

**ЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРНОЙ ЖИВУЧЕСТИ
ВЛОЖЕННОГО ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ГРУПП-ГРАФА
ОТ ВЫБОРА НАЧАЛЬНЫХ ВЕРШИН ЕГО СМЕЖНЫХ КЛАССОВ****Ю. К. Дмитриев***Институт физики полупроводников СО РАН, Новосибирск**E-mail: dimi@isp.nsc.ru*

Рассматривается вложение диагностического циркулянтного графа в граф межмодульных связей вычислительной системы, который представляет собой граф группы E_2 прямого произведения циклических подгрупп. Вложение основано на разбиении группы E_2 на смежные классы по циклической подгруппе степеней выбранного элемента. Изучается зависимость введенного показателя живучести вложенного циркулянта от взаимного расположения начальных вершин смежных классов группы E_2 . Установлено, что значение показателя структурной живучести существенно зависит от указанного фактора. Найдены параметры вложения, при которых структурная живучесть вложенного графа не зависит от взаимного расположения начальных вершин его смежных классов.

Введение. Сложность вычислительных систем (ВС) с массовым параллелизмом растет быстрее, чем надежность их элементной базы. Результатом этого является возрастание вероятности возникновения кратных отказов на системном уровне, т. е. на уровне процессорных модулей. Кратность допустимых системных отказов зависит от вершинной степени диагностического графа [1]. Структура последнего столь значительно отличается от структуры межмодульной сети связи системы (рабочий граф), что становится определяющим фактором структурной составляющей общей стоимости системы. Для увеличения диагностических возможностей ВС без роста вершинной степени рабочего графа, что особенно актуально для масштабируемых систем высокой надежности, в [2] предложено реализовать диагностический граф как вложенный в рабочий. Диагностические связи между модулями, которые не являются соседними в рабочей структуре, образуются в виде составных каналов, формируемых в межмодульной сети связи.

Объектом изучения являются живучие вычислительные системы, или системы с деградацией производительности, обладающие предельным теоретически допустимым уровнем диагнозоспособности (ее показателем служит значение кратности допустимых отказов) при использовании модели [1].

В работах [3–5] изучены свойства циркулянтного диагностического графа, вложенного в рабочий граф прямого произведения циклических групп. Вложение основано на разбиении группы, представляющей рабочую структуру, на циклические подгруппы степеней выбранного (порождающего) элемента. В [3] проанализирована зависимость введенного показателя структурной живучести [6] вложенного диагностического графа от выбора порождающего элемента. В [4] установлены условия инвариантности структурной живучести фрагментов вложенного графа к нумерации его вершин. Эта инвариантность позволяет уменьшить трудоемкость сравнительного анализа структурной живучести вложенного диагностического графа при выбранном порождающем элементе. В [5] поставлена и решена задача зависимости структурной живучести вложенного диагностического циркулянта от используемой нумерации для одного типа регулярной нумерации, названной координатной. В работах [3–5] структурная живучесть диагностического графа исследована при фиксированном положении множества начальных элементов смежных классов в рабочем графе.

В предлагаемой работе рассматривается зависимость структурной живучести вложенного диагностического графа от относительного расположения начальных вершин смежных классов.

Обозначения и определения. Структура межмодульной сети связи масово-параллельной ВС представлена рабочим графом $G' = (V, E')$, в котором V – множество вершин, сопоставленных с процессорными модулями системы, а E' – множество ребер, соответствующих межмодульным связям. В качестве рабочего графа мы используем двумерный тор – диаграмму Кэли группы E_2 прямого произведения нормальных циклических подгрупп C_H и C_W (далее E_2 -граф):

$$E_2 = C_H \otimes C_W.$$

Здесь H и W – порядки нормальных циклических подгрупп, \otimes – символ прямого произведения. С вершинами групп-графа сопоставлены элементы группы; число вершин E_2 -графа $N = H \times W = |V|$. Отметками ребер E_2 -графа служат символы образующих элементов g_1 и g_0 подгрупп C_H и C_W соответственно.

В качестве диагностического графа используется циркулянт $D = (N; s_1, s_2, \dots, s_t)$, где N – число вершин графа и $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_t = t$, $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$. Здесь t – кратность допустимых системных отказов [1]. Вершины циркулянта пронумерованы от 0 до $N - 1$, причем i -я вершина ($0 \leq i \leq N - 1$) смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_t \pmod{N}$. В работе [1] установлено, что циркулянт, в котором $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$, является оптимальным графом t -диагностируемой без ремонта системы. В оптимальном диагностическом графе число дуг (число тестов над модулями системы) является необходимым и достаточным для однозначной идентификации всех присутствующих в системе неисправных модулей (диагностирование без ремонта).

Вершины вложенного диагностического циркулянтного графа [2] соответствуют вершинам рабочего графа, а дуги, сопоставленные со связями пар модулей тестирующий–тестируемый, или тестовыми связями, представляют собой кратчайшие пути между соответствующими вершинами рабочего графа. Эти пути исчисляются исходя из соответствия элементов группы и

уникальных номеров (абсолютных адресов) вложенного циркулянтного графа, сопоставленных с вершинами рабочего графа. Используемое в [2–5] и в данной работе вложение диагностического графа основано на разбиении группы E_2 на смежные (для определенности правые) классы по подгруппе Γ , состоящей из всех степеней выбранного (называемого порождающим) элемента $g_0^x g_1^y$ группы, где $0 \leq x \leq \lfloor W/2 \rfloor$, $0 \leq y \leq \lfloor H/2 \rfloor$.

При разбиении группы на смежные классы по подгруппе Γ групп-граф, имеющий структуру $H \times W$ (далее $(H \times W)$ -граф), делится на P подмножеств по Q вершин в каждом, называемых кластерами; $PQ = N$. Вершины кластера образуют решетку размером $h \times w$, где $h \times w = Q$, $Q \geq 2$; при этом выполняются следующие соотношения: $H = P_H h$, $W = P_W w$ (здесь P_H и P_W – целые числа и $P = P_H \times P_W$). Кластеры образуют покрытие рабочего графа без просветов и наложений. Они нумеруются числами от 0 до $P - 1$ в соответствии со степенью принадлежащего кластеру порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ циклической подгруппы Γ . Кластер, которому принадлежит вершина с номером 0, сопоставленная с единичным элементом группы E_2 (и подгруппы Γ), получает номер 0. Назовем этот кластер опорным, или 0-кластером, а кластер с номером f – f -кластером.

Выбор порождающего элемента $g_0^x g_1^y$ для структуры, заданной значениями H и W , определяет параметры w, h кластеров и взаимное расположение последних. Будем говорить, что четверка (H, W, x, y) описывает вложение диагностического графа в рабочий.

Тестовая связь однозначно характеризуется парой концевых вершин (неориентированного) пути (далее маршрут), представляющего эту связь в рабочем графе. Пусть i и j – абсолютные адреса тестирующей и тестируемой вершин ($i, j = \overline{0, (N-1)}$), а $g_0^{x_i} g_1^{y_i}$ и $g_0^{x_j} g_1^{y_j}$ – их групповые описания. Тогда тестовой связи (i, j) соответствует слово $g_0^{(x_j - x_i) \bmod W} g_1^{(y_j - y_i) \bmod H} = g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}}$, в котором показатели степени представляют собой адрес вершины j относительно вершины i .

О п р е д е л е н и е 1. Описанием тестовой связи (i, j) называем пару чисел $\tilde{w}(i, j) = (|x_{ij}|, |y_{ij}|)$, характеризующих кратчайший маршрут между i и j .

Набор описаний тестовых связей, соответствующих дугам вложенного диагностического циркулянта, является первичной информацией для расчета показателей структурной живучести последнего и называется рядом описаний (RD). Для некоторого подграфа G_1 вложенного диагностического графа G соответствующую часть ряда описаний обозначим $RD(G_1)$.

Показатель \mathfrak{R} , использованный в [3] для оценки структурной живучести вложенного графа, основан на усреднении соответствующих показателей для соединений [6] – совокупности непересекающихся маршрутов между парами из тестирующей и тестируемой вершин; живучесть отдельного маршрута, в свою очередь, является некоторой функцией его длины.

Нумерация. Абсолютная адресация вершин рабочего графа для вложения (H, W, x, y) диагностического графа определяется следующими правилами.

1. Номера $0, 1, \dots, q, \dots, Q - 1$ присваиваются произвольно выбираемым вершинам из Q смежных классов. Такие вершины будем называть начальными. Классы смежности получают номера соответствующих начальных вершин.

2. Обозначим g_q групповое представление начальной вершины q -го класса смежности. Тогда этот класс смежности составляют вершины с групповым описанием $g_q(g_0^x g_1^y)^{kQ}$, $k = \overline{0, (P-1)}$. Вершине с групповым описанием $g_q(g_0^x g_1^y)^{kQ}$ присваиваем номер $kQ + q$.

О п р е д е л е н и е 2. Несмещенной называем нумерацию, при которой начальные вершины всех смежных классов принадлежат опорному кластеру ($k = 0$). В противном случае нумерацию называем смещенной. Величина k , отсчитываемая в направлении, противоположном шагу порождающего элемента, называется шагом смещения. Шаг смещения называется постоянным, если для любых q и $(q+1) \bmod Q$, $q = \overline{0, (Q-1)}$, значение шага k одинаково.

Шаг смещения может быть задан индивидуально для начальных вершин каждого класса или для группы таких вершин.

В данной работе рассматриваются смещенные нумерации. Исходя из обеспечения простоты маршрутизации, рассматриваем только смещения с постоянным шагом.

Принадлежность вершин кластеров классам смежности зададим топологической матрицей $M = \|m_{ji}\|$, $j = \overline{0, (h-1)}$, $i = \overline{0, (w-1)}$, которая состоит из w столбцов и h строк. Элементы m_{ji} топологической матрицы также называем топологическими. Они нумеруются сверху вниз по строкам и слева направо по столбцам. Матрица вида M сопоставляется с каждым кластером.

Элементам топологической матрицы опорного кластера при несмещенной нумерации в общем случае присваиваются произвольные попарно различные значения $]j, i[$ элемента m_{ji} в диапазоне от 0 до $Q-1$.

О п р е д е л е н и е 3. Координатной несмещенной называем нумерацию, при которой начальные вершины всех смежных классов принадлежат опорному кластеру, а номера классов возрастают или убывают по строкам и столбцам (или по столбцам и строкам) матрицы M опорного кластера. Координатной смещенной называем нумерацию, при которой начальные вершины смежных классов принадлежат разным кластерам. Перестановочной называем нумерацию, которая не является координатной.

В работе [5] введено восемь способов координатной нумерации согласно вариантам порядка нумерации по строкам и столбцам кластера.

Совместим вершины рабочего групп-графа с узлами прямоугольной целочисленной решетки. Свяжем с рабочим графом левую прямоугольную декартову систему координат. Ориентацию для оси абсцисс (оси ординат) выбираем соответственно направлению образующей g_0 (g_1).

Условимся, что рабочему графу принадлежат точки, ограниченные осями координат и прямыми, проходящими параллельно им через точки $+(W-1)$ и $+(H-1)$. Точки, лежащие на осях координат и указанных прямых, также принадлежат рабочему графу. Таким образом, элементы циклической подгруппы C_w (C_h) принадлежат оси абсцисс (ординат). Начало координат соответствует начальной вершине нулевого кластера.

На рис. 1, *a* показана нумерация кластеров для вложения $(6, 15, 3, 2)$, дающего $Q = 6$. Узлы решетки соответствуют вершинам рабочего графа. Вершины опорного кластера на рисунке выделены жирными точками. Разбиение рабочего графа на кластеры обозначено жирными линиями. На рис. 1, *b* пред-

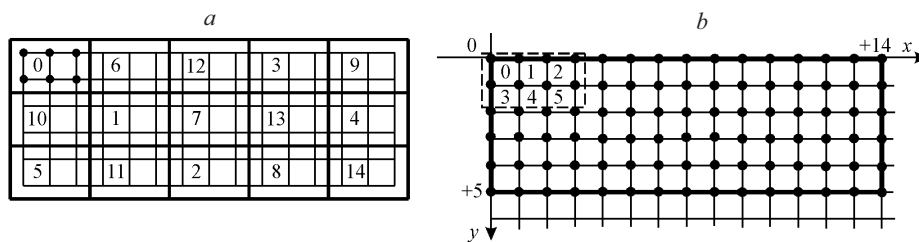


Рис. 1

ставлено размещение рассматриваемого (6×15) -графа в выбранной системе координат. Нулевой кластер выделен штриховой линией; приведена координатная нумерация вида x_2 (второй квадрант левой прямоугольной декартовой системы координат), соответствующая следующему представлению топологической матрицы для опорного кластера:

$$M^{(x_2)} = \|m_{ji}\|, \quad \text{где }]j, i[= wj + (w - 1 - i).$$

Подграф представителей. Свойство симметричности диагностического групп-графа позволяет оценивать структурную живучесть заданного вложения структурной живучестью подграфа представителей тестирующих и тестируемых вершин [3, 4]. Представителями тестирующих вершин служат начальные вершины классов смежности, составляющие множество $A = \{0, 1, \dots, q, \dots, Q - 1\}$, q – номер вершины. Согласно определению множество представителей тестируемых вершин для q -го представителя тестирующих вершин имеет вид

$$B'(q) = \{q + 1, q + 2, \dots, q + t, \overline{q = 0, (Q - 1)}\},$$

где t – кратность неисправностей на системном уровне. Например, в графе с $N = 90$ и $t = 44$ (см. рис. 1) при $Q = 6$ для $q = 5$ имеем $B'(5) = \{6, 7, \dots, 48, 49\}$.

Условие эквивалентности рядов описаний. Рассмотрим несмещенную нумерацию для заданного вложения. Пусть порядок классов смежности, образованных по подгруппе степеней заданного порождающего элемента $g_0^x g_1^y$, равен P , $P = N/Q$. Тогда классам смежности с начальными вершинами i и j , $i, j \in \{0, 1, \dots, Q - 1\}$, $i < j$, соответствуют упорядоченные (по возрастанию) множества $B(i)$ и $B(j)$ номеров вершин:

$$\begin{aligned} B(i) &= \{i + kQ, k = 0, 1, \dots, P - 1\}, \\ B(j) &= \{j + kQ, k = 0, 1, \dots, P - 1\}. \end{aligned}$$

Если $g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}}$ – групповое описание пути из вершины i в вершину j опорного кластера, то множества групповых описаний путей из вершины i к вершинам из $B(j)$ и из вершины j к вершинам из $B(i)$, упорядоченные по возрастанию номеров вершин, имеют вид

$$F_i(j) = \{(g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}})(g_0^x g_1^y)^k, k = 0, 1, \dots, P - 1\} = \{g_0^{x_{ij} + kx} g_1^{y_{ij} + ky},$$

$k = 0, 1, \dots, \lfloor P/2 \rfloor, -\lfloor P/2 \rfloor$ (если P нечетно), $-\lfloor P/2 \rfloor + 1, \dots, -2, -1$,

$$F_j(i) = \{(g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}})^{-1} (g_0^x g_1^y)^k, k = 0, 1, \dots, P-1\} = \{g_0^{-x_{ij} + kx} g_1^{-y_{ij} + ky},$$

$k = 0, 1, \dots, \lfloor P/2 \rfloor, -\lfloor P/2 \rfloor$ (если P нечетно), $-\lfloor P/2 \rfloor + 1, \dots, -2, -1$.

Обозначим $\overline{B(i)}$ множество $B(i)$, упорядоченное по убыванию номеров вершин. Множество групповых описаний путей из вершины j к вершинам из $\overline{B(i)}$ представим в виде

$$\overline{F_j(i)} = \{g_0^{-x_{ij} + k'x} g_1^{-y_{ij} + k'y},$$

$k' = 0, -1, -2, \dots, -\lfloor P/2 \rfloor$, (если P нечетно), $-\lfloor P/2 \rfloor + 1, \dots, -2, -1$.

Поскольку пути с групповыми представлениями вида $g_0^a g_1^b$ и $g_0^{-a} g_1^{-b}$ имеют одинаковое описание, то множества $F_i(j)$ и $\overline{F_j(i)}$ совпадают по порядку и описанию элементов. Это дает

Свойство 1. Для любых $\{i, B(i)\}$ и $\{j, B(j)\}$, $i \neq j$, ряды описаний совпадают:

$$\text{RD}(F_i(j)) = \text{RD}(\overline{F_j(i)}).$$

Пусть $F_i(j)_s^{s+m-1}$ – часть упорядоченного множества $F_i(j)$, содержащая m последовательно расположенных элементов, начиная с s -го по $(s+m-1) \bmod P$ -й включительно; $s \in \{0, 1, \dots, P-1\}$, $m \leq P$. Для заданного $F_i(j)_0^P$ обозначим $F_i^a(j) = F_i(j) - F_i(j)_0^P$. Ясно, что

$$\text{RD}(F_i(j)) = \text{RD}(F_i(j)_0^{(s+m-1) \bmod P}) \cup \text{RD}(F_i(j)_{(s+m) \bmod P}^{(P-1) \bmod P}).$$

Из свойства 1 вытекает

Свойство 2. При заданных $F_i(j)$ и $F_j(i)$ для всяких s и m выполняется

$$\text{RD}(F_i(j)_s^{(s+m-1) \bmod P}) = \text{RD}(\overline{F_j(i)}_{-s}^{-(s+m-1) \bmod P}).$$

Благодаря симметричности диагностического групп-графа, для любой выбранной тестирующей вершины i множество тестируемых ею вершин $B'(i)$ распределено по классам смежности равномерно, т. е. разница в числе тестируемых вершин для любых двух классов не превышает единицы. При этом выполняется

Свойство 3. Для тестирующей вершины класса i число $p_i(i+j)$ тестируемых вершин, принадлежащих некоторому классу смежности $(i+j) \bmod Q$, составляет значение $\lfloor t/Q \rfloor$, если $j=0$ (что соответствует рассматриваемому классу i) или $j > r$, и значение $\lfloor t/Q \rfloor + 1$, если $j = \overline{1, r}$. Здесь $r = (t+Q) - SQ$ и $S = \lfloor (t+Q)/Q \rfloor$ [4].

Обозначим $B'_i(j)$ подмножество вершин из $B(j)$, тестируемых вершиной i , и $B'_j(i)$ подмножество вершин из $B(i)$, тестируемых вершиной j , $i < j$. Пусть $p_i(j)$ и $p_j(i)$ – мощности указанных подмножеств. В рассматриваемые

множества входят вершины с номерами $B'_i(j) = \{j, j + Q, \dots, j + (p_i(j) - 1)Q\}$ и $B'_j(i) = \{i + Q, i + 2Q, \dots, i + p_j(i)Q\}$.

Множества путей, соответствующих указанным тестовым связям для тестирующих вершин i и j , имеют следующие групповые представления:

$$F'_i(j) = \{(g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}})(g_0^x g_1^y)^k, k = \overline{0, (p_i(j) - 1)}\} = F'_i(j)_0^{p_i(j) - 1},$$

$$F'_j(i) = \{(g_0^{x_{ij}} g_1^{y_{ij}})^{-1} (g_0^x g_1^y)^{k'}, k' = \overline{1, (p_j(i))}\} = F'_j(i)_1^{p_j(i)}.$$

Используя свойство 2, последнее выражение можно переписать в эквивалентной форме:

$$F'_j(i)_1^{p_j(i)} = F'_i(j)_{P - p_j(i)}^{P - 1}.$$

Ряд описаний для $B'_i(j) \cup B'_j(i)$ состоит из $p_{ij} = p_i(j) + p_j(i)$ элементов и имеет вид

$$\begin{aligned} \text{RD}(F'_i(j) \cup F'_j(i)) &= \text{RD}(F'_i(j)_0^{p_i(j) - 1}) \cup \text{RD}(F'_j(i)_1^{p_j(i)}) = \\ &= \text{RD}(F'_i(j)_0^{p_i(j) - 1}) \cup \text{RD}(F'_i(j)_{P - p_j(i)}^{P - 1}). \end{aligned}$$

Учитывая значения индексов в данном выражении, заключаем, что $\text{RD}(F'_i(j) \cup F'_j(i)) = \text{RD}(F'_i(j))$, если и только если

$$p_i(j) + p_j(i) = P, \quad (1)$$

что является доказательством следующей леммы.

Лемма. Для пары классов смежности i и j выполняется $\text{RD}(F'_i(j) \cup F'_j(i)) = \text{RD}(F'_i(j))$, если и только если $p_i(j) + p_j(i) = P$.

Следствие. Если $p_i(j) + p_j(i) = P$, то $\text{RD}(F'_i(j) \cup F'_j(i))$ не зависит от вида и шага смещения.

Это доказывается тем, что $B'_i(j) \cup B'_j(i)$ не зависит от шага смещения.

Последний результат позволяет существенно уменьшить трудоемкость расчета структурной живучести для смещенных нумераций: значение показателя структурной живучести, рассчитанное для несмещенной нумерации классов i и j , удовлетворяющих условию (1), можно использовать при расчете структурной живучести любой k -смещенной нумерации, $k > 0$.

Утверждение. Для заданного вложения (H, W, x, y) любые смещенные нумерации эквивалентны по структурной живучести при $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$, если и только если $r = Q - 1$.

Доказательство. Условие (1) может выполняться, когда $p_i(j) = p_j(i) = P/2$ или $p_i(j) \neq p_j(i)$. Первое имеет место при $r = Q - 1$ для любых пар классов смежности, а второе – при $r \neq Q - 1$, т. е. при нечетном P , лишь для некоторых классов. Вместе с тем при нечетном P для всякого вложения согласно свойству 3 найдется хотя бы одна пара классов i и j , для которых $p_i(j) = p_j(i) = \lfloor (P - 1)/2 \rfloor$, что влечет нарушение условия (1). Конец доказательства.

Смещенные нумерации. Смещенная нумерация полностью задана, если указано множество номеров, составляющих опорный кластер.



Рис. 2

Пример смещенной нумерации для класса смежности 1 при $k = 3$ и $Q = 2$ представлен на рис. 2.

Нашей целью является обнаружение существования зависимости структурной живучести от использования смещения, поэтому мы не станем давать формального определения, ограничившись графическим представлением принципа образования используемых смещений. Введем четыре правила (типа) смещения начальных вершин смежных классов. Все эти смещения имеют регулярный характер: место начальной вершины i -го смежного класса зависит от значения i и от топологического места вершин этого класса смежности в кластерах. На рис. 3 схемы образования смещенных нумераций показаны на примере кластера с топологией $q_W \times q_H = 3 \times 3$ при шаге $k = 1$. Штриховкой, использованной для элементов 0-кластера, отмечено расположение начальных вершин соответствующих смежных классов в других кластерах. На рисунке Z обозначены топологические места тех смежных классов, начальные вершины которых остаются в опорном кластере. В смещениях типа a , c и e шаг смещения задан для групп начальных вершин, а в смещении s – для индивидуальных вершин.

Для частного случая, когда $q_H = 1$ ($q_W = 1$), нумерация типа a (типа c) неприменима, а нумерации других типов эквивалентны.

Для экспериментов были выбраны вложенные диагностические (9×10) -, (6×15) - и (5×18) -графы, исследованные в [3–5]. Значение показателя структурной живучести рассчитывалось для каждого из восьми видов координатных нумераций, а также для тех перестановочных нумераций, которые имеют максимальное значение структурной живучести при несмещенной нумерации (они были найдены полным перебором несмещенных перестановочных нумераций) и при всех значениях шага смещения $k = 1, (P - 1)$.

Полученные численные значения указывают на существенную зависимость структурной живучести от типа и величины шага смещения.

1. Для вложения $(9, 10, 2, 3)$ смещенные нумерации в среднем имеют более низкое значение структурной живучести, чем соответствующие несмещенные для координатных нумераций. Тем не менее обнаружены такие типы и шаги смещения, при которых значение структурной живучести равно или даже больше, чем для соответствующей несмещенной нумерации. Так, для смещения типа s при шаге $k = 5$ для исследованных вложений получено абсолютное наибольшее значение $\mathfrak{R} = 0,618155$. Наибольшее значение структурной живучести на этом вложении для перестановочных несмещенных нумераций составило величину $\mathfrak{R}_p = 0,615368$. Заметим, что на множестве координатных несмещенных нумераций наибольшее значение структурной живучести $\mathfrak{R}_c = 0,615364$ (что ненамного отличается от \mathfrak{R}_p) имеет место для

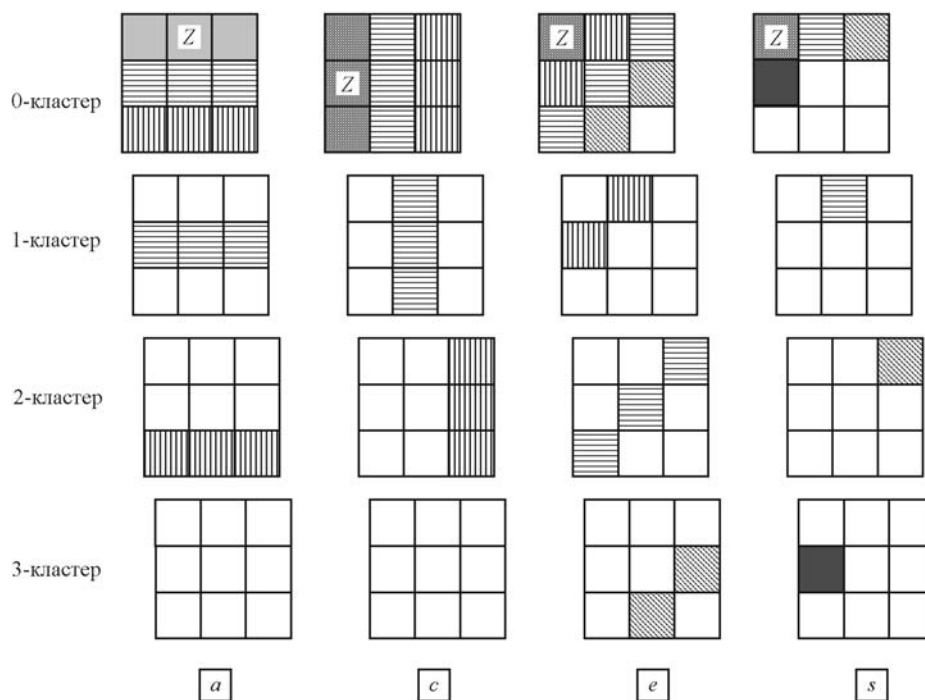


Рис. 3

нумерации вида x_2 (см. рис. 1). Значение $\mathfrak{R}_c = 0,615364$ достигается также для x_2 при смещении типа s и шаге $k = 5, 10$.

2. Расчеты показали, что для вложения $(9, 10, 4, 3)$ смещенные нумерации оказываются более эффективными, чем для вложения $(9, 10, 2, 3)$: здесь больше случаев, когда структурная живучесть при смещенной нумерации выше, чем при несмещенной. При перестановочных несмещенных нумерациях для вложения $(9, 10, 4, 3)$ наибольшее значение структурной живучести $\mathfrak{R} = 0,615247$, а наименьшее – $\mathfrak{R} = 0,615006$. Для смещенных координатных нумераций $\mathfrak{R} = 0,615345$. Это значение показателя структурной живучести превышает наибольшее достигнутое значение для перестановочных несмещенных нумераций не столь значительно, как в случае порождающего элемента $g_0^2 g_1^3$, зато число нумераций, для которых превышение имеет место, больше, чем для вложения $(9, 10, 2, 3)$.

3. Аналогичную картину дает использование смещенных нумераций для (6×15) -графа. Как и в рассмотренных ранее вложениях, при использовании смещенных нумераций структурная живучесть выше, чем при несмещенных (координатных и перестановочных) нумерациях, образованных порождающим элементом $g_0^1 g_1^2$. Так, смещение типа e для нумерации y_3 (шаг смещения $k = 2$) дает $\mathfrak{R} = 0,614045$ при наибольшем значении структурной живучести $\mathfrak{R} = 0,611310$, достигаемом на перестановочных несмещенных нумерациях.

4. Наблюдаемая для некоторых типов смещения (например, для смещения типа s вложения $(9, 10, 2, 1)$) цикличность значений структурной живучести при изменении шага k смещения связана с тем, что P кратно выбранному значению k .

5. Значения структурной живучести для смещенных перестановочных нумераций, которые имеют наибольшие значения структурной живучести

Значения структурной живучести для вложения (9, 10, 2, 3)

Шаг смещения, k	Тип смещения			
	a	c	e	s
1	0,615259	0,614952	0,614920	0,615198
2	0,615227	0,615042	0,615074	0,615247
3	0,615283	0,615198	0,615247	0,615333
4	0,615259	0,615069	0,615037	0,615083
5	0,615328	0,615250	0,615225	0,615368
6	0,615333	0,615190	0,615140	0,615198
7	0,615193	0,614948	0,615044	0,615247
8	0,615227	0,615039	0,615071	0,615333
9	0,615333	0,615290	0,615240	0,615083
10	0,615303	0,615175	0,615240	0,615368
11	0,615289	0,615050	0,614945	0,615198
12	0,615283	0,615183	0,615232	0,615247
13	0,615193	0,614942	0,615038	0,615333
14	0,615289	0,615156	0,615060	0,615083
15	0,615271	0,615106	0,615108	0,615237

для вложения (9, 10, 2, 3), сведены в таблицу. Из таблицы видно существование смещений, при которых структурная живучесть равна наибольшему значению этого показателя ($\mathcal{R} = 0,615368$), достигаемому для несмещенных перестановочных нумераций. Примечательно, что максимальное значение структурной живучести для перестановочных нумераций достигается при смещении типа s , как имело место и в большинстве случаев при координатных нумерациях.

Таким образом, общий вывод из рассмотренных экспериментальных данных состоит в том, что смещение начальных вершин смежных классов представляет собой существенный фактор при поиске нумераций с экстремальными значениями структурной живучести. Достижимое увеличение структурной живучести системы может окупить усложнение процедур маршрутизации, сопутствующее введению смещения.

Заключение. Изучены свойства циркулянтного диагностического графа, вложенного в рабочий граф прямого произведения циклических групп. Вложение основано на разбиении группы, представляющей рабочую структуру, на циклические подгруппы степеней выбранного (порождающего) элемента. Показано существование зависимости структурной живучести вложенного диагностического графа от взаимного расположения (смещения) начальных вершин смежных классов. Доказано утверждение, касающееся

свойства рабочего графа, которое обеспечивает инвариантность структурной живучести к смещению, что дает возможность упростить сравнительный анализ вложений. Установлено, что выбор смещения позволяет варьировать значением структурной живучести вложенного диагностического графа и для рабочего графа с заданной топологией достигать более высокой структурной живучести вычислительной системы, нежели ранее исследованные виды вложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Preparata F. P., Metze G., Chien R. T.** On connection assignment problem of diagnosable systems // IEEE Trans. Electron. Comput. 1967. **EC-16**, N 12. P. 848.
2. **Димитриев Ю. К.** Перестраиваемые диагностические графы живучих вычислительных систем // Автометрия. 1998. № 1. С. 97.
3. **Димитриев Ю. К., Мелентьев В. А., Грязнов Н. Г.** Анализ живучести вложенных диагностических структур // Автометрия. 2001. № 5. С. 51.
4. **Димитриев Ю. К.** Условия независимости структурной живучести вложенного диагностического графа от нумерации модулей вычислительной системы с тороидальной структурой // Автометрия. 2005. **41**, № 6. С. 74.
5. **Димитриев Ю. К.** Зависимость живучести вложенной диагностической структуры от способа адресации модулей вычислительной системы // Автометрия. 2006. **42**, № 1. С. 40.
6. **Мелентьев В. А.** Оценка потенциальной и структурной живучести вычислительных систем // Электрон. моделирование. 1995. **17**, № 1. С. 78.

Поступила в редакцию 26 мая 2005 г
