

**МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНЫ  
ПРИ РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.  
ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ\***

**Д. Л. Головашкин, Н. Л. Казанский**

*Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С. П. Королева, г. Самара  
E-mail: kazansky@smr.ru*

Предлагается численная методика формирования падающей волны для области, заключенной в неоднородную оболочку в рамках TF/SF-методики (Total-Field/Scattering-Field technique). Проведено сравнение этого подхода с традиционным аналитическим способом задания падающей волны, показаны его преимущества.

**Введение.** Совершенствование микротехнологии привело к созданию оптических элементов с субволновыми неоднородностями, что открывает новые возможности в управлении световыми полями [1]. Моделирование работы таких элементов традиционно проводится в рамках строгой теории дифракции с привлечением аппарата вычислительной электродинамики. Из всей совокупности методов решения основных уравнений электродинамики наибольшее развитие в настоящее время получил разностный метод решения уравнений Максвелла [2], характеризующийся универсальностью и простотой реализации. Высокая вычислительная сложность – единственный недостаток метода – с достижением современного уровня производительности вычислительной техники более не является серьезным препятствием широкому распространению указанного подхода к моделированию работы оптических элементов.

Появившись в середине прошлого века [3], разностный метод решения уравнений Максвелла прошел несколько стадий развития. Ранее всего были записаны разностные уравнения, обладающие высокими порядками аппроксимации исходной дифференциальной задачи по времени и пространству [4]. Десять лет назад была удовлетворительно решена проблема поглощения

\* Работа выполнена при поддержке Российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), Фонда содействия отечественной науке, грантов Президента РФ (№ НШ-1007.2003.01 и № МК- 2568.2003.09), а также Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-07-90149 и № 04-02-08094).

излучения, покидающего границы вычислительной области [5]. Задача моделирования работы источника падающей волны, поставленная еще в работе [4], решается с разной точностью до настоящего времени.

Первые способы формирования падающей волны, позволяющие ограничить вычислительную область исследуемым объектом и его ближайшей окрестностью, в рамках TF/SF-методики (Total-Field/Scattering-Field technique) опубликованы в [6]. С повышением точности данного подхода в области, заключенной в оболочку из однородной среды, связана работа [7], авторы которой предпочли задавать падающую волну численно, вместо аналитической формы, как это предлагалось в [6].

Однако при моделировании работы дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [1,8] конструирование такой оболочки приводит к многократному росту вычислительной сложности алгоритма, так как в расчетную область приходится помещать весь оптический элемент [7]. Вместе с тем на практике принято сокращать длительность моделирования, заключая в вычислительную область только микрорельеф ДОЭ и ограничивая область вакуумом с одной стороны и подложкой ДОЭ с другой [9, 10]. Это позволяет не только производить моделирование работы элемента за приемлемое время, но и решать задачу синтеза ДОЭ в рамках строгой электромагнитной теории [11, 12].

Данная работа посвящена распространению подхода, основанного на замене аналитического формирования падающей волны в TF/SF-методике численным при условии, что оболочка вычислительной области состоит из неоднородного материала. Рассмотрен одномерный вариант новой методики в рамках TF/SF-представления, который позволяет повысить точность вычислений по сравнению с аналитической формой TF/SF-методики [6] и снизить вычислительные затраты по сравнению с методикой из [7].

В силу того что разработанные способы формирования падающей волны являются частью методики и способствуют развитию известного TF/SF-представления, авторы сочли необходимым предварить основное изложение описанием этого представления.

**Аналитическое задание падающей волны в рамках TF/SF-методики.** TF/SF-методика основывается на разделении исследуемой области на зоны результирующего и рассеянного полей (рис. 1). Падающее поле полагается известным и в изучении не нуждается. Расположение зон позволяет производить расчеты с результирующим полем внутри и в непосредственной окрестности оптического элемента. Это не приводит к ошибкам определения результирующего поля, свойственным методике PSF (Pure Scattered-Field) [2], в рамках которой ищется исключительно рассеянное поле. Вместе с тем

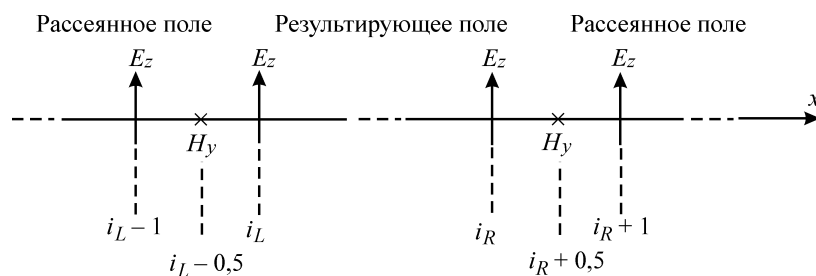


Рис. 1. Фрагмент сеточной области

области поглощения достигает только рассеянная волна, которая при исследовании большинства пропускающих оптических элементов характеризуется меньшей интенсивностью по сравнению с падающей. Следовательно, применение TF/SF-методики позволяет ограничиться более тонким поглощающим слоем [5], чем это принято в подходе TFF (Total-Field Formulation) [13], основанном на работе только с результирующей волной.

Для расчета полей во всей области применяется разностная схема Yee [4]:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_i \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{h_t} = \frac{H_{i+0,5}^{n+0,5} - H_{i-0,5}^{n+0,5}}{h_x}, \quad (1)$$

$$\mu_0 \mu_{i+0,5} \frac{H_{i+0,5}^{n+0,5} - H_{i+0,5}^{n-0,5}}{h_t} = \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{h_x}, \quad (2)$$

где сеточная функция  $E$  – проекция электрического поля на ось  $Z$ ; функция  $H$  – проекция магнитного поля на ось  $Y$  ( $X, Y, Z$  составляют декартову систему координат, в которой плоская однородная электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $X$ ). Индекс  $i$  меняется в пределах сеточной области, обозначая ее узлы по пространству, а  $n$  – по времени. Расстояния между узлами задаются пространственным ( $h_x$ ) и временным ( $h_t$ ) шагами сетки; сеточные значения диэлектрической ( $\varepsilon_i$ ) и магнитной ( $\mu_i$ ) проницаемостей полностью характеризуют изучаемый оптический элемент.

Разделение результирующего и рассеянного полей в узлах  $i_L$  и  $i_R$  (см. рис. 1) обеспечивается следующей модификацией схемы Yee [6]:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{i_L} \frac{E_{i_L}^{n+1} - E_{i_L}^n}{h_t} = \frac{H_{i_L+0,5}^{n+0,5} - (H_{i_L-0,5}^{n+0,5} + \tilde{H}_{i_L-0,5}^{n+0,5})}{h_x}, \quad (3)$$

$$\mu_0 \mu_{i_L-0,5} \frac{H_{i_L-0,5}^{n+0,5} - H_{i_L-0,5}^{n-0,5}}{h_t} = \frac{(E_{i_L}^n - \tilde{E}_{i_L}^n) - E_{i_L-1}^n}{h_x}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{i_R} \frac{E_{i_R}^{n+1} - E_{i_R}^n}{h_t} = \frac{(H_{i_R+0,5}^{n+0,5} + \tilde{H}_{i_R+0,5}^{n+0,5}) - H_{i_R-0,5}^{n+0,5}}{h_x}, \quad (5)$$

$$\mu_0 \mu_{i_R+0,5} \frac{H_{i_R+0,5}^{n+0,5} - H_{i_R+0,5}^{n-0,5}}{h_t} = \frac{E_{i_R+1}^n - (E_{i_R}^n - \tilde{E}_{i_R}^n)}{h_x}, \quad (6)$$

где знаком « $\sim$ » обозначены электрическая и магнитная напряженности падающего поля, которые в [6] задаются аналитически.

Начальное условие соответствует отсутствию поля в области к моменту  $t=0$ . На границах располагаются электрические стенки. Традиционно область заключается в поглощающие слои [5]. Однако, выделяя погрешность, вносимую излучающими условиями (3)–(6), авторы отказались от применения поглощающих слоев или других поглощающих условий, вносящих свою погрешность. При этом протяженность области выбиралась равной двойному расстоянию, пройденному волной за время экспериментов, а источник из-

лучения помещался в центральный узел сетки  $i_L$ . Узел  $i_R$  разместим на расстоянии одной длины волны (пусть  $\lambda = 1$  мкм) справа и будем изучать равномерную погрешность разностного решения в подобласти, ограниченной этими узлами. Результирующее поле формируется в данной подобласти, рассеянное – вне ее. Во всех экспериментах излучался пучок падающей волны длиной  $10\lambda$ , за время его формирования поле в выбранной подобласти можно считать устоявшимся с высокой точностью [14]. Переход в частотную область [10, 13] завершает расчет поля.

В первой серии вычислительных экспериментов определим зависимость погрешности замены производных разностными отношениями от параметров дискретизации сеточной области (табл. 1). Для этого вместо решения уравнений (3)–(6) в  $i_L$  поместим источник

$$E_{i_L}^n = \sin\left(2\pi \frac{h_t c n}{\lambda}\right) \quad (7)$$

( $c$  – скорость плоской электромагнитной волны в вакууме), не учитывающий наличия рассеянной волны (hard source [2]), которой, впрочем, в однородном вакууме не наблюдается.

Во второй серии вычислительных экспериментов, применяя представления (3)–(6) вместо (7), убедимся в значительном росте погрешностей, вызванном аналитическим заданием падающей волны (см. табл. 1).

Т а б л и ц а 1

**Зависимость погрешностей (в процентах) вычислительных экспериментов от параметров дискретизации сеточной области**

Параметры дискретизации	Номер серии экспериментов	
	1	2
10/24	0,1513	1,8401
10/52	0,1427	1,3898
10/100	0,1335	0,8940
10/200	0,1793	0,7674
25/52	0,0244	0,7552
25/100	0,0401	0,7300
25/200	0,0361	0,3180
50/100	0,0123	0,2186
50/200	0,0138	0,1418
100/200	0,0054	0,0913

**П р и м е ч а н и е.** Слева от наклонной черты (первый столбец) обозначено число узлов по пространству на одну длину волны, справа – число узлов по интервалу времени, за которое волна пройдет расстояние  $\lambda$ . Распространение происходит в вакууме.

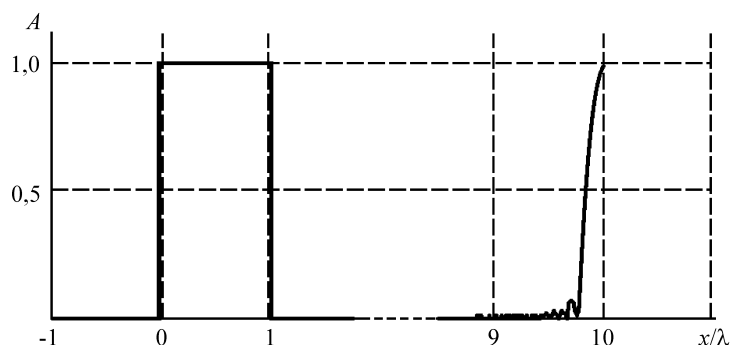


Рис. 2. Представление разностного решения для эксперимента с параметрами 100/200 из второй серии.  $A$  – модуль комплексной амплитуды напряженности электрического поля. Под-область результирующего поля находится на отрезке  $[0, 1]$  оси абсцисс, остальное поле – рассеянное

Отказ от размещения поглощающих слоев или постановки поглощающих граничных условий позволил авторам наблюдать всплеск значений модуля комплексной напряженности электрического поля в правом конце сеточной области (рис. 2). Этот эффект объясняется временной задержкой, необходимой излученной в узле  $i_L$  волне для достижения узла  $i_R$ . В течение задержки излучаемая в  $i_R$  волна распространяется по направлению  $X$ . Далее волны из этих узлов интерферируют и взаимно гасят друг друга справа от  $i_R$ . Замеченный всплеск позволяет сделать вывод о несоответствии представления (3)–(6) TF/SF-методике на начальном этапе вычислений в данном случае. Следовательно, отмеченное преимущество методики по уменьшению толщины поглощающих слоев не распространяется на (3)–(6) при аналитическом задании падающей волны.

**Численное задание падающей волны в рамках TF/SF-методики для области, ограниченной однородной средой.** Численное задание падающего поля в (3)–(6) позволяет не только повысить точность вычислений [7], сократить их длительность [2] в двумерном и трехмерном случаях, но и избежать отмеченного выше эффекта.

Одновременно с расчетом по схеме (1)–(6) (первая задача) рассмотрим вторую задачу, отличающуюся записью уравнения (7) вместо (3)–(6). Найденные во второй задаче значения электрического и магнитного полей в узлах  $i_L - 0,5; i_L; i_R$  и  $i_R + 0,5$  подставим в уравнения (3)–(6) первой задачи в качестве падающей волны. Как отмечается в [7], это приводит к автоматической компенсации численных погрешностей. По мнению авторов данной работы, компенсируются погрешности задания фазового сдвига между компонентами падающего поля в соседних узлах ( $i_L - 0,5$  и  $i_L; i_R$  и  $i_R + 0,5$ ), так как аналитическое задание амплитуды (7) в первой серии экспериментов связано с меньшими значениями погрешностей.

Действительно, вычислительные эксперименты третьей серии подтверждают высокую точность разностного решения, полученного на основе подхода, предложенного в [7]. Найденные погрешности для выбранных параметров дискретизации совпали с результатами первой серии экспериментов. Следовательно, численное задание падающей волны в (3)–(6) не внесло никаких дополнительных искажений в разностное решение.

Более того, в силу исчезновения временного интервала между началом излучения волны в узле  $i_R$  и приходом туда волны из  $i_L$  всплеска в правой части области не наблюдается.

Как уже отмечалось, приведенный прием успешен при заключении области в оболочку из однородного материала. При моделировании работы ДОЭ это условие не выполняется. Положим, что, начиная с узла  $(i_R - i_L)/2$ , правую часть области занимает однородное диэлектрическое полупространство (подложка ДОЭ) с показателем преломления 1,5. Возникает вопрос: как в этом случае формировать падающую волну в уравнениях (5), (6)?

Аналитическое задание падающей волны в (3)–(6) приводит к значительному росту погрешностей (табл. 2, результаты четвертой серии экспериментов) еще и за счет несоблюдения начального условия при новой разности фаз падающей волны между  $i_L$  и  $i_R$ . Перемещая узел  $i_R$  от границы раздела сред влево до расстояния  $\lambda/3$ , добиваемся исчезновения разности фаз и повышения точности в пятой серии вычислительных экспериментов (см. табл. 2). В изучаемом случае погрешность прошедшей волны оценивается на отрезке от границы раздела сред до  $i_R$  (в зоне результирующего поля), погрешность отраженной – от узла, отстоящего слева от  $i_L$  на одну длину волны, до  $i_L$  (в зоне рассеянного поля).

Т а б л и ц а 2

**Зависимость погрешностей (в процентах) вычислительных экспериментов от параметров дискретизации сеточной области**

Параметры дискретизации	Номер серии экспериментов							
	4		5		6		7	
	прош.	отр.	прош.	отр.	прош.	отр.	прош.	отр.
10/24	7,9612	32,8677	3,6305	39,6536	3,6540	20,6627	3,0630	19,3204
10/52	9,0401	31,0854	4,0406	36,7787	3,7346	20,7467	3,1535	19,6781
10/100	7,5689	27,9949	4,1643	34,8905	3,8594	20,8895	3,2240	18,9333
10/200	6,9937	25,2999	4,2072	32,6782	3,9052	20,9813	3,2400	19,3319
25/52	3,9482	10,6434	0,5656	9,7586	0,7039	2,8213	0,4485	2,8841
25/100	4,4093	8,4333	0,5386	6,9006	0,5655	3,1776	0,4767	3,0443
25/200	5,2462	5,8118	0,7288	5,2289	0,7874	3,0139	0,4422	2,7999
50/100	3,7263	3,6935	0,2639	2,7926	0,2549	0,7906	0,1117	0,7573
50/200	3,9258	3,7575	0,3239	1,8081	0,2964	0,8366	0,1065	0,7823
100/200	1,5870	1,9919	0,0837	0,9231	0,0872	0,2094	0,0346	0,2035

П р и м е ч а н и е. Слева от наклонной черты (первый столбец) обозначено число узлов по пространству на одну длину волны, справа – число узлов по интервалу времени, за которое волна пройдет расстояние  $\lambda$  в вакууме. Волна падает на границу раздела среда–диэлектрик. Часть волны распространяется далее в среде (прош.), часть отражается (отр.).

Комбинирование численного задания падающей волны (в узлах  $i_L - 0,5$  и  $i_L$ ) с аналитическим заданием (в узлах  $i_R$  и  $i_R + 0,5$ ) не приводит к стабильному снижению погрешностей в силу влияния аналитического задания в правых узлах на всю вычислительную область (см. табл. 2, шестая серия экспериментов).

Разность фаз между узлами  $i_L$  и  $i_R$  может учитываться принятием за падающую волну значений полей второй задачи не в  $i_R$  и  $i_R + 0,5$ , а в узлах, отстоящих от данных правее на соответствующее расстояние (скорость волны в вакууме выше скорости в диэлектрике). Однако такое представление не учитывает разность фазового сдвига в диэлектрике (первая задача) и вакууме (вторая задача) между  $i_R$  и  $i_R + 0,5$ , что обуславливает еще большее снижение точности. Внесение аналитической поправки в фазовый сдвиг соответствует случаю аналитического задания падающей волны в правых узлах ( $i_R$  и  $i_R + 0,5$ ), рассмотренному выше.

**Численное задание падающей волны в рамках TF/SF-методики для области, ограниченной неоднородной средой.** Предлагаая решение данной проблемы, авторы изучают распространение поля в однородном диэлектрике, записывая уравнение (7) вместо (3)–(6). Таким образом, значение падающей волны для первой задачи (падение на границу раздела вакуум–диэлектрик, уравнения (3)–(6)) подставляется в уравнения (3), (4) из второй задачи (распространение в свободном пространстве, уравнение (7)), и в уравнения (5), (6) из третьей задачи (распространение в однородном диэлектрике, уравнение (7)). При этом для учета расстояния, которое волна в первой задаче пробегает до границы раздела сред, значения падающего поля выбираются из третьей задачи не в узлах  $i_R$  и  $i_R + 0,5$ , а с соответствующим сдвигом влево.

В результате численно, а не аналитически учитывается разность фаз волны между  $i_L$  и  $i_R$ ,  $i_L - 0,5$  и  $i_L$ ,  $i_R$  и  $i_R + 0,5$ , что влечет повышение точности вычислительных экспериментов (см. табл.2, седьмая серия). Единственный случай роста погрешности определения отраженной волны по сравнению с шестой серией экспериментов наблюдается при параметрах дискретизации 25/52. Он связан с преимущественным влиянием на точность нахождения такой волны решений уравнений (3) и (4), в которые подставляются численно задаваемые значения напряженностей падающего поля как в комбинированном, так и в численном случае задания падающей волны. Отличие погрешностей определения отраженной волны при параметрах 25/52 весьма незначительно, оно появляется только в третьей значащей цифре и вызвано, по-видимому, ошибками округления. Прошедшая волна в седьмой серии экспериментов всегда находится точнее, чем в пятой и шестой сериях, причем различия в результатах в пользу численного задания довольно значительны.

Предлагаемый метод не только характеризуется решениями, свободными от всплеска значений модуля комплексной амплитуды в правой части вычислительной области, но и не ограничивает исследователя в выборе расположения узла  $i_R$ . Начальное условие при численном задании падающей волны соблюдается всегда в силу исполнения этого условия в обеих вспомогательных задачах (второй и третьей).

К недостатку развиваемого подхода следует отнести увеличение вычислительной сложности за счет добавления дополнительной одномерной задачи. При исследовании дифракции плоской однородной электромагнитной волны на двумерных и трехмерных объектах это увеличение не окажет

сколькo-нибудь значимого влияния на длительность вычислений в силу одномерности добавленной задачи.

**Заключение.** Разработанный способ формирования падающей волны (в рамках TF/SF-методики разностного решения уравнений Максвелла) при исследовании дифракции в области, заключенной в неоднородную оболочку, превосходит по точности известные аналоги. Будучи распространенной на двумерный и трехмерный случаи, заявленная методика позволит значительно снизить вычислительную сложность моделирования дифракционных оптических элементов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Методы** компьютерной оптики /Под ред. В. А. Сойфера М.: Физматлит, 2003.
2. **Taflove A., Hagness S.** Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House Publishers, 2000.
3. **Kron G.** Equivalent circuit of the field equations of Maxwell – I // Proc. IRE. 1944. **32**. P. 289.
4. **Yee K. S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas and Propag. 1966. **AP-14**. P. 302.
5. **Berenger J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journ. Computat. Phys. 1994. N 114. P. 185.
6. **Umashankar K. R., Taflove A.** A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects // IEEE Trans. Electromagn. Compatib. 1982. **24**, N 4. P. 397.
7. **Prather D. W., Shi S.** Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements // JOSA A. 1999. **16**, N 5. P. 1131.
8. **Головашкин Д. Л., Сойфер В. А.** Анализ прохождения электромагнитного излучения через дифракционную линзу // Автометрия. 1999. № 6. С. 119.
9. **Ichikawa H.** Electromagnetic analysis of diffraction gratings by the finite-difference time-domain method // JOSA A. 1998. **15**, N 1. P. 152.
10. **Головашкин Д. Л.** Дифракция *H*-волны на двумерной диэлектрической решетке // Мат. моделирование. 2004. **16**, № 9. С. 53.
11. **Jiang J., Nordin G. P.** A rigorous unidirectional method for designing finite aperture diffractive optical elements // Opt. Express. 2000. **7**, N 6. P. 237.
12. **Di F., Yingbai Y., Guofan J. et al.** Rigorous electromagnetic design of finite-aperture diffractive optical elements by use of an iterative optimization algorithm // JOSA. 2003. **20**, N 9. P. 1739.
13. **Taflove A.** Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic-penetration problems // IEEE Trans. Electromagn. Compatib. 1980. **22**, N 3. P. 191.
14. **Taflove A., Umashankar K. R.** Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section // Proc. IEEE. 1989. **77**, N 5. P. 682.

*Поступила в редакцию 5 декабря 2005 г.*