

**РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
ИМПУЛЬСНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ****М. И. Иванов¹, В. А. Катешов¹, И. А. Кремер¹, М. В. Урев²**¹ЗАО «Центр Ритм», г. Новосибирск

E-mail: Kremer@aoritm.com

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск

E-mail: urev@nmsf.ssc.ru

Рассматриваются вопросы моделирования стационарных электромагнитных полей для трехмерных областей, включающих неоднородные проводящие среды. Задачи формулируются в терминах потенциалов. Для решения этих задач предлагается метод итераций по подобластям. На модельном примере продемонстрирована сходимость предложенного метода решения.

Введение. Методы импульсной электроразведки регистрируют процессы становления электромагнитных полей, начиная с некоторого исходного стационарного состояния. По характеру становления полей судят об электрических параметрах сред. Стационарное состояние полей играет роль начальных данных для нестационарной задачи. В предлагаемой работе рассматривается постановка стационарной задачи электроразведки, адаптированная к последующему решению нестационарной задачи. Начальные поля, как правило, создаются источниками, имеющими существенно меньшие размеры по сравнению с рассматриваемой областью. Этот факт приводит к вариационным формулировкам краевых задач с неограниченными функционалами и требует выделения особенностей при их численном решении. Источники полей располагаются либо на поверхности земли, либо в скважинах. В последнее время активно развиваются методы исследований морского дна [1], в этом случае источник полей может располагаться непосредственно в проводящей среде – морской воде. Область распространения электромагнитных полей включает в себя воздух и проводящие среды.

При решении задачи определения электромагнитного поля стационарно-го источника будем использовать представление магнитного поля в виде векторного потенциала в проводящих средах и скалярного потенциала в непроводящих средах. Такой подход был применен в работе [2] для решения нестационарных задач. Существенным отличием стационарной задачи является необходимость включения в систему уравнений калибровочного условия векторного потенциала в явном виде. Решение такой системы уравнений будем осуществлять с применением множителей Лагранжа. В данной работе

используется калибровочное условие кулоновского типа, которое обеспечивает непрерывность потоков векторного потенциала через границы раздела сред с различными значениями электрической проводимости. Это позволит в дальнейшем для нестационарной задачи выделить из системы уравнений задачу для скалярного электрического потенциала. Для аппроксимации скалярных неизвестных применяются скалярные конечные элементы второго порядка, а для векторных неизвестных – векторные конечные элементы Неделека второго типа [3, 4]. Векторные вариационные постановки, включающие множители Лагранжа, являются задачами с седловой точкой. В данной работе строится альтернирующий метод решения задачи, основанный на раздельном решении более простых частных задач с симметричными операторами в подобластях с положительным значением электрической проводимости, с одной стороны, и в непроводящей области – с другой. Теоретическое обоснование данного подхода изложено в [5]. Функциональные пространства $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ и их подпространства описаны в [6].

Целью предлагаемой работы является численное исследование вопросов сходимости предложенного итерационного метода.

Постановка задачи. Расположим систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы поверхность земли находилась в плоскости $z=0$, а ось z направлена из земли в воздух. Пусть рассматриваемая область $\Omega \subset R^3$ разбита на открытые подобласти Ω_k так, что $\bar{\Omega} = \bigcup_k \bar{\Omega}_k$, где $\bar{\Omega}_k$ обозначает замыка-

ние множества Ω_k . Предполагаем, что подобласти Ω_k однородны по своим физическим свойствам, они характеризуются постоянными значениями электрической проводимости σ_k и магнитной проницаемости μ_k . Будем считать, что воздух является подобластью Ω_0 , а подобласть Ω_1 граничит с подобластью Ω_0 . Воздух характеризуется отсутствием проводимости, т. е. $\sigma_0=0$. Пусть для всех $k \neq 0$ выполнено $\sigma_k > 0$. Границы раздела подобластей обозначим $S^{k,l} = \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l$. Граница $\Gamma_3 := S^{1,0}$ является поверхностью земли. Внешнюю границу области Ω обозначим через Γ . Пусть вектор \mathbf{n} является внешней нормалью к границе Γ , а вектор $\mathbf{n}_{k,l}$ – нормалью к $S^{k,l}$, направленной из подобласти Ω_k в подобласть Ω_l . В каждой подобласти Ω_k задана система уравнений Максвелла относительно напряженности магнитного поля \mathbf{H}^k и напряженности электрического поля \mathbf{E}^k . Индекс k указывает на то, что соответствующие переменные относятся к подобласти Ω_k . В очевидных случаях индекс будем опускать. Для стационарных источников полей данная система уравнений может быть записана в виде

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}; \quad \text{div}(\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ct}}) = 0; \quad \text{div} \mathbf{E}^0 = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ct}}; \quad \text{div} \mu \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

На границах раздела сред $S^{k,l}$ выполняются следующие условия сопряжения:

$$\mathbf{E}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{E}^l \times \mathbf{n}_{k,l}; \quad \sigma_k \mathbf{E}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \sigma_l \mathbf{E}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}^l \times \mathbf{n}_{k,l}; \quad \mu_k \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mu_l \mathbf{H}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l}. \quad (4)$$

Считаем, что внешняя граница области Γ достаточно удалена от источников и на ней выполняются неоднородные условия

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_n \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{n}, \quad (5)$$

смысл которых будет уточнен далее. На поверхности земли Γ_3 условие сопряжения для нормальной компоненты электрического поля переходит в условие

$$\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0. \quad (6)$$

Стационарный источник электрического и магнитного полей описывается плотностью стороннего тока \mathbf{j}^{ct} . Рассмотрим случай, когда источником является заземленная горизонтальная электрическая линия (ГЭЛ). Линия находится на поверхности земли в плоскости $z = 0$. Будем считать, что она располагается на координатной прямой OX . Диаметр сечения линии существенно меньше размеров рассматриваемой области. Пусть концы линии размещены в точках \mathbf{A}, \mathbf{B} : $\mathbf{A} = (x_A, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (x_B, 0, 0)$. По линии из точки \mathbf{A} в точку \mathbf{B} течет постоянный ток I^{ct} , который поддерживается внешней ЭДС. Плотность стороннего тока ГЭЛ выражается в виде

$$\mathbf{j}^{\text{ct}} = (j_x, 0, 0), \quad j_x = I^{\text{ct}} (\theta(x - x_A) - \theta(x - x_B)) \delta(y) \delta(z),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, а $\delta(t)$ – функция Дирака:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0; \end{cases} \quad \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Далее будем полагать, что $\mu_k = \mu_0 = \mu = \text{const}$.

Граничное условие (6) на поверхности земли Γ_3 обеспечивает замкнутую постановку задачи для электрического поля \mathbf{E} в проводящей подобласти $\Omega^c := \Omega \setminus \overline{\Omega}_0$:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ \text{div}(\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ct}}) = 0 \end{cases} \quad \text{в } \Omega^c;$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{E}^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \sigma_k \mathbf{E}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \sigma_l \mathbf{E}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \quad \text{на } S^{k,l};$$

$$\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0 \quad \text{на } \Gamma_3;$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_n \times \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c.$$

Поскольку электрическое поле \mathbf{E}^0 в воздухе не оказывает никакого влияния на магнитное поле \mathbf{H} , его расчеты рассматривать не будем. Решение зада-

чи для \mathbf{E} в Ω^c содержит сингулярность, связанную с особенностью в источнике

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{ct}} = I^{\text{ct}} (\delta(x - x_A) - \delta(x - x_B)) \delta(y) \delta(z).$$

Представим \mathbf{E} в виде суммы первичного поля \mathbf{E}_Π с особенностью и аномального поля \mathbf{E}_a , учитывающего неоднородность Ω^c :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\Pi + \mathbf{E}_a.$$

Первичное поле удовлетворяет следующей краевой задаче, сформулированной для проводящего однородного полупространства $z \leq 0$ с проводимостью σ_1 :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\Pi &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}(\sigma_1 \mathbf{E}_\Pi + \mathbf{j}^{\text{ct}}) &= 0, \\ \mathbf{E}_\Pi \cdot \mathbf{n}_{1,0} &= 0 \text{ на плоскости } z = 0, \\ \mathbf{E}_\Pi &\rightarrow \mathbf{0} \text{ на бесконечности.} \end{aligned}$$

Значения \mathbf{E}_Π на границе $\Gamma \cap \overline{\Omega}^c$ определяют условия Дирихле первого уравнения из (5) для поля \mathbf{E} на этой границе. Краевая задача для аномального поля \mathbf{E}_a ставится в ограниченной области Ω^c :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_a = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}_a) = 0 \end{cases} \text{ в } \Omega^c, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_a^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{E}_a^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \sigma_k \mathbf{E}_a^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} - \sigma_l \mathbf{E}_a^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} = (\sigma_l - \sigma_k) \mathbf{E}_\Pi \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \text{ на } S^{k,l}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{n}_{1,0} = 0 & \text{на } \Gamma_3, \\ \mathbf{E}_a \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c. \end{cases} \quad (9)$$

Далее полагаем, что поля \mathbf{E} , \mathbf{E}_Π , \mathbf{E}_a известны. Этот факт позволяет нам перейти к вычислению напряженности стационарного магнитного поля \mathbf{H} во всей области Ω :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ct}}, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0 \end{cases} \text{ в } \Omega;$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \mu \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mu \mathbf{H}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \text{ на } S^{k,l};$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_\Pi \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma.$$

Представим \mathbf{H} в виде суммы первичного поля \mathbf{H}_Π и аномального поля \mathbf{H}_a , создаваемых первичным электрическим полем \mathbf{E}_Π и аномальным электрическим полем \mathbf{E}_a соответственно:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\Pi + \mathbf{H}_a.$$

Первичное поле \mathbf{H}_Π определяется во всем пространстве из системы уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\Pi &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_\Pi &= 0 \text{ в воздухе при } z > 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\Pi &= \sigma_1 \mathbf{E}_\Pi + \mathbf{j}^{\text{CT}}, & \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_\Pi &= 0 \text{ в земле при } z < 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\Pi^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}_\Pi^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \mu \mathbf{H}_\Pi^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mu \mathbf{H}_\Pi^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \text{ при } z = 0;$$

$$\mathbf{H}_\Pi \rightarrow \mathbf{0} \text{ на бесконечности.}$$

Значения \mathbf{H}_Π на границе Γ определяют условия второго уравнения в (5) для поля \mathbf{H} . Краевая задача для аномального поля \mathbf{H}_a ставится в ограниченной области Ω :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_a = \sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_\Pi & \text{в } \Omega^c, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_a = \mathbf{0} & \text{в } \Omega_0, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_a = 0 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_a^k \times \mathbf{n}_{k,l} = \mathbf{H}_a^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \mu \mathbf{H}_a^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \mu \mathbf{H}_a^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \text{ на } S^{k,l}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (12)$$

В работе [7, с. 222, 250] приведены выражения для первичных полей \mathbf{E}_Π и \mathbf{H}_Π , поэтому будем считать, что такие поля заданы в каждой точке расчетной области.

Вариационные формулировки задач для аномальных полей в терминах потенциалов. Краевую задачу для аномального электрического поля \mathbf{E}_a будем решать с помощью скалярного электрического потенциала U : $\mathbf{E}_a = -\nabla U$. В терминах потенциала U задача (7)–(9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma \nabla U) &= 0 & \text{в } \Omega^c, \\ \sigma_k \nabla U^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} - \sigma_l \nabla U^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} &= (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_\Pi \cdot \mathbf{n}_{k,l} & \text{на } S^{k,l}, \\ \nabla U \cdot \mathbf{n}_{1,0} &= 0 & \text{на } \Gamma_3, \\ U &= 0 & \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega^c}. \end{aligned}$$

Соответствующая вариационная постановка задачи формулируется на подпространстве пространства Соболева $H_U \subset H^1\left(\Omega^c \cup \bigcup_{k,l \neq 1,0} S^{k,l}\right)$ функций с нулевым следом на границе $\Gamma \cap \overline{\Omega}^c$.

Требуется найти функцию $U \in H_U$ такую, что $\forall V \in H_U$ выполнено

$$\int_{\Omega^c} \sigma \nabla U \cdot \nabla V d\Omega = \sum_{k,l \neq 1,0} \int_{S^{k,l}} V (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n}_{k,l} dS.$$

Для описания аномального магнитного поля вводим скалярный магнитный потенциал Φ в Ω_0 и векторный магнитный потенциал \mathbf{A} в проводящей подобласти Ω^c с калибровочным условием:

$$\mathbf{H}_a = \begin{cases} -\nabla \Phi & \text{в } \Omega_0, \\ (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}, \text{ div } \sigma \mathbf{A} = 0 & \text{в } \Omega^c. \end{cases}$$

Перепишем задачу (10)–(12) в терминах потенциалов:

$$\begin{cases} -\text{div } \mu \nabla \Phi = 0 & \text{в } \Omega_0, \\ \Phi = 0 & \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}_0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \text{rot } (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A} = \sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_n & \text{в } \Omega^c, \\ \text{div } \sigma \mathbf{A} = 0 & \text{в } \Omega^c, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c. \end{cases} \quad (14)$$

Условия сопряжения на границах раздела сред следующие:

$$\begin{cases} -\mu \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_{1,0} = \text{rot } \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{n}_{1,0}, \\ -\nabla \Phi \times \mathbf{n}_{1,0} = (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}^1 \times \mathbf{n}_{1,0} \end{cases} \quad \text{на } \Gamma_3, \quad (15)$$

$$\begin{cases} (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}^k \times \mathbf{n}_{k,l} = (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A}^l \times \mathbf{n}_{k,l}, \\ \sigma_k \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{n}_{k,l} = \sigma_l \mathbf{A}^l \cdot \mathbf{n}_{k,l} \end{cases} \quad \text{на } S^{k,l}. \quad (16)$$

Переформулируем задачу (14) для векторного потенциала путем введения в первое уравнение множителя Лагранжа P :

$$\begin{cases} \text{rot } (1/\mu) \text{rot } \mathbf{A} - \sigma \nabla P = \sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_n & \text{в } \Omega^c, \\ \text{div } \sigma \mathbf{A} = 0 & \text{в } \Omega^c, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c. \end{cases} \quad (17)$$

Дополнительными краевыми условиями для множителя P являются

$$\begin{aligned}\nabla P \cdot \mathbf{n}_{1,0} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_3, \\ P &= 0 \quad \text{на } \Gamma \cap \overline{\Omega}^c.\end{aligned}$$

Решение дифференциальных задач (13) и (17), (16), связанных граничными условиями (15), осуществим в обобщенной постановке. Для этого перейдем к вариационным формулировкам. Задача для магнитного скалярного потенциала Φ ставится на подпространстве функций $H_\Phi \subset H^1(\Omega_0)$ с нулевым следом на границе $\Gamma \cap \overline{\Omega}_0$. Векторный магнитный потенциал определяется в векторном подпространстве функций $\mathbf{H}_A \subset \mathbf{H}\left(\text{rot}, \Omega^c \bigcup_{k,l \neq 1,0} S^{k,l}\right)$ с нулевым касательным следом на границе $\Gamma \cap \overline{\Omega}^c$.

Требуется найти функции $\Phi \in H_\Phi$, $(\mathbf{A}, P) \in \mathbf{H}_A \times H_U$ такие, что $\forall W \in H_\Phi, \forall (\mathbf{B}, V) \in \mathbf{H}_A \times H_U$ выполнены

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \mu \nabla \Phi \cdot \nabla W d\Omega &= - \int_{\Gamma_3} W \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_{1,0} dS, \\ \int_{\Omega^c} (1/\mu) \text{rot} \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega^c} \sigma \nabla P \cdot \mathbf{B} d\Omega &= \\ = \int_{\Omega^c} (\sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_3} \nabla \Phi \times \mathbf{n}_{1,0} \cdot \mathbf{B} dS, \\ - \int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{A} \cdot \nabla V d\Omega &= 0.\end{aligned}$$

Численная реализация. Пусть T^h – некоторая регулярная триангуляция области Ω . Обозначим через S_h и F_h пространства квадратичных конечных элементов, конформных в пространствах $H^1\left(\Omega^c \bigcup_{k,l \neq 1,0} S^{k,l}\right)$ и $H^1(\Omega_0)$ соответственно, а через \mathbf{V}_h пространство элементов Неделека второго типа, конформных в пространстве $\mathbf{H}\left(\text{rot}, \Omega^c \bigcup_{k,l \neq 1,0} S^{k,l}\right)$. Степени свободы функций из пространств S_h и F_h связаны со значениями функций в узлах и серединах ребер триангуляции, а степени свободы функций из пространства \mathbf{V}_h – с моментами векторных функций на ребрах триангуляции. Введем пространства $Q_h = F_h \cap H_\Phi$, $\mathbf{X}_h = \mathbf{V}_h \cap \mathbf{H}_A$ и $Y_h = S_h \cap H_U$. Можно сформулировать конечномерные аналоги вариационных задач для аномальных полей.

Требуется найти функцию $U_h \in Y_h$ такую, что $\forall V_h \in Y_h$ выполнено

$$\int_{\Omega^c} \sigma \nabla U_h \cdot \nabla V_h d\Omega = \sum_{k,l \neq 1,0} \int_{S^{k,l}} V_h (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n}_{k,l} dS.$$

Требуется найти функции $\Phi_h \in Q_h$, $(\mathbf{A}_h, P_h) \in \mathbf{X}_h \times Y_h$ такие, что $\forall W_h \in Q_h, \forall (\mathbf{B}_h, V_h) \in \mathbf{X}_h \times Y_h$ выполнены

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mu \nabla \Phi_h \cdot \nabla W_h d\Omega &= - \int_{\Gamma_3} W_h \operatorname{rot} \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{n}_{1,0} dS, \\ \int_{\Omega^c} (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{A}_h \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}_h d\Omega - \int_{\Omega^c} \sigma \nabla P_h \cdot \mathbf{B}_h d\Omega &= \\ = \int_{\Omega^c} (\sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{B}_h d\Omega - \int_{\Gamma_3} \nabla \Phi_h \times \mathbf{n}_{1,0} \cdot \mathbf{B}_h dS, \\ - \int_{\Omega^c} \sigma \mathbf{A}_h \cdot \nabla V_h d\Omega &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи для аномального электрического поля сложностей не вызывает, поэтому остановимся подробнее на вычислении магнитного поля. Перейдем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для этого введем базисы пространств Q_h , \mathbf{X}_h и Y_h :

$$Q_h = \operatorname{span} \{\varphi_k, k = \overline{1, N_Q}\}, \quad \mathbf{X}_h = \operatorname{span} \{\mathbf{N}_i, i = \overline{1, N_X}\},$$

$$Y_h = \operatorname{span} \{\psi_k, k = \overline{1, N_Y}\}.$$

Искомые функции $\Phi_h \in Q_h$, $\mathbf{A}_h \in \mathbf{X}_h$, $P_h \in Y_h$ могут быть представлены в виде

$$\Phi_h = \sum_{k=1}^{N_Q} f_k \varphi_k, \quad \mathbf{A}_h = \sum_{j=1}^{N_X} a_j \mathbf{N}_j, \quad P_h = \sum_{l=1}^{N_Y} p_l \psi_l.$$

Конечномерная вариационная задача записывается в виде СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов разложения

$$\begin{cases} \mathbf{C}\Phi = \mathbf{G}(\mathbf{A}), \\ \mathbf{A}\mathbf{A} - \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{F}(\Phi), \\ -\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Здесь использовались следующие матрично-векторные обозначения:

$$\Phi = \{f_k, k = \overline{1, N_Q}\}^T; \quad \mathbf{A} = \{a_j, j = \overline{1, N_X}\}^T; \quad \mathbf{P} = \{p_l, l = \overline{1, N_Y}\}^T;$$

$$\mathbf{A} = \left\{ \int_{\Omega^c} (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{N}_i \cdot \operatorname{rot} \mathbf{N}_j d\Omega, i, j = \overline{1, N_X} \right\};$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \int_{\Omega^c} \sigma \nabla \psi_k \cdot \mathbf{N}_i d\Omega, k = \overline{1, N_Y}, i = \overline{1, N_X} \right\};$$

$$C = \left\{ \int_{\Omega_0} \mu \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_i d\Omega, k, i = \overline{1, N_Q} \right\};$$

$$F(\Phi) = \left\{ \int_{\Omega^c} (\sigma \mathbf{E}_a + (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E}_n) \cdot \mathbf{N}_i d\Omega - \sum_{k=1}^{N_Q} f_k \int_{\Gamma_3} \nabla \varphi_k \times \mathbf{n}_{1,0} \cdot \mathbf{N}_i dS, i = \overline{1, N_X} \right\}^T;$$

$$G(\mathbf{A}) = \left\{ - \sum_{j=1}^{N_X} a_j \int_{\Gamma_3} \varphi_k \operatorname{rot} \mathbf{N}_j \cdot \mathbf{n}_{1,0} dS, k = \overline{1, N_Q} \right\}^T.$$

Организуем итерационный процесс по подобластям:

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \mathbf{0}, \mathbf{A}^0 = \mathbf{0}, \\ \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{A}^n - \mathbf{B}^T \mathbf{P}^n = \mathbf{F}(\Phi^{n-1}), \\ -\mathbf{B} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \end{cases} \\ \mathbf{A}^n &= (1 - \theta) \mathbf{A}^{n-1} + \theta \mathbf{A}^n, \quad \theta \in]0, 1], \\ \mathbf{C} \Phi^n &= \mathbf{G}(\mathbf{A}^n), \quad n = 1, \dots \end{aligned}$$

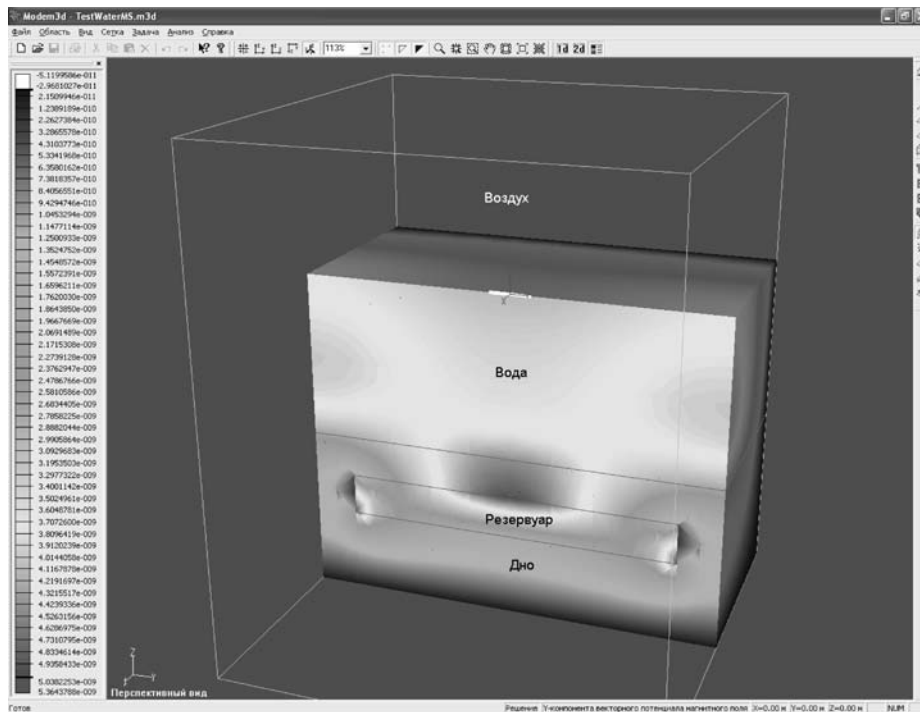
Таким образом, на каждой внешней итерации типа «земля–воздух» решается система уравнений с седловой точкой для векторного магнитного потенциала и множителя Лагранжа в проводящей среде, а также система уравнений для скалярного магнитного потенциала в воздухе. Решение системы уравнений с седловой точкой осуществляется итерационным методом, предложенным в работе [8], а решение уравнений для скалярного магнитного потенциала – предобусловленным методом сопряженных градиентов. Критерием останова внутренних итерационных методов в подобластях служит отношение сферической нормы вектора невязки к сферической норме вектора правой части. Критерием останова внешнего итерационного процесса по подобластям является следующее отношение сферических норм:

$$T = \left\| \mathbf{G}(\mathbf{A}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{A}^{n-1}) \right\|_2 / \left\| \mathbf{G}(\mathbf{A}^n) \right\|_2 < \varepsilon.$$

Вопросы сходимости данного итерационного метода изучаются численно.

Пример численного расчета. Рассмотрим эффективность представленного итерационного процесса на модельной задаче. Расчетная область составлена из трех слоев. Высота каждого слоя равна 2000 м. Верхний слой (воздух) обладает нулевой проводимостью ($\sigma_0 = 0$). Средний слой (морская вода) высокопроводящий ($\sigma_1 = 3,2$ См/м). Проводимость нижнего слоя (морское дно) составляет $\sigma_2 = 0,5$ См/м. В нижнем слое содержится низкопроводящее ($\sigma_3 = 0,01$ См/м) включение. Такая проводимость характерна для углеводородных месторождений. Размер неоднородности $2000 \times 4000 \times 500$ м. Расчетная область ограничена площадкой 5000×5000 м в горизонтальном направлении.

Источник тока располагается на границе верхнего и среднего слоев и представляет собой заземленную ГЭЛ длиной 500 м. Горизонтальная компо-



нента векторного потенциала показана на рисунке. Расчетная область дана в разрезе вертикальной плоскостью, проходящей через источник. Изображены только проводящие подобласти. Различные оттенки на шкале соответствуют различным значениям Y -компоненты векторного потенциала, что отражено в левой части рисунка. Контурами обозначены расчетная область, слои с различными проводимостями и неоднородность в нижнем слое. На поверхности среднего слоя выделен источник тока. Ориентация координатных осей приведена в левой нижней части рисунка. Задача посчитана на достаточно грубой сетке. Всего в расчетах было использовано около 10000 узлов и 70000 ребер. Для остановки внешнего итерационного процесса при $\varepsilon = 10^{-10}$ потребовалось 23 итерации типа «земля– воздух». Внутренние задачи в воздухе и проводящих средах также решались с $\varepsilon = 10^{-10}$. В таблице приведена зависимость относительной погрешности T от номера внешней итерации N для итерационного параметра $\theta = 0,7$.

N	T	N	T	N	T
3	$3,94 \cdot 10^{-1}$	11	$3,24 \cdot 10^{-5}$	19	$6,59 \cdot 10^{-9}$
5	$2,51 \cdot 10^{-2}$	13	$3,73 \cdot 10^{-6}$	21	$3,31 \cdot 10^{-10}$
7	$2,46 \cdot 10^{-3}$	15	$4,45 \cdot 10^{-7}$	23	$5,49 \cdot 10^{-11}$
9	$2,84 \cdot 10^{-4}$	17	$5,37 \cdot 10^{-8}$		

Заключение. В данной работе для рассматриваемой задачи численными экспериментами показана принципиальная возможность построения сходящихся методов для итераций по подобластям, когда в них находится решение из различных функциональных пространств. Выделение из общего решения сингулярной части позволяет производить численный расчет аномальных полей без сгущения сетки в окрестности источника. Предложенный подход после простых доработок позволяет расширить класс решаемых задач для сред с различной магнитной проницаемостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Edwards N.** Marine controlled source electromagnetics: principles, methodologies, future commercial applications // *Surveys in Geophysics*. 2005. **26**. P. 675.
2. **Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э.** Совместное использование узловых и векторных конечных элементов для расчета трехмерных нестационарных электромагнитных полей // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2004. **7**, № 3. С. 132.
3. **Nedelec J. C.** Mixed finite elements in R^3 // *Numer. Math.* 1980. **35**. P. 315.
4. **Nedelec J. C.** A new family of mixed finite elements in R^3 // *Numer. Math.* 1986. **50**. P. 57.
5. **Alonso A., Valli A.** A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1997. **143**. P. 97.
6. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
7. **Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д.** Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М.: Недра, 1985.
8. **Greif C., Schotzau D.** Preconditioners for the discretized time-harmonic Maxwell equations in mixed form // <http://www.cs.ubc.ca/~greif/Papers/gs2006NLAA.pdf>

Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.