

**ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛОВ
В МОДИФИЦИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА
НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ****С. Н. Бузыкканов, С. Н. Кириллов***Рязанская государственная радиотехническая академия, Рязань**E-mail: snk@rinfotels.ru*

Предложен алгоритм вычисления спектра, основанный на представлении сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 с использованием быстрого преобразования Фурье. Получены выражения для определения параметра модифицированного пространства Соболева, обеспечивающего минимальную погрешность оценки спектра, которая вызвана пониженной частотой дискретизации и шумами квантования. Показаны возможности повышения скорости вычисления спектра в 2 раза по сравнению с алгоритмами в пространстве L_2 , а также снижения шумов квантования на 5–15 %.

Введение. В различных радиотехнических системах широко применяется цифровой спектральный анализ сигналов на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ), теория которого была развита в [1, 2]. Для практической реализации ДПФ в системах цифровой обработки сигналов (ЦОС) были разработаны различные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), позволяющие существенно снизить вычислительные затраты микропроцессоров. В этом случае система ЦОС представляет собой последовательно включенные блоки фильтра нижних частот (ФНЧ), аналого-цифрового преобразования (АЦП) и БПФ.

Блок ФНЧ служит для ограничения полосы сигнала и устранения эффекта «наложения спектров» [2]. С одной стороны, аналоговые ФНЧ не позволяют полностью подавить сигнал вне полосы пропускания, что может привести к искажению вычисленных спектров. С другой стороны, АЦП имеют ограниченную разрядность, что приводит к возникновению шумов квантования, которые невозможно в дальнейшем подавить с помощью цифровой обработки. В этом случае единственным способом избежать искажений спектра в пространстве L_2 является увеличение частоты дискретизации и повышение разрядности АЦП, что не всегда возможно. Таким образом, представляет интерес разработка алгоритмов ЦОС, менее критичных к выбору частоты дискретизации и разрядности АЦП, чем аналогичные алгоритмы в пространстве L_2 .

Как показано в [3, 4], использование алгоритмов обработки сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 (МПС) позволяет за счет распараллеливания операций снизить вычислительные затраты при определении спектра и повысить робастность результата вычислений к пониженной частоте дискретизации. Однако при разработке новых устройств целесообразно максимально использовать существующие алгоритмы ЦОС.

Целью предлагаемой работы является исследование возможности применения алгоритма БПФ при вычислении спектра сигналов в МПС.

Теоретические основы алгоритмов обработки сигналов в МПС. Рассмотрим точность вычисления дискретного спектра сигнала в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 [3] при использовании схемы обработки входного сигнала $f(t)$, представленной на рис. 1, где блок $df(t)/dt$ осуществляет вычисление производной входного сигнала, а $S(n)$ – отсчеты спектра сигнала. Как показано в [3], алгоритм вычисления спектра сигнала в МПС определяется выражением

$$S_W(w) = \frac{1}{2\pi((1-\alpha) + \alpha w^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1-\alpha)f(t) - j\alpha w \frac{df(t)}{dt} \right] \exp(-j\omega t) dt, \quad (1)$$

где α – параметр МПС. Доказано [3, 4], что для аналоговых сигналов $f(t)$ спектр $S_W(w)$ при $\forall \alpha \in [0, 1)$ совпадает со спектром сигнала в пространстве L_2 . При дискретном представлении входного сигнала для практической реализации выражения (1) целесообразно использовать алгоритмы БПФ [5], входящие в стандартные библиотеки большинства процессоров ЦОС. Запишем выражение (1) в дискретном виде с использованием стандартной функции БПФ из библиотеки пакета MathCad [6] (функция CFFT):

$$S_W(n) = \frac{1}{1 - \alpha + \alpha(2\pi n)^2} [(1 - \alpha)\text{CFFT}(f_m) - j2\alpha\pi n \text{CFFT}(f'_m)], \quad (2)$$

где f_m, f'_m – отсчеты входного сигнала и его производной соответственно. Рассмотрим влияние каждого элемента рис. 1 на точность вычисления спектра.

Блок определения производной может быть выполнен в аналоговом виде на основе операционного усилителя [7] или с помощью линии задержки. Ва-

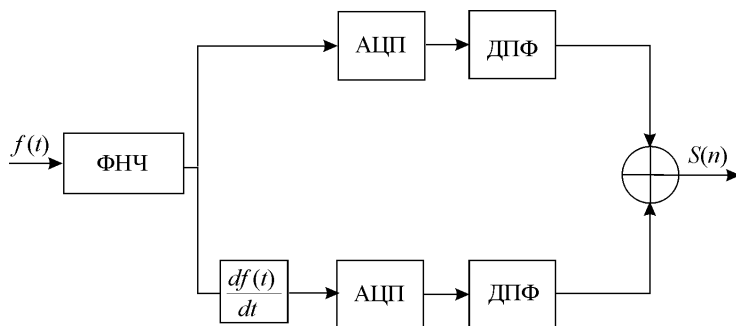


Рис. 1

рианты реализации различных цифровых алгоритмов определения отсчетов производной проанализированы в [8]. Важно отметить, что полоса частот входного сигнала должна быть ограничена, т. е. сигнал необходимо предварительно отфильтровать, чтобы он не содержал высокочастотных шумов, которые могут привести к совершенно непредсказуемому результату на выходе блока $df(t)/dt$. Это требование легко выполняется при реализации ФНЧ [9], применяемых для ограничения максимальной частоты входного сигнала.

Рассмотрим влияние на выходной результат пониженной по сравнению с частотой Котельникова f_k частоты дискретизации f_d . Как известно, в этом случае возникает эффект «наложения спектров», который при $f_k/2 < f_d < f_k$ можно описать выражением

$$S_0(n) = S(n) + \Theta(n)S(N-n), \quad \Theta(n) = \begin{cases} 0, & N-n \geq N_k/2; \\ 1, & N-n < N_k/2, \end{cases} \quad (3)$$

где N – число отсчетов функции; N_k – число отсчетов функции, требуемое согласно теореме Котельникова. Аналогично с учетом фазовых соотношений спектров сигнала и его производной определяется дискретный спектр

$$S'_0(n) = S'(n) - \Theta(n)S'(N-n), \quad (4)$$

где $S'(n)$ – отсчеты неискаженного спектра производной. Подставляя (3) и (4) в выражения для вычисления спектров в пространствах L_2 и W_2^1 , получим

$$S_L(n) = S_0(n) = S(n) + \Theta(n)S(N-n), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_W(n) &= \frac{1}{1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2} [(1-\alpha)S_0(n) - j2\alpha\pi nS'_0(n)] = \\ &= S(n) + \frac{\Theta(n)}{1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2} [(1-\alpha)S(N-n) + j2\alpha\pi nS'(N-n)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Определим ошибку, вызванную эффектом наложения спектров в пространствах L_2 и W_2^1 :

$$\Delta_L(n) = \Theta(n)S(N-n), \quad (7)$$

$$\Delta_W = \frac{\Theta(n)}{1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2} [(1-\alpha)S(N-n) + j2\alpha\pi nS'(N-n)]. \quad (8)$$

Согласно свойствам соотношения спектров сигнала и его производной [6] для спектра сигнала в диапазоне $[-\pi, \pi]$ можно записать

$$S'(n) = j2\pi nS(n), \quad (9)$$

тогда

$$\Delta_W(n) = \frac{(1-\alpha) - 4\alpha\pi^2 n(N-n)}{1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2} \Theta(n)S(N-n) = \delta(n)\Theta(n)S(N-n). \quad (10)$$

Из анализа выражений (7) и (10) следует, что отношение ошибок в пространствах L_2 и W_2^1 определяется коэффициентом

$$\delta(n) = \frac{\Delta_W(n)}{\Delta_L(n)} = \frac{(1-\alpha) - 4\alpha\pi^2 n(N-n)}{1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2} = 1 - \frac{4\pi^2 nN}{1/\alpha - 1 + (2\pi n)^2}. \quad (11)$$

Коэффициент $\delta(n)$ показывает, во сколько раз ошибка вычисления спектра в МПС больше (или меньше при $\delta(n) < 1$), чем аналогичная ошибка в пространстве L_2 . При проектировании системы обработки для минимизации ошибки вычисления спектра необходимо выбирать такое α_{opt} , при котором средний квадрат коэффициента $\delta(n)$ на интервале существования окна (3) будет наименьшим, т. е.

$$\varepsilon_F^2 = \frac{2}{N_k - N} \sum_{n=N-N_k/2}^{N/2} |\delta(n)|^2 = \min, \quad (12)$$

где границы изменения n определены исходя из выражения для окна $\Theta(n)$ (3). При этом следует учитывать, что использование предлагаемого алгоритма (2) целесообразно, если $\varepsilon_F^2 < 1$. Для оценки значения α_{opt} возьмем производную по α в выражении (12) и приравняем ее к нулю. В результате получим итоговое уравнение для определения α_{opt} , зависящее как от частоты Котельникова f_k через число отсчетов N_k , так и от частоты дискретизации сигнала f_d через число отсчетов N :

$$2\pi^2 N \sum_{n=N-N_k/2}^{N/2} \frac{n^2}{(A-1+(2\pi n)^2)^3} = \sum_{n=N-N_k/2}^{N/2} \frac{n}{(A-1+(2\pi n)^2)^2}, \quad (13)$$

где $A = 1/\alpha_{\text{opt}}$. Зависимость величины ε_F^2 от параметров α и N при $N_k = 1000$ приведена на рис. 2. Можно показать, что вид графика не зависит от конкретного значения N_k . Как следует из рисунка, при выборе оптимального значения α_{opt} для конкретного значения N возможно существенное снижение ошибки, определяемой пониженной частотой дискретизации в случае выполнения условия $f_k/2 < f_d < f_k$. Так, при $\alpha = 10^{-7}$ и $N = 800$ получим $\varepsilon_F^2 = 0,05$, т. е. ошибка вычисления спектра сигнала в МПС будет в 20 раз меньше, чем аналогичная ошибка в пространстве L_2 . Снижение ошибки вычисления спектра обеспечивается увеличением общего числа отсчетов в системе обработки $2N = 1600$, при этом требуемая скорость обработки в результате распараллеливания операций уменьшается.

Таким образом, проведенные исследования показывают теоретическую возможность снижения ошибки вычисления спектра, обусловленной пониженной частотой дискретизации как в канале сигнала, так и в канале производной.

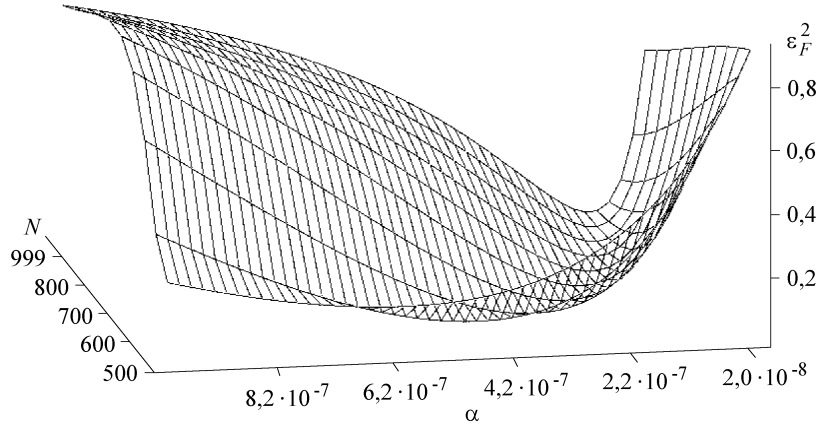


Рис. 2

Современные процессоры ЦОС позволяют производить вычисления с высокой точностью для чисел с плавающей точкой, однако существующие АЦП имеют ограниченную разрядность квантования (обычно 10–16 разрядов), что порождает шумы квантования. Проанализируем влияние на конечный результат шумов квантования при использовании предложенного алгоритма (2). Спектр сигнала в МПС на выходе преобразователя в соответствии с (2) и в силу аддитивности ошибок квантования будет иметь вид

$$S_0(n) = \frac{1}{1 - \alpha + \alpha (2\pi n)^2} [(1 - \alpha)(S(n) + \chi_1(n)) - j2\alpha\pi n(S'(n) + \chi_2(n))], \quad (14)$$

где $\chi_1(n), \chi_2(n)$ – отсчеты спектров реализаций шумов квантования в каналах сигнала и производной соответственно, или

$$S_0(n) = S(n) + \frac{1}{1 - \alpha + \alpha (2\pi n)^2} [(1 - \alpha)\chi_1(n) - j2\alpha\pi n\chi_2(n)]. \quad (15)$$

Обычно полагают [2], что шумы квантования имеют равномерный закон распределения, а их соседние отсчеты не коррелированы. Из (15), учитывая свойство некоррелированности шумов, получим выражение для среднеквадратической ошибки (СКО) вычисления спектра, обусловленной наличием шумов квантования:

$$\begin{aligned} \varepsilon_D^2 &= \overline{\sum_{n=0}^{N-1} (S(n) - S_0(n))^2} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1 - \alpha)^2 D_{\chi_1} - 4\alpha\pi n(1 - \alpha) \overline{\chi_1(n)\chi_2(n)} + (2\alpha\pi n)^2 D_{\chi_2}}{[1 - \alpha + \alpha (2\pi n)^2]^2} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)^2 D_{\chi_1} + (2\alpha\pi n)^2 D_{\chi_2}}{[1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2]^2}, \quad (16)$$

где D_{χ_1}, D_{χ_2} – дисперсии шумов в каналах сигнала и производной соответственно. Следует учитывать, что на вход системы квантования приходят отсчеты производной, помноженные на постоянный коэффициент K , обеспечивающий полное использование динамического диапазона АЦП. Тогда при условии $D_{\chi_1} = D_{\chi_2} = D_{\chi}$ выражение для СКО имеет вид

$$\varepsilon_D^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)^2 + (2\pi n\alpha/K)^2}{[1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2]^2} D_{\chi}. \quad (17)$$

Таким образом, основным отличием между пространствами W_2^1 и L_2 с точки зрения устойчивости к шумам квантования является наличие множителя перед дисперсией шума D_{χ} . При проектировании системы обработки необходимо выбрать значения α и K так, чтобы данный множитель был меньше 1, и в этом случае ошибка в МПС будет меньше, чем в пространстве L_2 . Вычисляя производную по α и приравнявая ее к нулю, получим уравнение, решением которого является оптимальное по критерию минимума дисперсии шумов квантования на выходе значение α_{opt0} :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(2\pi n\alpha/K)^2 + \alpha^2 - \alpha}{\alpha(1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2)^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{[(2\pi n)^2 - 1][(1-\alpha)^2 + (2\pi n\alpha/K)^2]}{(1-\alpha + \alpha(2\pi n)^2)^3}. \quad (18)$$

Выбор конкретного значения коэффициента преобразования α индивидуален для каждой системы обработки. Все зависит от того, какие требования предъявлены к системе обработки: минимизация ошибки дискретизации или снижение шумов квантования. Зависимости ошибки ε_D^2 вычисления спектра от значений α и N при $N_k = 1000$ и $D_{\chi} = 1$ приведены на рис. 3. Как следует из рисунка, существует оптимальное значение α , минимизирую-

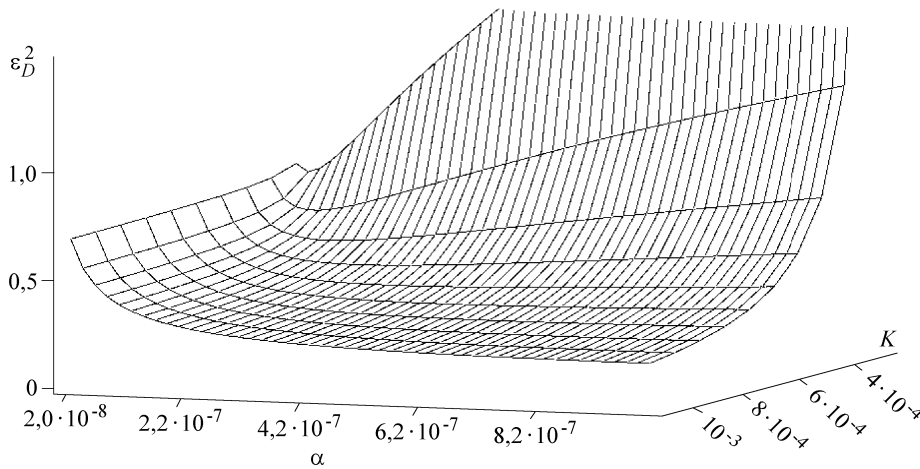


Рис. 3

щее ошибку вычисления спектра для каждого значения частоты дискретизации. Так, при $K = 4 \cdot 10^{-4}$ значение $\alpha_{\text{opt0}} = 2 \cdot 10^{-7}$, что соответствует СКО вычисления спектра в пространстве W_2^1 , равной 0,4 при дисперсии шума $D_\chi = 1$. При анализе зависимости, приведенной на рис. 3, следует учитывать, что значение аналогичной ошибки в пространстве L_2 равно 1. Уменьшение ошибки вычисления спектра, вызванной шумами квантования, объясняется как некоррелированностью, так и меньшим весом этих шумов в каналах сигнала и производной.

Таким образом, основываясь на выражениях (15) и (17), а также на результатах анализа рис. 3, можно утверждать, что применение предложенного алгоритма вычисления спектра сигнала (2) теоретически позволяет снизить ошибку, обусловленную шумами квантования в системе ЦОС.

Результаты имитационного моделирования. Рассмотрим применение алгоритма вычисления спектра в пространстве W_2^1 (2) для сложного сигнала в виде суммы 20 синусоид:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{20} A_i \cos(50\pi i t + \varphi_i), \quad (19)$$

на интервале времени $t \in [-0,5, 0,5]$, где A_i и φ_i – амплитуда и фаза i -й синусоиды соответственно. Такое представление ограниченного по частоте сигнала можно считать наиболее общим, так как само преобразование Фурье – это сумма синусоид, и любой обрабатываемый сигнал можно представить в таком виде. Для сигнала, описываемого выражением (19), число отсчетов, требуемых согласно теореме Котельникова на интервале исследования $t \in [-0,5, 0,5]$, $N_k = 1000$. Вычислим зависимости ошибок при уменьшении частоты дискретизации относительно частоты Котельникова ε_F^2 и шумов квантования ε_D^2 при разных α .

Характерные зависимости нормированного к мощности сигнала среднего квадрата ошибки

$$\Delta_W = \sum_n |S(n) - S_W(n)|^2 / \sum_n |S(n)|^2$$

вычисления спектра в пространствах L_2 и W_2^1 при различных значениях α от числа отсчетов N сигнала (19) на интервале $t \in [-0,5, 0,5]$ при $A_i = 1/\sqrt{i}$ и $\varphi_i = 0$ приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что применение алгоритма (2) позволяет снизить значение Δ_W в пространстве W_2^1 по сравнению с аналогичным алгоритмом в пространстве L_2 более чем в 10 раз. Так, при $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ и снижении частоты дискретизации на 25 % (с 1000 отсчетов на интервале исследования до 750) Δ_W в пространстве L_2 составляет около 10 %, в то время как в пространстве W_2^1 – менее 1 %. При 1 % заданной ошибки вычисления спектра и применении алгоритма (2) возможно снижение количества отсчетов в каждом канале с 950 в пространстве L_2 до 600 в пространстве W_2^1 . Тогда число требуемых операций комплексного умножения P в канале

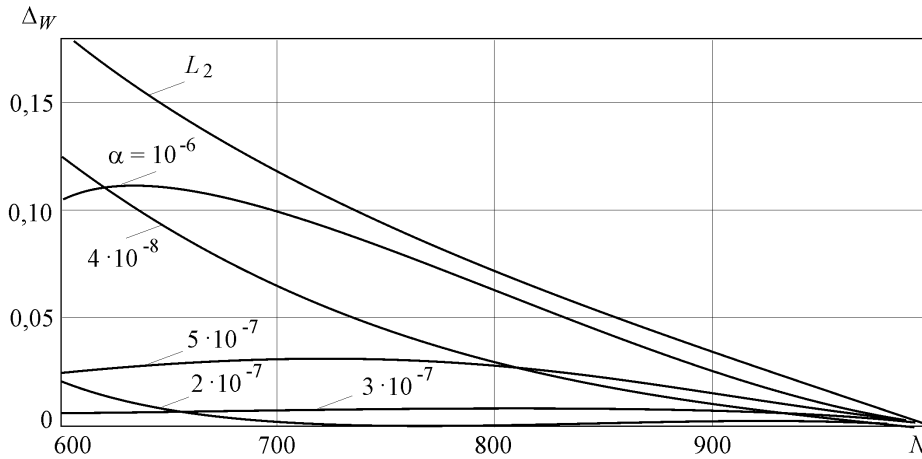


Рис. 4

уменьшается согласно формуле $P \log_2 P$ [10] с 9397 до 5537, т. е. вычисления производятся почти в 2 раза быстрее.

Проанализируем СКО вычисления спектра, обусловленную снижением разрядности квантования. Исходя из условия эффективного использования динамического диапазона АЦП, для рассматриваемого выше сигнала зададим значение $K = 1,5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 5 приведены зависимости отношения $M = \varepsilon_{DL}^2 / \varepsilon_{DW}^2$ СКО ε_{DL}^2 вычисления спектра в пространстве L_2 к СКО ε_{DW}^2 в пространстве W_2^1 при различных значениях α от числа уровней квантования N_{kv} АЦП. Из рисунка видно, что применение алгоритма (2) позволяет снизить до 15 % СКО, обусловленную шумами квантования на выходе системы обработки. Так, при $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ (значении, минимизирующем СКО $\Delta_W(n)$ вычисления спектра при пониженной частоте дискретизации) СКО в пространстве W_2^1 увеличивается на 30 % по сравнению с алгоритмом вычисления спектра в пространстве L_2 . В то же время при $\alpha = 4 \cdot 10^{-8}$ СКО в МПС снижается по отношению к СКО в пространстве L_2 на 10–15 % (уровень снижения зависит от разрядности квантования).

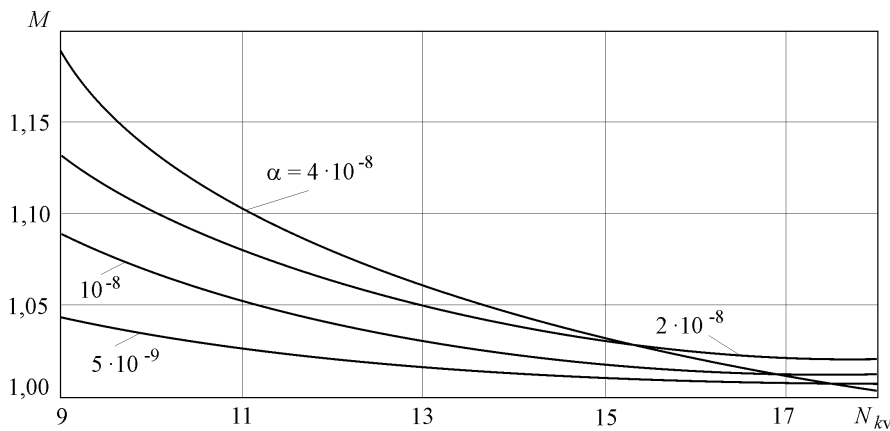


Рис. 5

Заключение. Рассмотрен алгоритм вычисления спектра сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1 на основе быстрого преобразования Фурье. При этом предлагается дополнительное использование отсчетов производной и распараллеливание операций вычисления спектра сигнала. Показано, что предложенный алгоритм позволяет снизить частоту дискретизации сигнала в каждом канале обработки и соответственно примерно в 2 раза повысить скорость обработки. При оптимальном выборе параметра преобразования α и коэффициента K данный алгоритм также позволяет снизить на 5–15 % влияние шумов квантования на точность вычисления спектра сигнала. Заметим, что результаты проведенных исследований не противоречат теореме Котельникова с точки зрения количества используемой информации об обрабатываемом сигнале. Ключевым моментом предложенной системы обработки является перераспределение данной информации между двумя каналами, что и позволяет снизить частоту дискретизации в каждом из них. Наиболее перспективным направлением применения предложенного алгоритма является цифровая обработка телеметрической информации, в состав которой часто входит информация о производной исследуемого сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голд Б., Рэйдер Ч.** Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.
2. **Рабинер Л., Голд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
3. **Кириллов С. Н., Бузыкканов С. Н.** Алгоритм дискретного спектрального анализа сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 88.
4. **Кириллов С. Н., Бузыкканов С. Н.** Оценка спектральной плотности мощности сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2002. **45**, № 12. С. 46.
5. **Солонина А., Улахович Д., Яковлев Л.** Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2002.
6. **Дьяконов В.** Mathcad 8/2000. Специальный справочник. С.-Пб.: Питер, 2000.
7. **Пейтон А. Дж., Волш В.** Аналоговая электроника на операционных усилителях. М.: БИНОМ, 1994.
8. **Бахурин С. А., Дмитриев В. Т.** Исследование точности алгоритмов оценки отсчетов производной в радиотехнических устройствах // Вестн. РГРТА. 2003. № 13. С.32.
9. **Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д., Иванова В. Е. и др.** Техническое обеспечение цифровой обработки сигналов. С.-Пб.: Наука и техника, 2000.
10. **Блейхут Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 17 марта 2005 г.