, если детекторы хорошо коллимированы и основным видом взаимодействия излучения с веществом является поглощение. Пусть исследуемый объект зондируется посредством источника, дающего широкий расходящийся пучок. Определим двумерную конусную проекцию как распределение интенсивности прошедшего излучения по поверхности детектора. В приближении лучевой томографии уравнение конусной проекции записывается следующим образом:

$$f_S(\mathbf{q}) \equiv \ln\left(\frac{I_0}{I(\mathbf{q})}\right) = \int_a^b g(\mathbf{S} + p\mathbf{n})\, dp,$$

$$\mathbf{q} = (r_s + r_d)\left(\frac{\mathbf{S}}{r_s} - \frac{\mathbf{n}}{\left|\cos(\mathbf{S}, \mathbf{n})\right|}\right). \tag{1}$$

Здесь $g(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in R^3$,– распределение коэффициента поглощения зондирующего излучения объектом; $\mathbf{S}$ – точка, в которой расположен источник излучения; I_0 – интенсивность излучения; r_s и r_d – расстояния от начала координат до источника и детектора соответственно. Через $I(\mathbf{q})$ обозначена интенсивность, зарегистрированная на детекторе в точке, имеющей на нем двумерную координату $\mathbf{q}$. Вектор $\mathbf{n}$ задает направление из источника на эту точку; $(\mathbf{S}, \mathbf{n})$ – угол между векторами $\mathbf{S}$ и $\mathbf{n}$. Интегрирование ведется по участку луча, проходящему внутри объекта. Определение конусной проекции поясняет рис. 1.

Пусть источник движется по окружности радиуса r_s в плоскости $z = 0$. Напротив источника по другую сторону объекта находится двумерный детектор, который синхронно движется вместе с источником. Вращение систе-

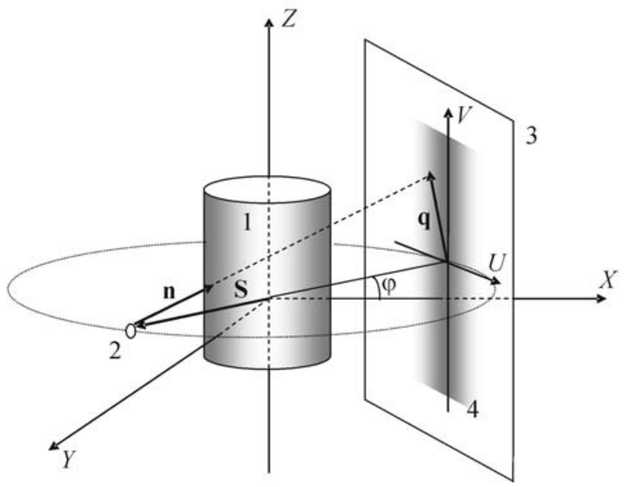

Рис. 1. Схема получения двумерной конусной проекции (1 – исследуемый объект, 2 – источник зондирующего излучения, 3 – детектор, 4 – проекция)

мы источник – детектор вокруг объекта обеспечивает просвечивание последнего под различными углами. Плоскость, в которой лежит поверхность детектора, параллельна оси Z. Такая схема измерений в силу своей простоты часто реализуется в медицинском и промышленном томографическом оборудовании, поэтому разработка алгоритмов реконструкции по проекционным данным, зарегистрированным при движении источника по окружности, вызывает большой интерес. Одним из возможных методов является разбиение трехмерной задачи на ряд двумерных. А именно производится двумерная реконструкция искомой функции в плоскостях, перпендикулярных оси Z, так же, как и для упомянутой выше схемы регистрации, при помощи линеек детекторов. Достоинства и недостатки этого подхода будут обсуждаться в разд. 1.1. Исследуемый в данной работе алгоритм послойного фурье-синтеза относится к этому классу методов.

Другой подход к решению рассматриваемой задачи томографии – проведение полной трехмерной реконструкции [4–7]. В работе [8] был предложен алгоритм, получивший впоследствии широкое распространение. В алгоритме Фельдкампа проекции фильтруются в двух направлениях, затем производится трехмерное обратное проецирование (см. разд. 1.2), что обеспечивает достаточно высокое качество восстановления, но требует больших затрат времени компьютерного счета. В связи с этим значительное внимание уделяется созданию быстродействующих модификаций алгоритма Фельдкампа [9–11]. Так в [9] было предложено ускорение процедуры обратного проецирования, основанное на разбиении области реконструкции на подобласти. Ряд работ посвящен исследованию возможных обобщений, связанных с усложнением способа сбора проекционных данных. В частности, в [12] разработан вариант алгоритма Фельдкампа для так называемой бифокальной проекционной геометрии. В представленной работе алгоритм Фельдкампа сравнивается с предлагаемым алгоритмом послойного фурье-синтеза.

1. Описание алгоритмов. В пределе при бесконечном числе измерений задача томографической реконструкции, описанная во введении, с математической точки зрения сводится к обращению частного случая интегрального преобразования, называемого лучевым конусным преобразованием. Пусть K – некоторая кривая в R^3, по которой движется источник. Лучевое конусное преобразование ставит в соответствие каждой быстроубывающей на R^3 функции набор ее интегралов на множестве лучей $K \otimes S^2$, где S^2 – единичная сфера в R^3. В общем виде оно изучалось Кирилловым [13]. В работе [4] результаты Кириллова были использованы Туем для получения формулы обращения конусного преобразования. При этом носитель функции $g(\mathbf{r})$ предполагается финитным, а на кривую K накладывается ряд условий. В частности, требуется, чтобы любая плоскость, пересекающая носитель $g(\mathbf{r})$, также пересекала кривую K.

Окружность не удовлетворяет условиям Кириллова – Туя, поэтому для такой проекционной геометрии, вообще говоря, нельзя использовать формулу, выведенную Туем. В настоящее время для томографической реконструкции по данным, полученным при движении источника по окружности, используются итерационные алгебраические алгоритмы [1], упомянутый выше алгоритм Фельдкампа, а также методы послойной реконструкции. В данной работе для рассматриваемой проекционной геометрии предложен алгоритм послойного восстановления, основанный на преобразовании Фурье. Разработанный алгоритм сравнивается с алгоритмом Фельдкампа, который также является приближенным, хотя строится на принципах, отличных от послойного восстановления.

1.1. *Послойная реконструкция. Алгоритм фурье-синтеза.* Если радиус окружности, по которой движется источник, достаточно велик по сравнению с размером объекта вдоль оси Z, то задачи реконструкции слоев объекта, перпендикулярных этой оси, можно считать независимыми. Таким образом, полное трехмерное восстановление распадается на ряд двумерных, причем для реконструкции слоя с координатой z_k служат данные, полученные при пересечении плоскостей, в которых производится детектирование, с плоскостью $z = z_k$. Значение двумерной проекции на линии пересечения будем называть одномерной проекцией. Привлекательность такого подхода состоит в том, что он позволяет сократить время компьютерного счета.

Рассмотрим сначала случай, когда двумерная реконструкция в каждом слое производится посредством какого-либо алгоритма обратного проецирования с фильтрацией [1]. Одномерные проекции обрабатываются при помощи некоторого фильтра (об одном из них будет сказано в разд. 1.2, систематически процедура фильтрации проекций изложена в [1–3]). Затем производится обратное проецирование. При численной реализации оно сводится к тому, что для каждого узла двумерной сетки, на которой реконструируется сечение функции g, на носителе каждой из проекций находится соответствующая ей точка, и значения проекций в найденных точках суммируются. В послойных алгоритмах координаты этих точек, определенные для одного слоя, используются в дальнейшем при реконструкции любого из слоев, что приводит к существенному ускорению полного восстановления трехмерного объекта.

Недостатком вышеописанного подхода является то, что приходится сохранять в оперативной памяти компьютера большие объемы информации, по крайней мере $N^2 \times M$ чисел, где N^2 – количество узлов в одном слое сетки, на которой вычисляется функция g; M – количество проекций. Отметим, что в современных практических приложениях томографии числа N и M могут достигать нескольких тысяч и более. Предлагаемый здесь способ решения задачи, основанный на методе фурье-синтеза, не требует хранения столь больших массивов информации.

Метод фурье-синтеза основан на так называемой центральной проекционной теореме [2]. Она имеет место для параллельной геометрии регистрации данных, т. е. когда источник излучения удален на бесконечность. Для двумерного случая эта теорема записывается следующим образом:

$$\mathrm{F}_2 g(\omega_x, \omega_y)\Big|_{\omega_y = \omega_x \operatorname{tg}\varphi} = \mathrm{F} f_\varphi(\omega), \tag{2}$$

где F – преобразование Фурье, определенное согласно уравнению

$$\mathrm{F} f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i x\omega} dx. \tag{3}$$

Выражение (2) означает, что сечение двумерного фурье-образа функции прямой, проходящей через начало координат и имеющей угол наклона φ, равно фурье-образу ее одномерной проекции, зарегистрированной под тем же углом φ.

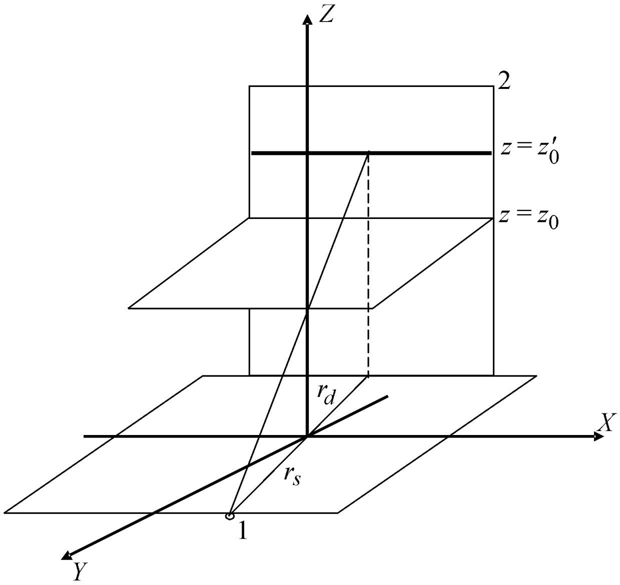

Рис. 2. Положение одномерной проекции для реконструкции слоя $z = z_0$

Принцип построения двумерного алгоритма фурье-синтеза следующий. На первом шаге вычисляются фурье-образы всех известных одномерных проекций. При этом согласно центральной проекционной теореме получается фурье-образ искомой функции, заданный на сетке в полярных координатах. Далее производится его интерполяция на двумерную сетку в декартовых координатах, после чего искомая функция реконструируется путем обратного двумерного преобразования Фурье. Заметим, что если обратное преобразование Фурье производить непосредственно в полярных координатах, то подынтегральную функцию нужно умножать на $|\omega|$, в результате чего по существу получается алгоритм, принадлежащий уже к другому классу, а именно к классу методов обратного проецирования с фильтрацией.

Вернемся к рассматриваемой задаче томографии с источником, движущимся по окружности. В этом случае одномерные проекции не являются параллельными. Более того, не существует такого набора одномерных проекций, по которому можно провести реконструкцию методом фурье-синтеза в какой-либо плоскости, перпендикулярной оси Z, за исключением плоскости $z = 0$. В разработанном алгоритме эти проблемы решаются следующим образом. Для реконструкции слоя $z = z_0$ берутся одномерные проекции, полученные в результате сечения плоскостей, в которых производится регистрация, плоскостью $z = z_0' = (r_s + r_d)\, z_0 / r_s$ (рис. 2). Выбор таких проекций представляется более естественным, чем, например, проекций, образованных в сечении плоскостью $z = z_0$, поскольку в этом случае восстанавливаемая функция меньше «растягивается» вдоль оси Z. Полученные проекционные данные $f_{z = z_0'}(\varphi, U)$ параллелизуются согласно уравнениям

$$f_{z = z_0'}(\varphi, U) \to f^{\|}_{z = z_0'}(\varphi', U');$$

$$\varphi' = \varphi + \mathrm{arctg}\left(\frac{U}{r_s + r_d}\right); \tag{4}$$

$$U' = r_s \sin\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{U}{r_s + r_d}\right)\right).$$

В (4) через U, U' обозначена координата на детекторе, перпендикулярная оси Z; φ – азимутальный угол, которым определяется положение источника и детектора. Набор параллельных проекций $f^{\parallel}_{z = z_0'}(\varphi', U')$ используется для реконструкции слоя $z = z_0$ методом фурье-синтеза.

1.2. *Алгоритм Фельдкампа.* Как было указано выше, алгоритм Фельдкампа является лишь приближенным. Его можно отнести к классу трехмерных методов обратного проецирования с фильтрацией. Согласно [8] он определяется следующими уравнениями:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{(r_s + r_d)^2 \tilde{f}(\varphi, U(x, y, z), V(x, y, z))}{(r_s + r_d + x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2} d\varphi, \tag{5}$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{(r_s + r_d)(y\cos\varphi - x\sin\varphi)}{(r_s + x\cos\varphi + y\sin\varphi)};$$

$$V(x, y, z) = \frac{(r_s + r_d)z}{(r_s + x\cos\varphi + y\sin\varphi)}, \tag{6}$$

$$\tilde{f}(\varphi, U, V) = \int_{-\infty}^{+\infty} dU' \Phi_U(U - U') \int_{-\infty}^{+\infty} dV' \frac{r_s^2 \Phi_V(V - V') f(\varphi, U', V')}{(r_s + r_d)\sqrt{(r_s + r_d)^2 + U'^2 + V'^2}}, \tag{7}$$

$$\Phi_U(U) = \int_0^{\omega_{U_0}} \omega \exp(i\omega U) d\omega;$$

$$\Phi_V(V) = \frac{\sin(\omega_{V_0} V)}{\pi V}. \tag{8}$$

Здесь ω_{U_0} и ω_{V_0} – константы, влияние которых будет обсуждаться далее. При $r_s \to \infty$ алгоритм (5)–(8) переходит в послойную формулу обращения для параллельного случая. Кроме того, уравнения (5)–(8) дают точное значение функции $g(x, y, z)$ в плоскости $z = 0$ при любом расстоянии до источника.

Уравнение (5) представляет собой обратное проецирование фильтрованных двумерных проекций $\left.\widetilde{f}(\varphi, U, V)\right|_{\varphi = \mathrm{const}}$. Фильтрация производится посредством свертки с функциями $\Phi_U(U)$ и $\Phi_V(V)$. В представленной работе фильтрация реализована исходя из следующего. Алгоритм (5)–(8) дает точное решение при удалении источника на бесконечность. В этом случае трехмерная задача разбивается на двумерные в плоскостях, перпендикулярных оси *Z*. Следовательно, при $r_s \to \infty$ $\Phi_V(V)$ должна обладать свойствами δ-функции, чего можно достичь, положив $\omega_{V_0} \to \infty$. При этом свертка с $\Phi_U(U)$ должна обеспечивать реконструкцию в плоскости. Известно, что такой функцией является обратное преобразование Фурье от $|\omega|$ [2], так называемый ramp-фильтр. Формально в (8) этому соответствует $\omega_{U_0} = \infty$. Существует много численных реализаций ramp-фильтра. В данной работе он выполнен как фильтр Шеппа – Логана [14]. Его дискретная запись имеет вид

$$\Phi_U(U_i) = \frac{1}{\pi^2 h_U^2} \frac{1}{1 - 4i^2}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{9}$$

где h_U – шаг сетки по переменной *U*. Фильтр (9) получается из (8) при $\omega_{U_0} = \pi / h_U$.

При конечном расстоянии до источника в выборе значения величины ω_{V_0} остается некоторая степень свободы. Заметим, что от ω_{V_0} зависит, какая часть двумерной проекции вдоль вертикальной оси будет использована для реконструкции одного слоя. В численном моделировании величина параметра ω_{V_0} бралась равной $1/h_V$, где h_V – шаг сетки по переменной *V*.

2. Сравнение алгоритма фурье-синтеза с алгоритмом Фельдкампа. 2.1. *Оценка времени реконструкции.* Предположим, что имеется *M* проекций, на каждой из которых задано $N \times N$ значений интегралов (1), реконструкция производится на кубической сетке $N \times N \times N$ узлов, причем *N* равно целой степени числа 2. Оценим количество операций, требуемых для полной трехмерной реконструкции методом послойного фурье-синтеза и алгоритмом Фельдкампа.

Для параллелизации проекционных данных в одном слое согласно формулам (4) требуется $k_1 NM$ операций. (Здесь и далее через *k* с индексом обозначаются коэффициенты, не зависящие от *N* и *M*.) При использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье для вычисления фурье-образов *M* одномерных проекций нужно $k_2 MN \log_2 N$ операций. Интерполяция с сетки в полярных координатах на сетку в декартовых координатах требует $k_3 N^2$ операций. Наконец для обратного двумерного преобразования Фурье необходимо $2k_2 N^2 \log_2 N$ операций. Просуммировав все эти числа, получим количество операций, которое затрачивается на реконструкцию одного слоя методом фурье-синтеза. Тогда для полного трехмерного восстановления число операций будет

$$N_{FS} = N(k_1 NM + k_2 N \log_2 N(M + 2N) + k_3 N^2). \tag{10}$$

Сравнение времен реконструкции методом послойного фурье-синтеза и алгоритмом Фельдкампа

N	Послойный фурье-синтез, с	Алгоритм Фельдкампа, с	t_{Fld}/t_{FS}	$N/\log_2 N$
128	3	22	7,33	18,29
256	32	840	26,25	32,0
512	311	16272	52,32	56,89

Фильтрация набора двумерных проекций согласно формулам (7), (8) требует $2k_4 MN^2$ операций, а трехмерное обратное проецирование – $k_5 MN^3$ операций. Таким образом, количество операций, затрачиваемое на реконструкцию алгоритмом Фельдкампа, определяется следующим образом:

$$N_{Fld} = 2k_4 MN^2 + k_5 MN^3. \tag{11}$$

При достаточно больших N и M имеет место $N_{FS} \sim O(MN^2 \log_2 N)$ и $N_{Fld} \sim O(MN^3)$. Соответственно метод послойного фурье-синтеза оказывается быстрее классической реализации алгоритма Фельдкампа в $N_{Fld}/N_{FS} \sim O(N/\log_2 N)$ раз. Отметим, что в работе [9] приводится такая же оценка ускорения реконструкции.

В таблице собраны результаты по быстродействию алгоритмов. Расчеты производились на процессоре AMD Athlon(tm) XP 1800+ с тактовой частотой 1,54 Гц. В первом столбце даны числа N (вычисления производились при $M = N$). Во втором и третьем столбцах содержится время, затраченное на полную реконструкцию методом послойного фурье-синтеза и алгоритмом Фельдкампа соответственно. Из таблицы видно, что по мере увеличения числа N отношение времени реконструкции методом фурье-синтеза ко времени реконструкции алгоритмом Фельдкампа приближается к $N/\log_2 N$, что свидетельствует о правильности приведенных выше оценок.

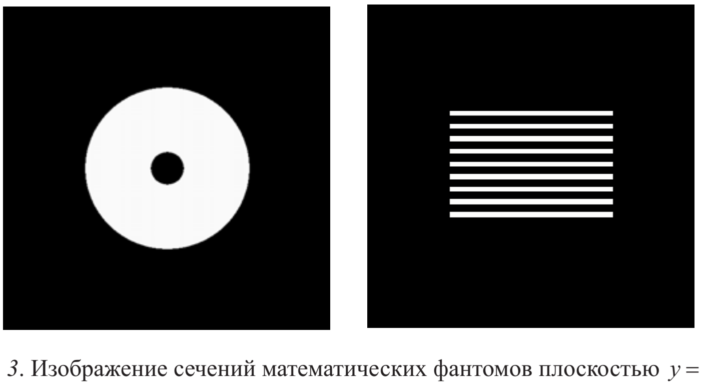

Рис. 3. Изображение сечений математических фантомов плоскостью $y = 0$

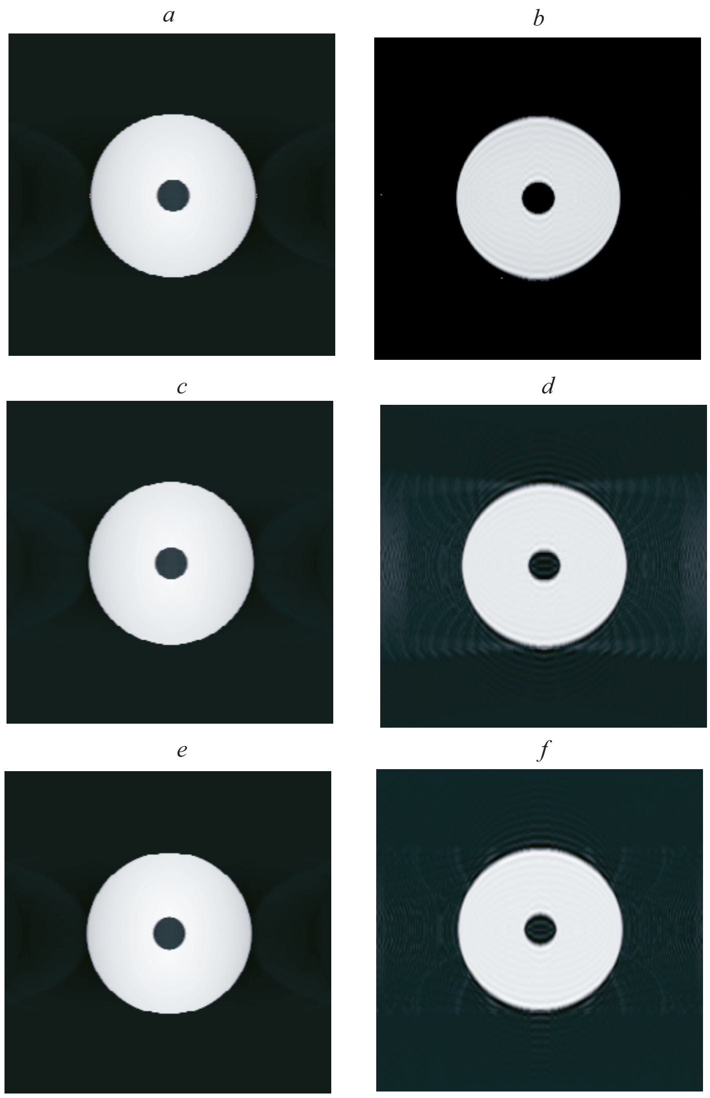

Рис. 4. Сечения реконструированного фантома 1

2.2. *Вычислительный эксперимент.* Алгоритм послойного фурье-синтеза исследовался в процессе вычислительного эксперимента. Использовались два трехмерных математических фантома. Один из них – шар с центром в начале координат (плотность 1,0; радиус 0,5) со сферическим отверстием радиусом 0,1, центр которого также расположен в начале координат (рис. 3, *a*). Далее этот фантом будет называться фантом 1. Второй – фантом 2 – состоит из девяти одинаковых дисков радиусом 0,5, расположенных один над другим вдоль оси Z, как это показано на рис. 3, *b*. Толщина дисков 0,03125, плотность 1,0, зазор между ними 0,046875. Сечения фантомов 1 и 2 плоскостью $y = 0$ представлены на рис. 3, *a*, *b* соответственно.

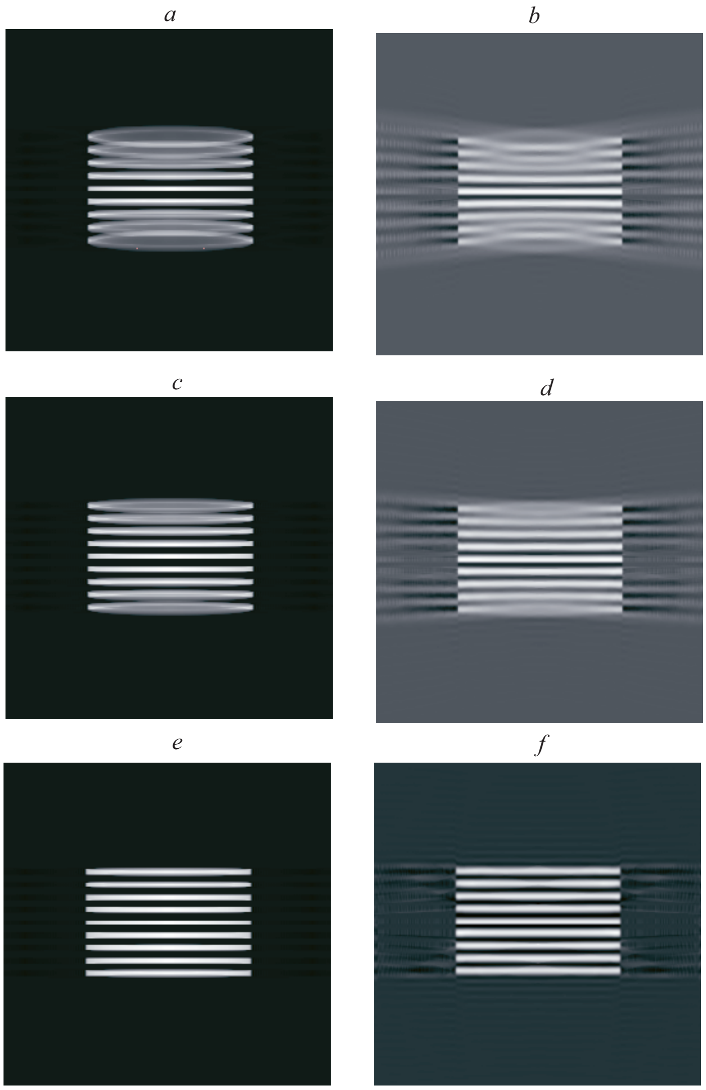

Рис. 5. Сечения реконструированного фантома 2

Расчеты производились на кубической сетке $256 \times 256 \times 256$ узлов, заданной в кубе с центром в начале координат и длиной ребра, равной 2,0. Проекционные данные моделировались как 360 двумерных конусных проекций, которые были распределены равномерно (через $1°$) по углу φ в интервале от 0 до 360°. Размер детекторов равнялся $2{,}0 \times 2{,}0$. На каждом из них задавалась сетка 256×256 узлов. Расстояние r_d было фиксированным и равнялось 1,0. В расчетах варьировалось расстояние r_s от источника до оси Z, а также уровень шумов в исходных данных. Результаты реконструкции, полученные методом послойного фурье-синтеза и посредством алгоритма Фельдкампа, сравнивались между собой.

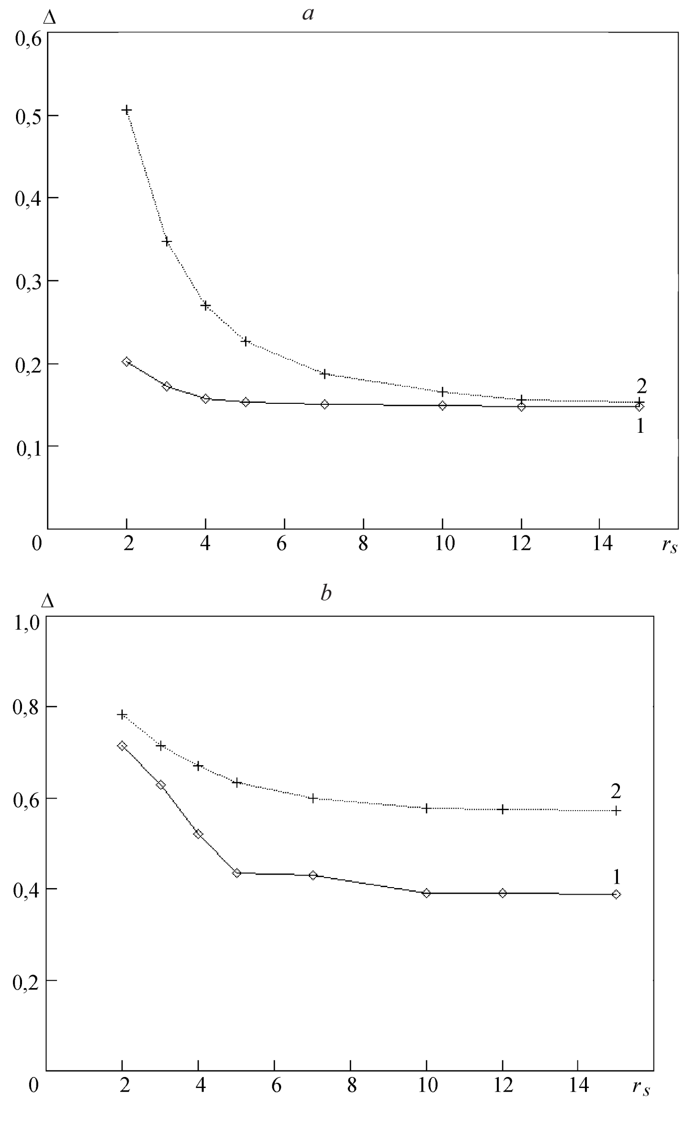

Рис. 6. Зависимости ошибки Δ от расстояния r_s

Для контроля точности использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение Δ между математическим фантомом и восстановленной функцией. Величина Δ вычислялась по следующей формуле:

$$\Delta = \frac{\| g_M - g \|}{\| g_M \|}. \tag{12}$$

Здесь g_M – точная модель (математический фантом); g – восстановленное решение; $\|\circ\|$ – евклидова норма в конечномерном векторном пространстве.

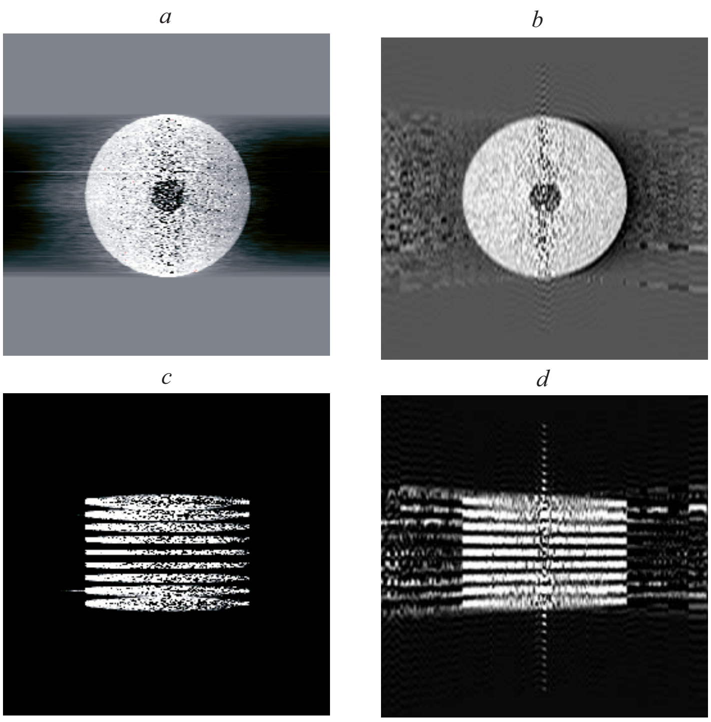

Рис. 7. Сечения реконструированных функций плоскостью $y = 0$

На рис. 4 показаны сечения функций, полученных в результате реконструкции фантома 1 плоскостью $y = 0$ при различных расстояниях r_s. Рис. 4, a, c, e иллюстрирует метод послойного фурье-синтеза, а рис. 4, b, d, f – алгоритм Фельдкампа. Для рис. 4, a, b $r_s = 3{,}0$, для рис. 4, c, d $r_s = 5{,}0$, для рис. 4, e, f $r_s = 15{,}0$. Число двумерных проекций 360. Аналогичные результаты для фантома 2 приведены на рис. 5. На рис. 6, *a* представлены зависимости ошибки Δ от расстояния r_s для реконструкции фантома 1 и на рис. 6, *b* – фантома 2. Кривые 1 и 2 на рис. 6, *a*, *b* относятся к методу фурье-синтеза и алгоритму Фельдкампа соответственно. Для всех результатов, приведенных на рис. 4–6, реконструкция производилась по незашумленным данным.

Из рис. 4, 5 видно, что при малых r_s алгоритм послойного фурье-синтеза обеспечивает лучшее качество реконструкции, чем алгоритм Фельдкампа. Так, например, на рис. 4, *b* отверстие заметно вытянуто вдоль оси Z, в то время как на рис. 4, *a* этого не наблюдается. Из рис. 5 отчетливо видно, что точность восстановления обоими алгоритмами падает по мере удаления от плоскости $z = 0$, однако при увеличении r_s реконструкция периферийных слоев улучшается. Такое поведение решения является очевидным следствием структуры алгоритмов и данной проекционной геометрии. Из рис. 6 также следует, что решения, полученные методом послойного фурье-синтеза, ближе к точной модели.

Важной характеристикой любого томографического алгоритма является его устойчивость по отношению к случайным шумам. В связи с этим ряд реконструкций был произведен по модельным проекционным данным, искаженным случайными шумами. Шум предполагался гауссовским со сред-

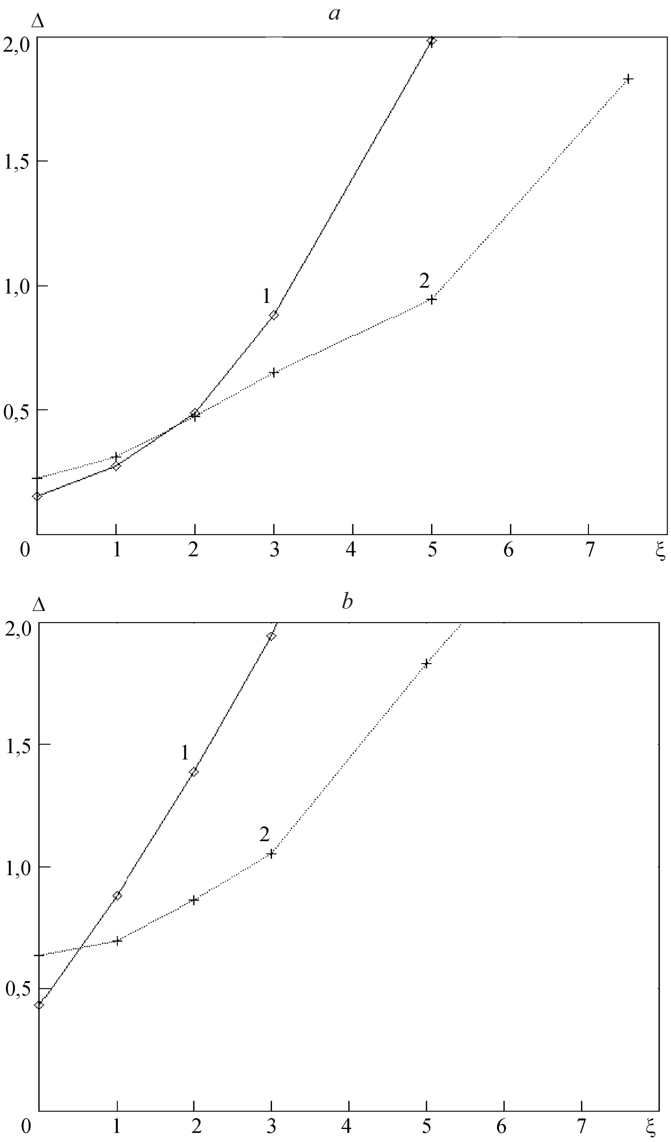

Рис. 8. Зависимости ошибки Δ от уровня шумов

ним, равным нулю, и переменной дисперсией, составляющей ξ процентов от значения проекции в данной точке. На рис. 7 изображены сечения плоскостью $y = 0$ функций, реконструированных по проекционным данным, содержащим случайные шумы с $\xi = 2\,\%$. На рис. 7, a, c приведены результаты восстановления методом фурье-синтеза, а на рис. 7, b, d – алгоритмом Фельдкампа. На рис. 7, a, b и рис. 7, c, d показаны фантомы 1 и 2 соответственно. На рис. 8 даны зависимости погрешности реконструкции от уровня шумов. Расстояние до источника r_s для рис. 7, 8 равно 5,0. Рис. 8, a относится к фантому 1, а рис. 8, b – к фантому 2. Кривые 1 и 2 на рис. 8, a, b соответствуют методу фурье-синтеза и алгоритму Фельдкампа.

Из рис. 7 можно заключить, что наличие шумов в проекционных данных заметно ухудшает результат реконструкции как методом послойного фурье-синтеза, так и алгоритмом Фельдкампа, поэтому для дальнейшего развития данной работы планируется включение процедур регуляризации в процесс томографической реконструкции. Отметим, что параметры ω_{U_0} и ω_{V_0} в алгоритме Фельдкампа могут быть использованы для подавления шумов в реконструируемой функции: уменьшение их величины приводит к сглаживанию проекций. Рис. 8 показывает, что метод послойного фурье-синтеза менее устойчив к шумам, чем алгоритм Фельдкампа.

Заключение. В работе предложен алгоритм томографической реконструкции по проекционным данным, полученным при движении источника по окружности. Он основан на принципе послойной реконструкции, причем для восстановления каждого слоя используется метод фурье-синтеза. Такая структура алгоритма позволяет существенно сократить время компьютерного счета и использовать при этом небольшой объем оперативной памяти.

Предлагаемый алгоритм был исследован в процессе численного моделирования, при этом производилось его сравнение с алгоритмом Фельдкампа. Получены следующие результаты.

1. Реконструкция методом послойного фурье-синтеза происходит значительно быстрее, чем алгоритмом Фельдкампа в классической реализации. В целом подтверждена справедливость оценки $t_{Fld}/t_{FS} \sim N/\log_2 N$.

2. В случае относительно небольшого радиуса окружности, по которой движется источник, метод послойного фурье-синтеза обеспечивает лучшую точность восстановления, чем алгоритм Фельдкампа.

3. Алгоритм Фельдкампа оказался более устойчивым к шумам в проекционных данных.

Автор выражает благодарность О. Е. Трофимову за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Herman G. T.** Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. N. Y.: Academic Press, 1980.

2. **Natterer F.** The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: John Willey & Sons, 1986.

3. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.

4. **Tuy H. K.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM Journ. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.

5. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Journ. Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 524.

6. **Grangeat P.** Mathematical framework of cone-beam 3D-reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Proc. of a Conf. on Mathematical Methods in Tomography. Oberwolfach, Germany. 1990. P. 66.

7. **Trofimov O.** About one form of inversion formula for cone-beam tomography // Proc. SPIE. 2001. **4188**. P. 111.

8. **Feldkamp L. A., Davis L. C., Kress J. W.** Practical cone-beam algorithm // Journ. Opt. Soc. Amer. A. 1984. **1**, N 6. P. 612.

9. **Xiao S., Bresler Y., Munson D. C. Jr.** Fast Feldkamp algorithm for cone-beam computer tomography // ICIP. 2003. **2**. P. 819.

10. **Gregor J., Gleason S. S., Paulus M. J., Cates J.** Fast Feldkamp reconstruction based on focus of attention and distributed computing // IJIST. 2002. **12**, N 6. P. 229.

11. **Shih A., Wang G., Cheng P. C.** Fast algorithm for X-ray cone-beam microtomography // Microsc. Microanal. 2001. **7**, N 1. P. 13.

12. **Likhachov A. V., Pickalov V. V.** Modification of Feldkamp algorithm for bifocal tomography // Proc. IASTED Intern. Conf. Anaheim: ACTA Press, 2002. P. 474.

13. **Кириллов А. А.** Об одной проблеме И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. **137**, № 2. С. 276.

14. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. P. 21.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: ipm1@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
7 июня 2005 г.