

**ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ,
ЭЛЕМЕНТЫ И СИСТЕМЫ**

УДК 004.922

**ОПИСАНИЕ ВИЗУАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА
В МОДЕЛЯХ КЛЕЙНА И ПУАНКАРЕ**

А. М. Ковалев

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск

E-mail: kovalev@iae.nsk.su

Найдены соотношения между расстояниями в различных пространствах: евклидовом, визуальном, на моделях Клейна и Пуанкаре. Показаны типовые поверхности в глобальной структуре изотропного визуального пространства. Рассмотрены функции воспринимаемых расстояний при оценке дальности и размеров предметов. Обсуждаются вопросы анизотропии визуального пространства.

Введение. Множество экспериментальных фактов свидетельствует о том, что визуальное пространство (ВП), возникающее в сознании человека при восприятии окружающего мира, – это гиперболическое пространство Лобачевского – Римана [1]. В работах [2, 3] на основе опытных данных получена функция проективного преобразования, которая переводит евклидово пространство в модель пространства Лобачевского по Клейну [4]. Модель занимает внутренность шара, радиус которого является личностной константой наблюдателя и определяет кривизну пространства. В отличие от функции отображения Луненбурга для бинокулярного восприятия [5] найденная функция преобразования соответствует монокулярному зрению. В работе [2] показано, что предложенная модель удовлетворяет психофизическому закону Эммерта, учитывает редуцированную модель аккомодирующего глаза, а также принимает во внимание вращательные движения глаза и головы наблюдателя.

В данной работе рассматриваются свойства ВП на моделях Клейна и Пуанкаре, обсуждается соответствие модели ВП известным функциям воспринимаемых расстояний, показывается возможная коррекция модели для решения проблемы «иллюзии луны» [6].

Визуальное пространство. На рис. 1 показана схема формирования ВП – конечного продукта последовательности трех процессов: физического, физиологического и когнитивного. Первый процесс в соответствии с закона-

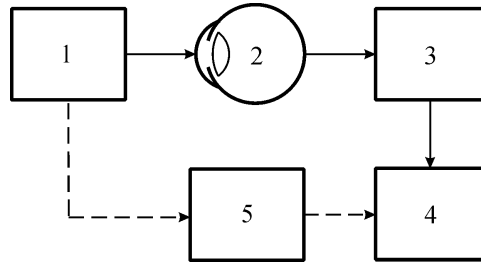


Рис. 1

ми оптики формирует изображение предметов окружающего мира 1 на сетчатке глаза сенсорной системы 2. Слой фоторецепторов (колбочки, палочки) генерирует возбуждение, которое по нервным волокнам передается в зрительные отделы коры головного мозга. Это процесс физиологический. Мозг на основе поступившей информации и прошлого опыта порождает проективное отображение окружающего мира 3, а затем хорошо структурированное визуальное пространство 4, которое содержит отдельные предметы (перцепты), фон и внутреннее «Я» наблюдателя [1]. Когнитивный процесс является психофизическим и управляется своими собственными законами. При построении математических моделей 5 считается, что физическое пространство является евклидовым. Проективное преобразование выполняется с помощью дробно-линейной функции, что обеспечивает сохранение основного инварианта проективной геометрии – двойного отношения четырех точек прямой. Константы дробно-линейной функции являются для каждого наблюдателя личностными и определяются опытным путем. В работе [2] показано, что такое проективное преобразование отображает евклидово пространство на пространство модели Клейна. От модели Клейна легко перейти (например, с помощью стереографической проекции [4]) к модели Пуанкаре – конформному отображению ВП. И наконец, от моделей Клейна и Пуанкаре осуществляется переход к гиперболическому пространству Лобачевского – Римана – визуальному пространству.

Будем считать, что полная гауссова кривизна пространства $K = 1/(ic)^2$, где ic – мнимый радиус. ВП – метрическое пространство, которое локально евклидово. Несмотря на «мнимость» координатных поверхностей, расстояние между двумя точками вдоль прямой, или геодезической, является действительной величиной.

Длины отрезков прямых. Найдем соотношения между расстояниями в разных пространствах и моделях. В таблице и на рис. 2 даны обозначения

Пространство, модель	Радиус-вектор точки	Декартовы координаты	Полярные координаты
Евклида	E	x, y, z	e, θ, φ
Клейна	Q	x_q, y_q, z_q	q, θ_q, φ_q
Пуанкаре	P	x_p, y_p, z_p	p, θ_p, φ_p
Лобачевского – Римана	LR	–	$\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho$

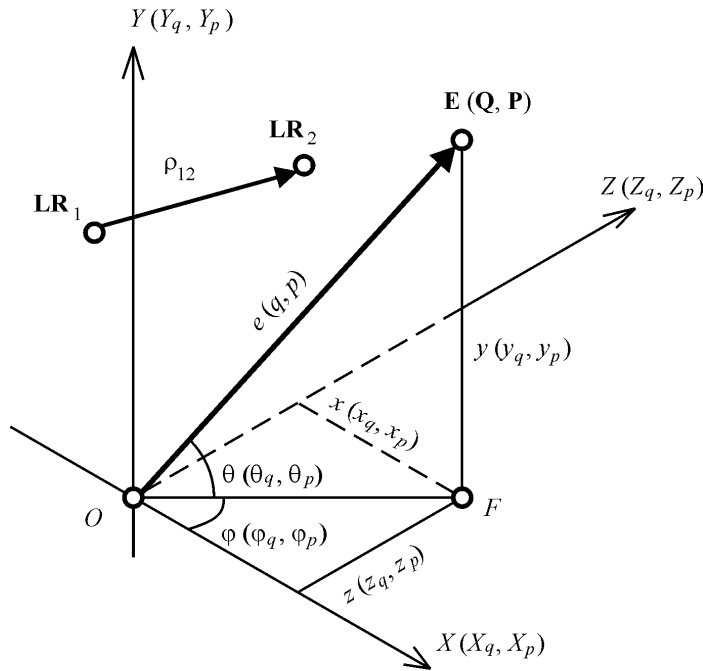


Рис. 2

систем координат и задание точек в декартовых и полярных координатах. Считаем, что оптический центр глаза – центр проекции – совпадает с началом систем координат O во всех пространствах и моделях.

Проективное преобразование евклидова пространства в пространство модели Клейна из [2] имеет вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \frac{c}{e + d}, \quad (1)$$

где $e = |\mathbf{E}|$ – длина вектора \mathbf{E} , или радиальное расстояние от начала координат до точки; d – личностная константа наблюдателя, равная гиперфокальному расстоянию зрительной сенсорной системы; $c = e_0 + d$ – радиус кривизны (e_0 – радиус «картинной» сферы). Будем считать, что e_0 совпадает с радиусом сетчатки глаза, $e_0 \ll d$. В полярной системе координат преобразование (1) имеет вид

$$q = \frac{ec}{e + d}; \quad \theta_q = \theta; \quad \varphi_q = \varphi. \quad (2)$$

При $e \rightarrow \infty$ $q \rightarrow c$, и таким образом пространство на модели Клейна занимает внутренность шара с радиусом $c \approx d$.

От модели Клейна можно перейти к модели Пуанкаре преобразованием вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (q/c)^2}}. \quad (3)$$

В полярной системе координат

$$p = \frac{2q}{1 + \sqrt{1 - (q/c)^2}}; \quad \theta_p = \theta_q; \quad \varphi_p = \varphi_q. \quad (4)$$

При $e \rightarrow \infty$ $q \rightarrow c$, $p \rightarrow 2c$, и таким образом пространство на модели Пуанкаре занимает внутренность шара с радиусом $2c$.

От моделей Клейна и Пуанкаре можно перейти к гиперболическому пространству Лобачевского – Римана [1, 2, 7]

$$\rho = c \operatorname{arth}(q/c) = 2c \operatorname{arth}(p/2c) = \frac{c}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{e}{d} \right), \quad (5)$$

$$\theta_p = \theta_q = \theta_p = \theta, \quad \varphi_p = \varphi_q = \varphi_p = \varphi.$$

Формулы (2), (4), (5) определяют расстояние до точки вдоль радиального направления от начала координат. Этого достаточно для построения и исследования пространственного образа трехмерной сцены. Но иногда желательно определить расстояния между точками (например, \mathbf{LR}_1 и \mathbf{LR}_2 (см. рис. 2)), которые не лежат на радиальной прямой. В этом случае при переходе от модели Клейна к ВП (вывод формулы опущен)

$$\rho_{12} = c \operatorname{arch} \left(\frac{q_{12}^2 + J_1^2 + J_2^2}{2J_1 J_2} \right), \quad (6)$$

где $q_{12} = |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2|$ – евклидово расстояние между точками; $J_1 = \sqrt{c^2 - q_1^2}$; $J_2 = \sqrt{c^2 - q_2^2}$; q_1, q_2 – радиальные расстояния из (2). При переходе от модели Пуанкаре к ВП

$$\rho_{12} = 2c \operatorname{arsh} \left(\frac{p_{12}}{2c G_1 G_2} \right), \quad (7)$$

где $p_{12} = |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2|$ – евклидова длина хорды некоторой геодезической, которая проходит через заданные точки; $G_1 = \sqrt{1 - (p_1/2c)^2}$; $G_2 = \sqrt{1 - (p_2/2c)^2}$; p_1, p_2 – радиальные расстояния из (4). Формула (7) получена Луненбургом [5].

Поверхности ВП на моделях Клейна и Пуанкаре. На рис. 3 показаны меридиональные сечения некоторых типовых поверхностей ВП на моделях Клейна (*a*) и Пуанкаре (*b*), построенных с использованием формул (1)–(4). Гиперфокальное расстояние $d \approx 6$ м. Уровень глаз относительно земли равен 1,5 м.

Предельная сфера 1, именуемая орисферой, определяет небосвод, на котором располагаются «бесконечно» удаленные звезды, планеты, солнце и луна. Сферическая относительно центра Земли поверхность 2 на высоте 200 м от земной поверхности имитирует низкий облачный покров.

Гиперболические плоскости 3 (гиперплоскости), параллельные на модели Клейна (см. рис. 3, *a*) координатной плоскости $X_q O Z_q$, на модели Пуанка-

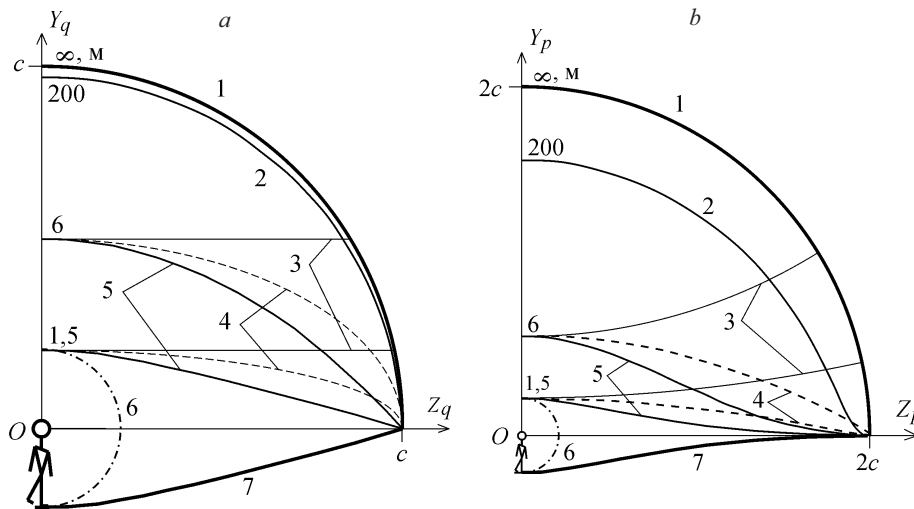


Рис. 3

ре (см. рис. 3, *b*) представляются в виде сегментов сфер 3, перпендикулярных, с одной стороны, плоскости $X_p O Y_p$, и, с другой стороны, орисфере 1. (Заметим, что ВП образуется путем вращения показанных сечений вокруг вертикальных осей OY .)

Другой тип специфических поверхностей – это эквидистантные, или гиперциклические поверхности 4. Эквидистанта – это линия равных расстояний от прямой (например, от оси OZ_p). На модели Клейна она изображается в виде эллипса. Поверхность, эквидистантная плоскости (например, $X_q O Z_q$), – это равномерно сжатая к этой плоскости сфера, т. е. сфероид. На модели Пуанкаре эти поверхности представляются также в виде сегментов сфер 4, но в отличие от плоскостей 3 они не перпендикулярны орисфере 1. В сагиттальных сечениях, проходящих через начало O , прямые, подобные 3, называют параллельными аллеями (P-alley), а эквидистанты 4 – дистантными аллеями (D-alley) [1].

Рассмотрим, как отображаются на моделях евклидовы плоскости 5, параллельные координатной плоскости XOZ . Земная поверхность 7 также относится к этой группе. Легко показать, что если ордината евклидовой плоскости $y < d$, то плоскость изображается на модели Клейна в виде гиперboloида вращения; при $y = d$ – это параболоид и при $y > d$ – сфероид со сдвинутым центром относительно начала координат O . При $y \rightarrow \infty$ сфероид устремляется к орисфере 1. Все плоскости 5 и 7 на горизонте сходятся к предельной окружности или орициклу. На модели Пуанкаре евклидовы плоскости 5 конформно отображаются в виде сложных поверхностей с перегибом. Очевидно, что плоскости 5 параллельны координатной плоскости не только на малых, но и на больших расстояниях. Об этом можно судить по углу между касательной к изображению плоскости 5 и координатной плоскостью $X_p O Z_p$. По аналогии с параллельными и дистантными аллеями кривые 5 в сагиттальных сечениях можно назвать евклидовыми аллеями (E-alley). Эти аллеи из модели Клейна могут наблюдаться каждым человеком, идущим вдоль длинного тротуара, коридора или железнодорожного пути.

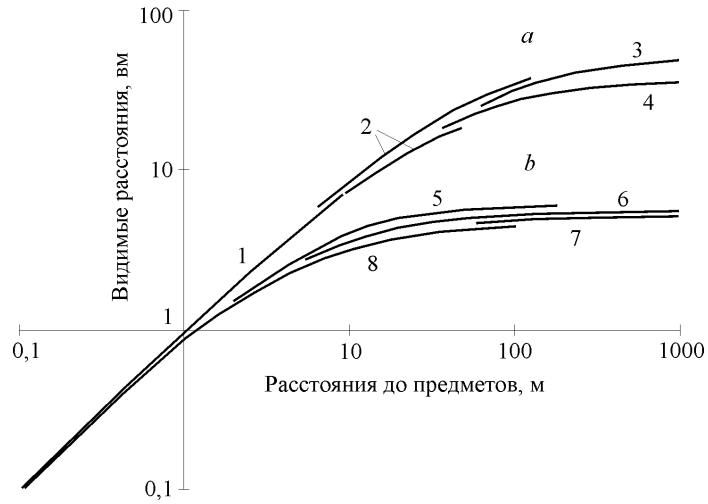


Рис. 4

Последний вид рассматриваемых поверхностей – это сферы с центром в начале координат O . Евклидовы сферы остаются сферами и на модели Клейна, и на модели Пуанкаре. Изменяется только радиус сфер согласно (2) и (4).

Функции воспринимаемых расстояний. В зависимости от начальной установки или поставленной задачи расстояние до предметов наблюдателем оценивается по-разному. На рис. 4 показана функция воспринимаемых расстояний в видимых метрах (вм) при оценке дальности предметов (a) (функцию получили: 1 – Жилинская (1951), 2 – Курода (1971), 3 – Тэйчнер (1955), 4 – Кауфман (2000)) и такая же функция при оценке размеров предметов (b) (5 – Раушенбах (1986), 6 – Кауфман (2000), 7 – Энрайт (1989), 8 – Ковалев (2003)). Графики 1–3 первой функции взяты из работы [1, Р. 125, Fig. 4.12], и эту функцию называют функцией Жилинской [8]:

$$\text{gil}(e) = \frac{eD}{e + D}, \quad (8)$$

где e – радиальное евклидово расстояние до предмета; D – личностная константа, варьирующая от 29 до 53 м. Функция обладает свойством $\text{gil}(\infty) = D$ и $\text{gil}(D) = D/2$. Таким образом, бисекция (деление пополам) видимого расстояния между наблюдателем и предметом на «бесконечности» позволяет измерить константу D . (Справедливости ради надо заметить, что впервые функцию такого вида для оценки кажущихся расстояний получил немецкий ученый фон Штернек в 1907 г. [9].)

Вторая функция – это рассмотренное выше преобразование (2). Пусть для простоты рассуждений $c = d$ (основания для этого приведены в пояснениях к формуле (1)), тогда

$$q(e) = \frac{ed}{e + d}, \quad (9)$$

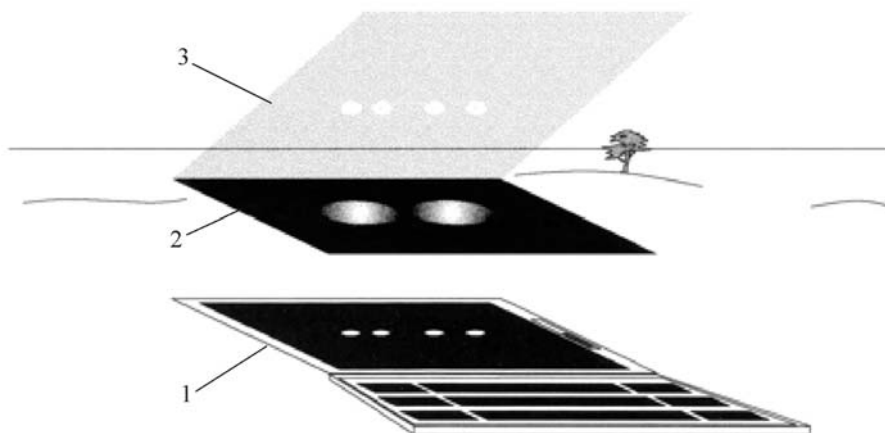


Рис. 5

где e – то же самое радиальное расстояние до предмета; d – личностная константа, варьирующая от 3 до 6 м [2, 3]. Точно так же $q(\infty) = d$, $q(d) = d/2$. Но теперь уменьшение вдвое размера предмета, видимого на «бесконечности», приводит к бисекции видимого расстояния, что позволяет измерить константу d и оценить радиус кривизны c .

Таким образом, обе функции имеют один и тот же вид и различаются на первый взгляд только константами. Более глубокое отличие заключено в том, что функция (8) принадлежит бинокулярному зрению и конвергенции глаз, а функция (9) – монокулярному зрению и аккомодации. Отсюда разница в величинах констант. Отношение диаметра зрачка глаза к половине глазной базы (расстояние между оптическими центрами левого и правого глаза) определяет отношение $d/D \approx 1/10$. Функция (9), связанная с фокусировкой взгляда [3], обеспечивает по закону Эммерта пропорциональность видимых размеров и удалений предметов, а функция (8) – нет. Правомерность этого вывода можно подтвердить результатами экспериментов с искусственными лунами [10].

Эксперименты Кауфманов. На рис. 5 показана схема стереоскопической установки, взятая из работы [10, Fig. 2]. Плоский дисплей 1 мобильного компьютера смонтирован в каркасе высотой 38,3 см горизонтально и параллельно панели 2 с двумя отверстиями, расстояние между центрами которых равно 64 мм. В каждое отверстие помещена линза с фокусным расстоянием 38,3 см. Полупрозрачное зеркало 3 размером 40×40 см под контролируемым углом монтируется над линзами так, чтобы наблюдатели видели виртуальное изображение «лун» диаметром $0,52^\circ$. Две луны над каждой из линз дают четыре виртуальных изображения на оптической бесконечности или две стереопары. Наблюдатели, смотрящие через зеркало, фузируют (совмещают) стереопары и видят две луны в небе на фоне реального ландшафтного окружения. Проведено два типа экспериментов с искусственными лунами: 1) на половину дистанции до луны и 2) на половину размера луны. Эти эксперименты проводились при двух угловых положениях полупрозрачного зеркала, обеспечивающего возвышение лун над горизонтом: $\theta_1 = 1,5^\circ$ и $\theta_2 = 45^\circ$.

Вначале устанавливают нулевую конвергенцию и диспаратность для обеих лун. Затем одну луну оставляют неподвижной на бесконечности и принимают в качестве образцовой, а вторую луну приближают к наблюдателю

увеличением ее диспаратности с шагом 2 угл. мин на каждое нажатие клавиши на мобильном компьютере. Когда подвижная луна визуально достигает половины дальности или половины размера от неподвижной луны, это состояние фиксируют нажатием другой клавиши. По полученной диспаратности и средней глазной базе, равной 64 мм, компьютер рассчитывает евклидово расстояние до подвижной луны D или d в зависимости от типа эксперимента.

Результаты экспериментов при возвышении лун $\theta_1 = 1,5^\circ$ поясняются рис. 6, где A – неподвижная луна на бесконечности, B – подвижная луна на половине дистанции, C – подвижная луна половинного размера. В эксперименте на половину дистанции луна движется по траектории 1, определяемой функцией (8). Половина дистанции достигается при среднем значении $D = 36,17$ м, что лежит в диапазоне констант этого рода (29–53 м). Диаметр луны B на половине дистанции уменьшается в среднем лишь на $\approx 13\%$. Отсюда следует, что функция (8) не удовлетворяет закону Эммерта. Величина луны определяется функцией (9), реализуемой в эксперименте на половину размера, когда луна движется по траектории 2. Половинный размер луны C достигается в согласии с законом Эммерта на расстоянии $d/2$ при среднем значении $d(\theta_1) = 5,47$ м, что соответствует диапазону гиперфокальных расстояний зрительной сенсорной системы (3–6 м).

Следует отметить, что в [2, 3] величина константы d определялась при помощи монокулярного зрения. В эксперименте [10] при измерении d использовалось бинокулярное зрение. Получены одинаковые результаты, что подтверждает хорошо известный факт связи и взаимной индукции процессов конвергенции и аккомодации глаз. В описанном эксперименте аккомодация вызывалась конвергенцией. Таким образом, во-первых, воспринимаемые размеры предметов определяются монокулярным механизмом зрительного восприятия через закон Эммерта. Во-вторых, предложенная модель визуального пространства при небольших углах конвергенции пригодна также и для бинокулярного зрения.

Предельные кривые в меридиональной плоскости на моделях ВП. На рис. 3 показаны изотропные модели ВП, из которых следует, в частности,

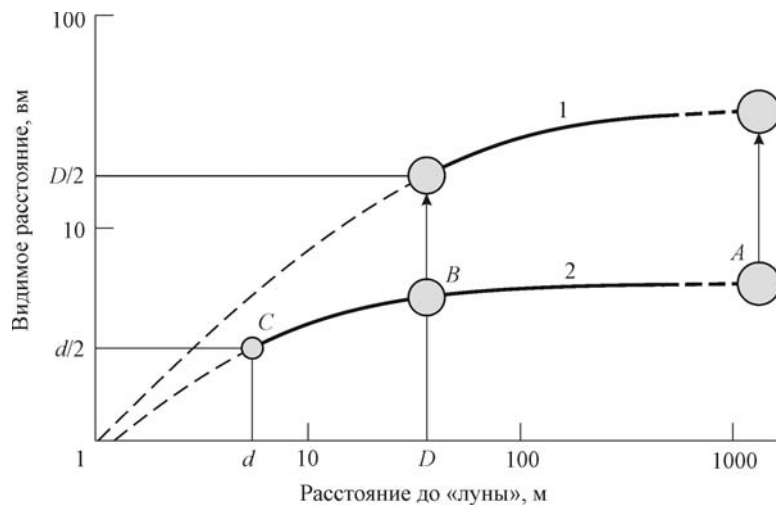


Рис. 6

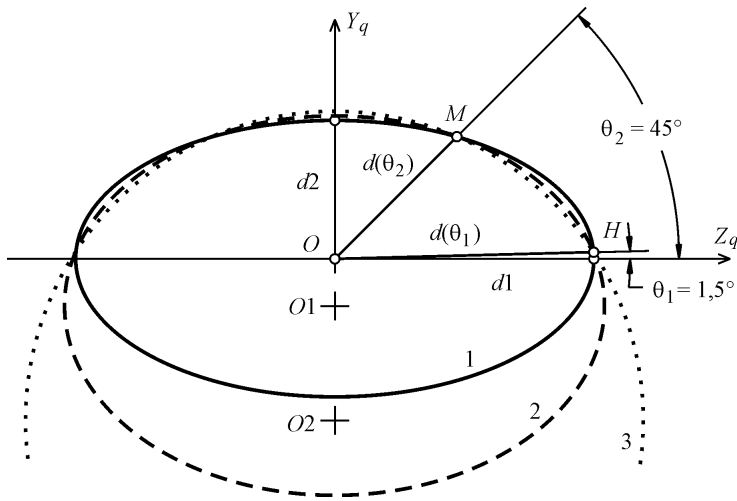


Рис. 7

что луна и солнце находятся на поверхности, близкой к предельной, и поэтому по закону Эммерта должны иметь размеры, независимые от их возвышения над горизонтом. Но в действительности это не так. Всем известно, что на восходе или закате луна и солнце имеют большие размеры, чем в средней части неба или в зените. Эксперименты [10] показали, что при $\theta_2 = 45^\circ$ среднее расстояние до предельной кривой $d(\theta_2) = 3,65$ м, что в 1,5 раза меньше, чем $d(\theta_1) = 5,47$ м, где $\theta_1 = 1,5^\circ$. Итак, имеет место анизотропия ВП по углу возвышения, или широте θ .

Определить достоверный вид предельной кривой по двум точкам невозможно. Сделаем два допущения. Первое допущение: пусть непрерывная замкнутая предельная кривая есть дифференцируемая функция $f(y_q, z_q)$ и

$df/dz_q = 0$ при $z_q = 0$. Второе допущение: пусть геометрия внутренней области кривой гиперболическая. Согласно [7] необходимо и достаточно, чтобы эта область была внутренностью некоторого эллипса. Отсюда следует, что геометрия анизотропного ВП должна быть гильбертовой.

На рис. 7 показаны некоторые предельные кривые, удовлетворяющие сделанным допущениям: 1 – эллипс с центром O , совмещенным с оптическим центром глаза; 2 – эллипс со смещенным центром $O1$; 3 – окружность со смещенным центром $O2$. На рис. 8 даны функции увеличения V размеров луны или солнца от угла возвышения θ для предельных поверхностей, полу-

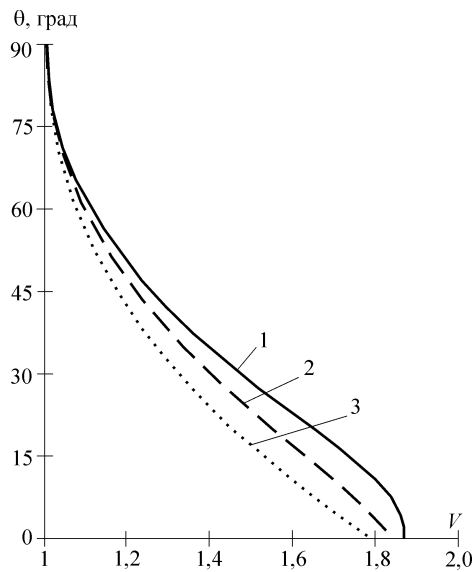


Рис. 8

ченных вращением предельных кривых 1–3 (см. рис. 7) вокруг оси OY_q . Увеличение на горизонте (1 – сфероид, 2 – смещенный сфероид, 3 – смещенная сфера), рассчитанное по данным экспериментов [10], в среднем составляет $V \approx 1,8$.

Заключение. В работе определены аналитические зависимости между расстояниями в евклидовом и визуальном пространствах и расстояниями на моделях Клейна и Пуанкаре. Показаны типовые поверхности в глобальной структуре изотропного визуального пространства. Рассмотрены функции воспринимаемых расстояний при оценке дальности и размеров предметов на соответствие закону Эммерта. Дана интерпретация экспериментов [10] с искусственными лунами. Затронуты вопросы анизотропии визуального пространства и решения проблемы «иллюзии луны».

Причины анизотропии остаются неизвестными. Можно только предполагать, что это – миопия пустого пространства, созвучная идеям Птолемея [6]. Необходимость коррекции моделей визуального пространства несомненна. Продолжение экспериментальных исследований с искусственными лунами представляется актуальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Indow T.** The global structure of visual space // Advanced Series of Mathematical Psychology. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2004. Vol.1
2. **Ковалев А.М.** О нелинейной модели визуального пространства // Автметрия. 2005. 41, № 5. С. 58.
3. **Ковалев А. М.** О моделях визуального пространства // Оптика и спектроскопия. 2006. 100, № 1. С. 134.
4. **Клейн Ф.** Неевклидова геометрия. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
5. **Luneburg R. K.** The metric of binocular visual space // JOSA. 1950. 40, N 10. P. 627.
6. **Borghuis B.** The Moon Illusion // <http://retina.anatomy.upenn.edu/~bart/scriptic.html/>
7. **Бузман Г., Келли П.** Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
8. **Gilinsky A. S.** Perceived size and distance in visual space // Psychological Rev. 1951. 58. P. 460.
9. **Kienle G.** Experiments concerning the non-euclidean structure of the visual space // Bioastronautics. N. Y.–L., 1964.
10. **Kaufman L., Kaufman J.H.** Explanation the moon illusion // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. 2000. 97, N 1. P. 500.

Поступила в редакцию 11 января 2006 г.