

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2007, том 43, № 1

УДК 621.391.266

**УПОРЯДОЧЕНИЕ ТОЧЕК
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ
ГРУППОВОГО ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА
НА БАЗЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ***

Д. Г. Хафизов

*Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола
E-mail: RTS@MARSTU.MARI.RU*

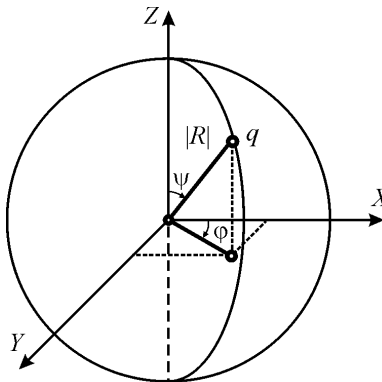
Рассмотрено амплитудно-фазовое представление пространственных групповых точечных объектов, заданных в виде кватернионных сигналов. Решена задача оценки параметров вращения и упорядочения точечных отметок, входящих в состав группового объекта. Получены результаты, которые позволяют использовать алгоритм согласованной фильтрации для решения задачи распознавания пространственных групповых точечных объектов с неизвестными параметрами вращения и нумерации точек в объекте.

Введение. Задачи обработки дву- и трехмерных изображений в виде скоплений точечных объектов, размерами которых можно пренебречь, характерны для целого ряда радиотехнических систем. В большинстве случаев имеется возможность объединять данные объекты в соответствии с заданным критерием в компактные группы – групповые точечные объекты (ГТО). При этом надежность результатов обработки таких изображений зависит от выбранной модели представления ГТО и способа упорядочения точек в объекте.

Задача упорядочения точечных отметок в групповом объекте является наиболее важной, так как без ее решения невозможно применение алгоритмов обработки, основанных на согласованных фильтрах. При случайном расположении точек на плоскости этот вопрос рассматривался в работе [1]. Однако данная задача не имеет строго единственного решения, потому что даже ее формализация в каждом конкретном случае существенно зависит от приложений, в рамках которых она рассматривается. Задача нумерации точечных отметок в групповом объекте при переходе в трехмерное пространство существенно усложняется. Это связано не только с увеличением ее размерности, но и с необходимостью разработки новых методов одновременно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-01-00243, № 05-01-96510 (01-203) р_поволжье_a).

Рис. 1. Определение углов φ и ψ в сферической системе отсчета



го оценивания параметров вращения, поскольку использование существующих алгоритмов [2] возможно только при известной нумерации точек в объекте.

В предлагаемой работе представлен один из подходов к решению задачи упорядочения точечных отметок в групповом объекте. Введение амплитудно-фазовой модели (АФМ) пространственного группового точечного объекта позволило синтезировать алгоритм оценки параметров вращения, оптимальный по критерию максимального правдоподобия. В то же время применение данной модели позволяет получить алгоритм сопоставления (идентификации или упорядочения) точечных отметок в эталонном и наблюдаемом (зашумленном) объектах, что, в свою очередь, дает возможность использовать кватернионные согласованные фильтры для решения не менее важной задачи – распознавания пространственных ГТО. Очевидно, что результаты распознавания таких объектов будут существенно зависеть от качества решения задачи нумерации.

Амплитудно-фазовое представление пространственного ГТО. Рассмотрим способ представления ГТО, при котором точки задаются в сферической системе координат $(\psi(n), \varphi(n), |R(n)|)$ (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 |R(n)| &= \sqrt{q_1(n)^2 + q_2(n)^2 + q_3(n)^2}; \\
 \psi(n) &= \arccos \frac{q_3(n)}{\sqrt{q_1(n)^2 + q_2(n)^2 + q_3(n)^2}}; \\
 \varphi(n) &= \arctg \frac{q_2(n)}{q_1(n)}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Каждая из точек ГТО в таком представлении задается в координатах, где по осям OX и OY откладываются угловые координаты (углы в вертикальной и горизонтальной плоскостях сферической системы отсчета), а по оси OZ – длина вектора, соединяющего центр системы отсчета с n -й точкой ГТО:

$$\mathbf{Q} = \{q(n)\}_{0, k-1} = \{\psi(n), \varphi(n), |R(n)|\}_{0, k-1}.
 \tag{2}$$

Такой способ задания пространственно расположенных ГТО назовем амплитудно-фазовым представлением пространственного ГТО или его АФМ (рис. 2).

Следует отметить, что для перехода от представления кватернионного сигнала (КТС) к АФМ с целью дальнейшей обработки необходимо, чтобы ориентация обрабатываемых КТС была одинаковой. Практически это сводится к выполнению операции совмещения кватернионных сигналов для

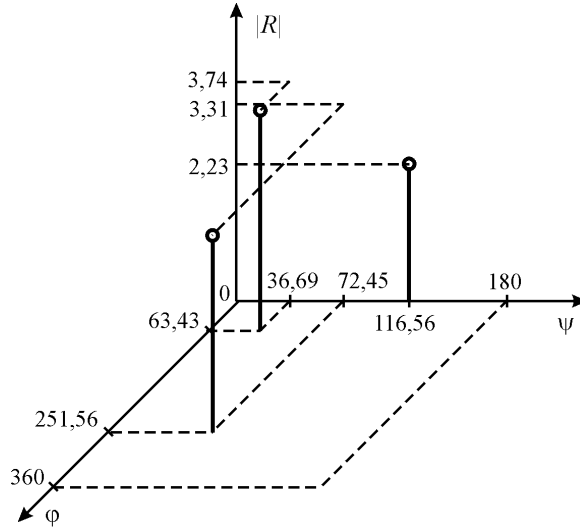


Рис. 2. Амплитудно-фазовое представление ГТО, описанного при помощи кватернионного сигнала $\mathbf{Q} = \{i + 2j + 3k; 2i - k, -i - 3j + k\}$

представления пространственных ГТО. Похожая задача решалась в работе [3]. Методика, используемая в [3], позволяет как можно точнее совместить два КТС, что является достаточно трудоемкой операцией. Но при этом необходимым условием применения такой методики была заранее известная нумерация точечных отметок в сигнальном и эталонном ГТО.

Таким образом, как при формировании алфавита эталонных КТС, так и при анализе зашумленного КТС перед переходом к АФМ необходимо совместить центр тяжести сигнала с направлением специального кватерниона вида $q_z = k$ (осью OZ), т. е. найти вращающий кватернион b_z , который обеспечивал бы совмещение центра тяжести с осью OZ .

Определить такой вращающий кватернион можно на основе нормированного скалярного произведения (НСП) совмещаемых кватернионов.

Так как реальная часть скалярного произведения двух кватернионов есть косинус угла между ними, а мнимая часть соответствует их векторному произведению, то вращающий кватернион, позволяющий их совместить, будет равен

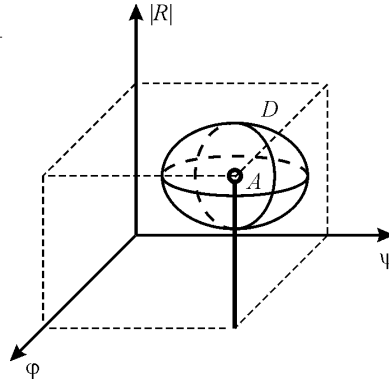
$$b_{qp} = \cos\left(\frac{\arccos(\eta_0)}{2}\right) - \frac{\eta_1 i + \eta_2 j + \eta_3 k}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}} \sin\left(\frac{\arccos(\eta_0)}{2}\right), \quad (3)$$

где $\eta = \eta_0 + \eta_1 i + \eta_2 j + \eta_3 k$ – результат НСП. С учетом необходимости совмещения центра тяжести КТС с осью OZ формула (3) примет вид

$$b_z = \cos\left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{c_3}{|c|}\right)\right) + \frac{c_2 i - c_1 j}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2}} \sin\left(\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{c_3}{|c|}\right)\right), \quad (4)$$

где $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ – кватернион, задающий центр тяжести КТС.

Рис. 3. Примерный вид области D



В результате операции $\mathbf{P}_z = b_z \mathbf{P} b_z^{-1}$ направление центра тяжести КТС \mathbf{P}_z будет совпадать с направлением оси OZ .

Аналитические соотношения для формирования амплитудно-фазовой модели зашумленного ГТО. Определим, как будет выглядеть амплитудно-фазовое представление точки ГТО, на которую воздействует координатный шум (независимая трехмерная центрированная случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения). Очевидно, это будет некая область D , содержащая точки, вероятность попадания которых в эту область превышает некоторое пороговое значение $p_{\text{пор}}$ (рис. 3, рис. 4).

Границы области зашумленной точки формируются, когда шумовой вектор длиной λ , определяемой величиной вероятности $p_{\text{пор}}$, делает полный оборот по сфере (см. рис. 4). При этом модуль и углы в горизонтальной и вертикальной плоскостях зашумленного радиуса-вектора соответственно изменяются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} |q| - |\zeta| &\leq |R| \leq |q| + |\zeta|; \\ \varphi_q - \Delta\varphi &\leq \varphi \leq \varphi_q + \Delta\varphi; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\psi_q - \Delta\psi \leq \psi \leq \psi_q + \Delta\psi,$$

где углы $\Delta\varphi = \arcsin \frac{r}{\sin(\psi_q)|q|}$, $\Delta\psi = \arcsin \frac{r}{|q|}$ определяются из рис. 5.

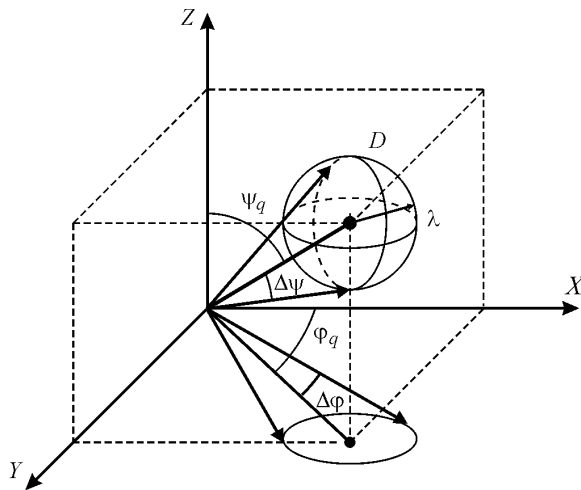


Рис. 4. Определение вида области D

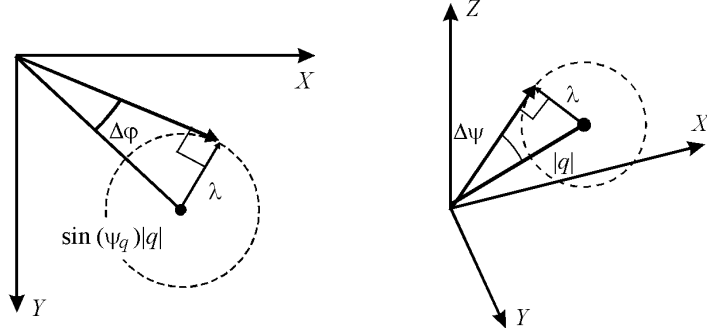


Рис. 5. Определение углов $\Delta\phi$ и $\Delta\psi$

Из последних выражений и рис. 5 видно, что диапазоны изменения фаз, а соответственно и форма области D зависят не только от конкретных шумовых отсчетов, но и от величины угла ψ_q и модуля исходного радиуса-вектора.

Таким образом, каждая из точек ГТО подвергается воздействию координатного шума

$$R(n) = q(n) + \zeta(n),$$

где

$$q(n) = |q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_q(n)) i + \\ + |q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_q(n)) j + |q(n)| \cos(\psi_q(n)) k$$

– n -я точка ГТО, а

$$\zeta(n) = |\zeta(n)| \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(n)) i + \\ + |\zeta(n)| \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(n)) j + |\zeta(n)| \cos(\psi_\zeta(n)) k$$

– шумовой вектор длиной λ .

Тогда модуль зашумленного радиуса-вектора и углы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно будут определяться следующим образом:

$$|R(n)|^2 = \lambda^2 + 2\lambda |q(n)| [\sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\psi_\zeta(n)) (\cos(\varphi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(n)) + \\ + \sin(\varphi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(n))) + \cos(\psi_q(n)) \cdot \cos(\psi_\zeta(n))] + |q(n)|^2;$$

(6)

$$\varphi(n) = \arctg \frac{|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_q(n)) + \lambda \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(n))}{|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_q(n)) + \lambda \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(n))};$$

$$\psi(n) = \arccos \frac{|q(n)| \cos(\psi_q(n)) + \lambda \cos(\psi_\zeta(n))}{|R(n)|}, \quad 0 \leq \psi_\zeta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_\zeta \leq 2\pi.$$

Соотношение (6) позволяет построить АФМ ГТО и области, образуемые шумовым радиусом-вектором.

Рассмотрим, каким образом можно определить величину области, образуемой зашумленной точкой при заданной величине порогового значения вероятности.

Преобразование (1) является взаимно однозначным, причем $|R| > 0$ и возможные значения ψ и φ заключены в пределах от 0 до π и от 0 до 2π соответственно. Геометрически это преобразование для зашумленного ГТО означает переход от случайных декартовых координат (p_1, p_2, p_3) к случайным сферическим координатам $(|R|, \psi, \varphi)$ случайного вектора. Преобразование, обратное (1), имеет вид

$$p_1 = |R| \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi); \quad p_2 = |R| \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi); \quad p_3 = |R| \cos(\psi). \quad (7)$$

Найдем совместную функцию распределения координат $W_3(|R|, \psi, \varphi)$.

Если известны совместная плотность вероятности $w_n(x_1, \dots, x_n)$ случайных величин x_1, \dots, x_n и якобиан преобразования от случайных величин x_1, \dots, x_n к случайным величинам y_1, \dots, y_n , то распределение преобразованных случайных величин

$$W_3(|R|, \psi, \varphi) = \frac{|R|^2 \sin(\psi)}{\sigma^3 (2\pi)^{3/2}} \times \\ \times e^{-\frac{(|R| \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) - q_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(|R| \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi) - q_2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(|R| \cos(\psi) - q_3)^2}{2\sigma^2}}. \quad (8)$$

Найдем одномерное распределение модуля шумового вектора ζ , подчиняющегося трехмерному нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением (СКО) σ и нулевым математическим ожиданием

$$W_1(|\zeta|) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} W_3(\psi, \varphi, |\zeta|) d\varphi d\psi = \frac{|\zeta|^2}{\sigma^3 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\sigma^2}} 2\pi (-\cos(\psi))_0^\pi = \\ = \frac{|\zeta|^2}{\sigma^3 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\sigma^2}} 2\pi(1+1) = \frac{|\zeta|^2}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\sigma^2}}, \quad (9)$$

где

$$W_1(|\zeta|) = \frac{|\zeta|^2}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

– распределение Максвелла.

Вероятность того, что модуль шумового вектора примет значение в интервале $(0, \lambda)$, запишется следующим образом:

$$P(0 < |\zeta| < \lambda) = \int_0^\lambda W_1(|\zeta|) d|\zeta| = \int_0^\lambda \frac{|\zeta|^2}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\sigma^2}} d|\zeta|. \quad (11)$$

Преобразуя формулу (11), получим

$$P(0 < |\zeta| < \lambda) = 2 \left[\Phi \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right) - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} \right], \quad (12)$$

где

$$\Phi \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda/\sigma} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz.$$

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ и зная величины λ и σ ,

можно определить величину вероятности $P(0 < |\zeta| < \lambda)$. Так как для вычисления функции $\Phi(x)$ используют специальные таблицы, то для функции

$$W(x) = 2 \left[\Phi(x) - x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \quad (13)$$

также можно составить подобную таблицу.

Величина λ выбирается в соответствии с заданным значением вероятности, с которой зашумленная точка должна находиться в пределах области D .

Для решения этой задачи, т. е. для определения величины λ при заданной $P(0 < |\zeta| < \lambda)$ и известной величине СКО σ , необходимо:

- 1) из (13) найти значение $W(x)$, равное величине $P(0 < |\zeta| < \lambda)$;
- 2) определить величину x , при которой выполняется п. 1;
- 3) умножить найденную величину x на σ .

Нахождение особых точек пространственного ГТО. Из всей совокупности точек, входящих в состав любого ГТО, можно выделить несколько так называемых особых точек. Такими точками можно считать, например, наиболее и наименее устойчивые к воздействию координатных шумов.

Рассмотрим задачу определения наиболее и наименее устойчивых точек пространственного ГТО на основе АФМ.

Амплитудно-фазовая модель зашумленного пространственного ГТО размерности s представляет собой совокупность из s пространственных областей D_n , $n = 0, 1, \dots, s-1$, образующихся при зашумлении каждой n -й точки эталонного ГТО. Как уже было показано ранее, граница каждой области D определяется положением радиуса-вектора, соответствующего n -й точке ГТО, величиной СКО σ координатного шума и значением вероятности $p_{\text{пор}}$ нахождения зашумленной точки в пределах области D_n . При увеличении СКО координатного шума размеры областей D_n разных точек ГТО также будут увеличиваться и при определенном значении σ некоторые из этих областей начнут соприкасаться, а при дальнейшем увеличении СКО области начнут пересекаться, что ведет к снижению вероятности правильной идентификации точечных отметок. Если определить область, которая начинает соприкасаться с другими при больших значениях СКО, т. е. дольше других сохраняет изолированность, то точку, вокруг которой построена эта область, можно назвать наиболее устойчивой, а найденную величину СКО σ_{max} считать

максимальным значением СКО координатного шума, при котором с заданной вероятностью $p_{\text{пор}}$ можно идентифицировать одну точку ГТО. Соответственно точка, у которой область начнет соприкасаться раньше других, будет называться наименее устойчивой, а величина СКО σ_{min} считаться минимальным значением СКО координатного шума, при котором можно с вероятностью $p_{\text{пор}}^s$ идентифицировать все точечные отметки.

Обе рассмотренные задачи можно решить совместно, для этого надо найти все СКО для каждой из возможных пар точек ГТО, при которых происходит соприкосновение областей, построенных вокруг этих точек. Следовательно, получим квадратную диагональную матрицу Σ размера s :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{0,1} & \cdots & \sigma_{0,s-1} \\ \sigma_{1,0} & 0 & \cdots & \sigma_{1,s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{s-1,0} & \sigma_{s-1,1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для нахождения номера точки, являющейся самой устойчивой, необходимо в каждой строке матрицы выделить ячейки с минимальным значением СКО:

$$\min_m(\sigma_{n,m}) \rightarrow \sigma_{n,\text{min}}, \quad n, m = 0, 1, \dots, s-1, \quad n \neq m, \quad (15)$$

затем из всех $\sigma_{n,\text{min}}$ определить ячейку с максимальным значением СКО:

$$\max_n(\sigma_{n,\text{min}}) \rightarrow \sigma_{\text{max}}, \quad n = 0, 1, \dots, s-1, \quad (16)$$

номер строки этой ячейки будет соответствовать номеру точки ГТО, являющейся наиболее устойчивой. Для нахождения наименее устойчивой точки соответственно надо определить ячейку с наименьшим значением СКО:

$$\min_n(\sigma_{n,\text{min}}) \rightarrow \sigma_{\text{min}}, \quad n = 0, 1, \dots, s-1. \quad (17)$$

Ситуация, при которой происходит соприкосновение двух областей, соответствует случаю, когда система уравнений, построенная с использованием выражения (6), описывающего границы области D , для пары точек с номерами n и m имеет одно единственное решение.

На основе вышеизложенного составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (|q(n)|\sin(\psi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_q(n)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(n)))^2 + \\ & + (|q(n)|\sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_q(n)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(n)))^2 + \\ & + (|q(n)|\cos(\psi_q(n)) + \lambda_{n,m} \cos(\psi_\zeta(n)))^2 + \\ & + (|q(m)|\sin(\psi_q(m)) \cdot \cos(\varphi_q(m)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(m)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(m)))^2 + \end{aligned}$$

$$+ (|q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \sin(\varphi_q(m)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(m)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(m)))^2 + \quad (18)$$

$$+ (|q(m)| \cos(\psi_q(m)) + \lambda_{n,m} \cos(\psi_\zeta(m)))^2;$$

$$\frac{|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_q(n)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(n))}{|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_q(n)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(n)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(n))} =$$

$$= \frac{|q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \sin(\varphi_q(m)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(m)) \cdot \sin(\varphi_\zeta(m))}{|q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \cos(\varphi_q(m)) + \lambda_{n,m} \sin(\psi_\zeta(m)) \cdot \cos(\varphi_\zeta(m))};$$

$$\frac{|q(n)| \cos(\psi_q(n)) + \lambda_{n,m} \cos(\psi_\zeta(n))}{|R(n)|} = \frac{|q(m)| \cos(\psi_q(m)) + \lambda_{n,m} \cos(\psi_\zeta(m))}{|R(m)|};$$

$$\psi_\zeta(n) = \pi - \psi_\zeta(m); \quad \varphi_\zeta(n) = \pi + \varphi_\zeta(m).$$

Решая эту систему относительно $\lambda_{n,m}$ и зная вероятность $p_{\text{пор}}$, можно найти значения СКО $\sigma_{n,m}$ ($n, m = 0, 1, \dots, s-1$):

$$\lambda_{n,m}^2 = 0,25 ([|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \cos(\varphi_q(n)) - |q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \cos(\varphi_q(m))]^2 +$$

$$+ [|q(n)| \sin(\psi_q(n)) \cdot \sin(\varphi_q(n)) - |q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \sin(\varphi_q(m))]^2 +$$

$$+ [|q(n)| \cos(\psi_q(n)) - |q(m)| \cos(\psi_q(m))]^2). \quad (19)$$

Для перехода к матрице вида Σ воспользуемся формулой $\sigma_{n,m} = \lambda_{n,m}/x$, где x – величина, определяемая по формуле (13).

Оценка параметров вращения. Для оценки параметров вращения пространственного ГТО воспользуемся методом наибольшего правдоподобия.

Ранее была найдена совместная плотность распределения модуля $|R(n)|$ и углов $\psi(n)$ и $\varphi(n)$ точки ГТО (8). При повороте пространственного ГТО на угол $\Delta\varphi$ относительно оси OZ его код запишется в виде

$$R_{\Delta\varphi}(m) = (\psi(m), \varphi(m) + \Delta\varphi, |R(m)|).$$

Поворот ГТО будет приводить к сдвигу его АФМ вдоль оси φ на величину $\Delta\varphi$ относительно эталонной, поэтому для получения оценки угла поворота необходимо найти такой сдвиг АФМ относительно функции $W(\psi, \varphi, |R|)$, при котором в стробы будет попадать максимальное количество отметок. Поскольку отметкам ГТО в АФМ соответствуют символы Кронекера, то указанному условию соответствует максимизация по параметру $\Delta\varphi$ функции правдоподобия вида

$$L(\Delta\varphi) = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{s-1} \frac{|R(m)|^2 \sin(\psi(m))}{\sigma^3 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{(|R(m)| \sin(\psi(m)) \cdot \cos(\varphi(m) + \Delta\varphi) - q_1(n))^2}{2\sigma^2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(|R(m)| \sin(\psi(m)) \cdot \sin(\varphi(m) + \Delta\varphi) - q_2(n))^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(|R(m)| \cos(\psi(m)) - q_3(n))^2}{2\sigma^2}}. \quad (20)$$

Для поиска максимума функции (20) определим первую производную данного выражения и приравняем ее к нулю:

$$0 = - \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{s-1} \frac{|R(m)|^3 \sin(\psi(m))^2 \sqrt{2}}{4\sigma^5 \pi^{3/2}} \times \\ \times [\cos(\varphi(m) - \Delta\varphi) q_2(n) - \sin(\varphi(m) - \Delta\varphi) q_1(n)] \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}(|R(m)|^2 + |q(n)|^2 - 2|R(m)||\sin(\psi(m)) \times \right. \\ \left. \times (\cos(\varphi(m) + \Delta\varphi) q_1(n) + \sin(\varphi(m) + \Delta\varphi) q_2(n)) + \cos(\psi(m)) q_3(n))\right). \quad (21)$$

Решая последнее выражение относительно $\Delta\varphi$, получим формулу для оценки угла поворота пространственного ГТО на базе его АФМ:

$$\Delta\hat{\varphi} = \frac{\sum_{m=0}^{s-1} \sum_{n=0}^{k-1} (\varphi_q(n) - \varphi(m))}{sk}. \quad (22)$$

Непосредственные вычисления значения $\Delta\hat{\varphi}$ с использованием полученного выражения могут оказаться затруднительными из-за неоднозначности задания углов при сдвиге. Поэтому на основе формулы (22) был разработан алгоритм, позволяющий разрешить данную проблему.

Введем квадратную матрицу порядка $s \times k$ следующего вида:

$$E = \left. \begin{matrix} \overbrace{\left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} \right)}^s \end{matrix} \right\} k. \quad (23)$$

Упорядочив величины $\varphi_q(n)$ и $\varphi(m)$ по возрастанию и применив формулу

$$\Delta\hat{\varphi}_l = \frac{\sum_{m=0}^{s-1} \sum_{n=0}^{k-1} (\varphi_q(n) - [\varphi(m) + 2\pi\varepsilon_{m,l}])}{sk}, \quad l=0,1,\dots,k, \quad (24)$$

получим набор оценок $\Delta\hat{\varphi}_l$. Далее, проверив, при каком угле поворота в стробы попадает наибольшее количество отметок, определяем оценку угла поворота $\Delta\hat{\varphi}$. Оценим и сравним точность совмещения КТС на основе величины

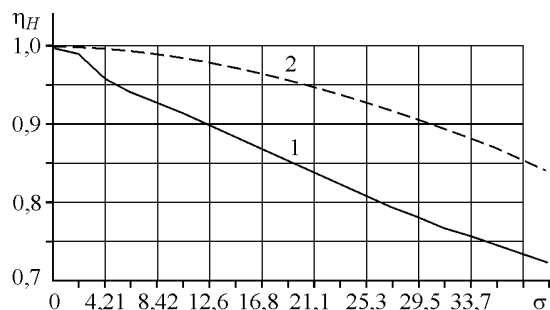


Рис. 6. Зависимость нормированного скалярного произведения сигнального кватерниона и совмещенного с ним эталона от СКО координатного шума

НСП сигнального и эталонного КТС при воздействии координатного шума с методикой, описанной в работе [3].

Как видно из графиков на рис. 6, описанная методика оценивания параметров вращения (кривая 1) проигрывает в точности совмещения методике, предложенной в [3] (кривая 2). Однако следует заметить, что в первом случае (кривая 1) отсутствует информация о порядке нумерации точек в ГТО, тогда как алгоритм совмещения КТС (кривая 2) способен функционировать только при известном порядке нумерации точек в объекте.

Идентификация точечных отметок. Рассмотрим задачу, когда нужно аналитическим путем определить положение точки в пространстве относительно некоторой замкнутой области. Для простоты в качестве такой области возьмем сферу, которая описывается выражением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \quad (25)$$

где R – радиус сферы, а точка с координатами (x_0, y_0, z_0) – ее центр.

Представим выражение (25) как функцию трех переменных:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = f(x, y, z), \quad (26)$$

которая обращается в нуль, если точка с координатами $T(x_1, y_1, z_1)$ лежит на поверхности сферы. Несложно определить, что если точка лежит внутри сферы (т. е. расстояние от центра сферы до точки меньше ее радиуса), то значение функции (26) будет меньше нуля. Соответственно, если точка лежит вне сферы, то значение функции больше нуля. Таким образом, сформулируем правило, согласно которому можно говорить о принадлежности точки T заданной замкнутой области:

$$T(x_1, y_1, z_1) \in f(x, y, z), \text{ если } f(x_1, y_1, z_1) \leq 0, \quad (27)$$

причем, зная величину функции $f(x_1, y_1, z_1)$, можно определить расстояние от заданной точки до центра сферы:

$$d_{(T, O)} = \sqrt{f(x_1, y_1, z_1) + R^2}. \quad (28)$$

Все вышеизложенное существенно упрощает процесс сопоставления точек зашумленного и эталонного ГТО.

Опишем область D , исходя из рис. 4:

$$(x - q_1(n))^2 + (y - q_2(n))^2 + (z - q_3(n))^2 = \lambda^2. \quad (29)$$

Далее, переходя к амплитудно-фазовому представлению, с учетом формулы (26) получим

$$\begin{aligned} F = f(m, n) = & \\ & (|p(n)| \sin(\psi_p(n)) \cdot \cos(\varphi_p(n)) - |q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \cos(\varphi_q(m)))^2 + \\ & (|p(n)| \sin(\psi_p(n)) \cdot \sin(\varphi_p(n)) - |q(m)| \sin(\psi_q(m)) \cdot \sin(\varphi_q(m)))^2 + \\ & (|p(n)| \cos(\psi_p(n)) - |q(m)| \cos(\psi_q(m)))^2 - \lambda^2, \end{aligned} \quad (30)$$

где $m=0,1,\dots,s-1$ – номер точки эталона; $n=0,1,\dots,k-1$ – номер точки сигнального КТС.

Результаты вычислений по формуле (30) можно свести в матрицу

$$F = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,s-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,s-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(k-1,0) & f(k-1,1) & \dots & f(k-1,s-1) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Из всех элементов матрицы рассматриваем только те, которые удовлетворяют условию

$$f(m, n) \leq 0, \quad (32)$$

т. е. элементы, попадающие в стробы (27).

Затем находим минимальный элемент во всей матрице F , запоминаем номер строки m_1 и столбца n_1 , после этого вычеркиваем из матрицы столбец с номером n_1 и строку с номером m_1 и т. д. Когда будут вычеркнуты все эле-

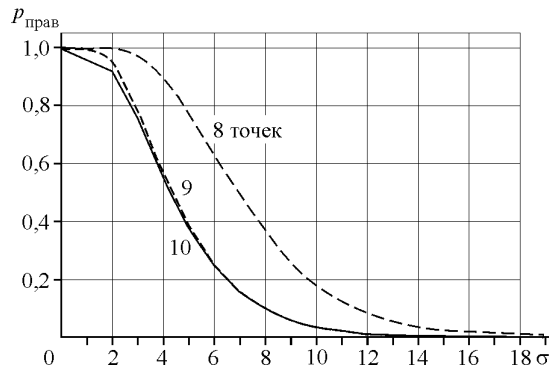


Рис. 7. Характеристика правильного упорядочения точечных отметок в ГТО

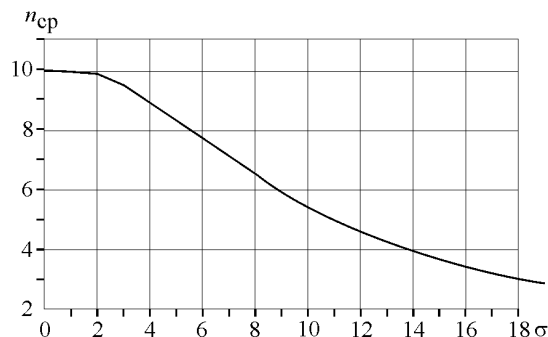


Рис. 8. Характеристика правильного упорядочения среднего числа точек в ГТО

менты матрицы либо когда останутся только положительные элементы, т. е. элементы, не попадающие ни в один из стробов, процесс идентификации будет закончен. В итоге получаем два набора чисел, содержащих номера точек эталонного и сигнального ГТО, сопоставленных друг с другом:

$$N = \{n_i\}_{1, s'}, \quad M = \{m_i\}_{1, k'}, \quad (33)$$

причем $k' = s'$ – число успешно идентифицированных отметок.

Заметим, что изначально точки, входящие в состав сигнального ГТО, могут быть пронумерованы в произвольном порядке.

На основе представленных алгоритмов был проведен вычислительный эксперимент. При этом обрабатываемый ГТО имел размерность $s = 10$ и был получен с помощью генератора случайных чисел с равномерным законом распределения. Построены следующие характеристики:

- зависимость вероятности правильного упорядочения 8-, 9- и 10-точечных отметок в ГТО от СКО координатного шума (рис. 7);
- зависимость среднего числа правильно упорядоченных точек от СКО координатного шума (рис. 8).

Число опытов на каждую точку графика $N = 10000$.

Заключение. В данной работе введена амплитудно-фазовая модель пространственного ГТО, на основе которой были синтезированы алгоритмы оценки параметров вращения КТС при неизвестной нумерации точек в объекте и упорядочения точечных отметок, т. е. сопоставления отметок в сигнальном и эталонном ГТО. Применение таких алгоритмов позволит в дальнейшем использовать алгоритм согласованной фильтрации КТС для решения задачи распознавания пространственных ГТО с неизвестными параметрами вращения и нумерацией точек в распознаваемом ГТО, тогда как все существующие и описанные в работах [2–6] методы и алгоритмы работают только при условии известной нумерации точек в объекте.

С помощью полученных алгоритмов рассчитана и построена характеристика, отображающая точность совмещения эталонного ГТО произвольного вида и наблюдаемого ГТО, т. е. подвергнутого воздействию координатных шумов. Также получена характеристика, показывающая зависимость вероятности правильного упорядочения точечных отметок в объекте от СКО координатного шума.

Решение задачи нумерации дает возможность в дальнейшем синтезировать оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы распознавания пространственных ГТО для принятия решения о принадлежности предъявляемого ГТО к соответствующему классу на основе только тех точек, которые были правильно идентифицированы с точками эталонного ГТО.

Также с учетом особенностей АФМ возможно синтезировать алфавит сигналов, который оптимальным образом будет подходить для решения задачи распознавания, что позволит получить потенциально достижимые характеристики распознавания ГТО с использованием амплитудно-фазовой модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Роженцов А. А., Евдокимов А. О.** Распознавание и оценка параметров изображений групповых точечных объектов по их амплитудно-фазовым моделям // Вестн. КГТУ им. А. Н. Туполева. 2005. № 3. С. 14.
2. **Фурман Я. А., Хафизов Д. Г.** Распознавание групповых точечных объектов в трехмерном пространстве // Автометрия. 2003. 39, № 1. С. 3
3. **Хафизов Д. Г.** Совмещение кватернионных сигналов при решении задачи обработки изображений группового точечного объекта // Вестн. Вятского научного центра Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук Российской Федерации. 2002. № 1. С. 176.
4. **Хафизов Р. Г., Хафизов Д. Г.** Распознавание групповых точечных объектов на основе представления в собственной системе отсчета кватернионных сигналов // Автометрия. 2005. 41, № 3. С.19.
5. **Введение** в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов /Под. ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002.
6. **Комплекснозначные** и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов /Под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2004.

Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.