

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 004.932.2

ОЦЕНИВАНИЕ СУБПИКСЕЛЬНОГО СДВИГА  
ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. А. Иванов, В. С. Киричук, В. П. Косых

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск**E-mail: kirichuk@iae.nsk.su*

Исследуется точность оценивания сдвига между двумя дискретными изображениями одной и той же сцены в ситуации, когда величина сдвига не превышает шага дискретизации. Предлагается новый алгоритм оценивания величины сдвига, обладающий малыми ошибками оценок и требующий малых вычислительных затрат. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие его преимущества перед известными алгоритмами.

**Введение.** Оценивание смещения между двумя изображениями одной и той же сцены, полученными в идентичных условиях, является составной частью таких задач, как накопление изображений с целью подавления шума [1], обнаружение движения и оценивание его параметров [2], получение изображений высокого разрешения из серии изображений низкого разрешения [3] и т. п. При оценивании взаимного смещения между дискретными изображениями с точностью до шага дискретизации обычно используются корреляционная привязка [4] или оценивание фазового множителя в частотной области [5]. При реализации этих методов не требуется никакой дополнительной информации, кроме сравниваемых изображений. Для оценивания сдвигов, меньших, чем шаг дискретизации, следует доопределить поведение изображений в промежутках между отсчетами. От способа доопределения изображений зависят ошибки оценивания дробного сдвига и необходимые вычислительные затраты [6]. Широкое распространение, обусловленное в основном простотой реализации, получили методы, базирующиеся на линейном описании изображений между отсчетами [7, 8]. Другой известный подход основан на пересчете изображения посредством интерполяции на более мелкую решетку и последующей корреляционной привязке [6, 9]. Цель данной работы состоит в исследовании ошибок оценивания сдвига в зависимости от способа описания изображений и выбора критерия согласованности между опорным и сдвинутым изображениями.

**Постановка задачи.** Пусть  $f_{0c}(x, y)$  – исходное непрерывное изображение и  $f_c(x, y) = f_{0c}(x - a, y - b)$  – его пространственно сдвинутая на  $a, b$

версия. Определим заданные на прямоугольной решетке конечным числом отсчетов дискретные варианты исходного и сдвинутого изображений как  $f_0(j, k) = f_{0c}(j\Delta x, k\Delta y)$  и  $f(j, k) = f_c(j\Delta x, k\Delta y)$ , где  $\Delta x, \Delta y$  – величины шага дискретизации по осям  $x$  и  $y$  соответственно,  $j = \overline{0, N-1}$ ,  $k = \overline{0, M-1}$ . Для данной работы интерес представляют величины сдвига, не превышающие шага дискретизации. Если  $|a| < \Delta x$  и  $|b| < \Delta y$ , то

$$f(j, k) = f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b). \quad (1)$$

Задача заключается в оценивании величин сдвига  $a$  и  $b$  по дискретным реализациям изображений  $\tilde{f}_0(j, k) = f_0(j, k) + \xi(j, k)$  и  $\tilde{f}(j, k) = f(j, k) + \eta(j, k)$ , искаженных аддитивными шумами  $\xi(j, k)$  и  $\eta(j, k)$ .

При неизвестных распределениях шумовых составляющих  $\xi(j, k)$  и  $\eta(j, k)$  для оценивания параметров сдвига  $a$  и  $b$  воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК). В силу (1) естественно потребовать, чтобы оценки параметров доставляли минимум функционалу

$$J_{LS}(a, b) = \sum_{j, k} [\tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b)]^2. \quad (2)$$

Если распределения шумов в реализациях изображений известны, можно воспользоваться методом максимального правдоподобия (ММП). В частности, если  $\xi(j, k), \eta(j, k) \in N(0, \sigma^2)$  и не коррелированы, то функционал ММП имеет вид

$$J_{ML}(a, b, f_{0c}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j, k} \left\{ [\tilde{f}_0(j, k) - f_{0c}(j\Delta x, k\Delta y)]^2 + [\tilde{f}(j, k) - f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b)]^2 \right\}. \quad (3)$$

Заметим, что для оценивания параметров сдвига здесь необходимо описание исходного изображения (при использовании ММП) или его текущей реализации (при использовании МНК) между отсчетами. При этом в функционале ММП присутствуют неизвестные отсчеты исходного изображения  $f_{0c}(j\Delta x, k\Delta y)$ , также подлежащие оцениванию.

**Описание поведения изображений между отсчетами.** Рассмотрим далее два способа описания поведения изображения между отсчетами: посредством локальной аппроксимации степенным рядом и аппроксимации рядом Фурье. В первом случае непрерывное изображение в точке с координатами  $(x, y)$ , лежащей в окрестности узла дискретизации  $(j, k)$ , представляется разложением

$$f_c(x, y) = f_c(j\Delta x, k\Delta y) + \sum_m \sum_n C_{mn}(j, k)(x - j\Delta x)^m (y - k\Delta y)^n. \quad (4)$$

Коэффициенты  $C_{mn}(j, k)$  являются коэффициентами разложения функции  $f_c$  в ряд Тэйлора и оцениваются по значениям дискретизованного изображе-

ния в узлах решетки, лежащих вблизи узла  $(j, k)$ . Непрерывное сдвинутое на  $a, b$  изображение при таком представлении принимает вид

$$f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b) = f_{0c}(j\Delta x, k\Delta y) + \sum_m \sum_n C_{mn}(j, k)(-a)^m(-b)^n. \quad (5)$$

При аппроксимации рядом Фурье изображение между отсчетами представляется как

$$f_c(x, y) = \sum_m \sum_n F(m, n) \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{nj}{N} + \frac{n}{N\Delta x}(x - j\Delta x) + \frac{mk}{M} + \frac{m}{M\Delta y}(y - k\Delta y) \right] \right\}, \quad (6)$$

где  $F(m, n)$  – коэффициенты дискретного преобразования Фурье изображения  $f(j, k)$ .

**Привязка в пространственной области.** Алгоритм, основанный на МНК. Рассмотрим сначала функционал МНК, в котором непрерывное изображение представлено разложением (5):

$$J_{LS}(a, b) = \sum_{j, k} \left\{ [\tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_0(j, k)] - \sum_m \sum_n C_{mn}(j, k)(-a)^m(-b)^n \right\}^2. \quad (7)$$

Оценки коэффициентов в этом случае получаются из значений реализации  $\tilde{f}_0$  в узлах, соседних с узлом  $(j, k)$ . Ограничиваясь в (7) линейными членами разложения по параметрам сдвига, получим

$$J_{LS}(a, b) = \sum_{j, k} \left\{ [\tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_0(j, k)] + [C_{10}(j, k)a + C_{01}(j, k)b] \right\}^2. \quad (8)$$

Минимизация функционала (8) сводится к решению системы из двух линейных относительно параметров сдвига уравнений. Оценки параметров сдвига имеют вид

$$\hat{a} = - \frac{\sum_{j, k} \tilde{d}(j, k) C_{10}(j, k) \sum_{j, k} C_{01}^2(j, k) - \sum_{j, k} \tilde{d}(j, k) C_{01}(j, k) \sum_{j, k} C_{01}(j, k) C_{10}(j, k)}{D}; \quad (9)$$

$$\hat{b} = - \frac{\sum_{j, k} \tilde{d}(j, k) C_{01}(j, k) \sum_{j, k} C_{10}^2(j, k) - \sum_{j, k} \tilde{d}(j, k) C_{10}(j, k) \sum_{j, k} C_{01}(j, k) C_{10}(j, k)}{D},$$

где  $\tilde{d}(j, k) = \tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_0(j, k)$ ;

$$D = \sum_{j, k} C_{01}^2(j, k) \sum_{j, k} C_{10}^2(j, k) - \left[ \sum_{j, k} C_{01}(j, k) C_{10}(j, k) \right]^2.$$

Качество оценок сдвига зависит от способа оценивания коэффициентов  $C(j, k)$ . Так, например, оценивая эти коэффициенты независимо по значениям  $\tilde{f}_0$  в ближайших к  $(j, k)$  узлах, получим

$$\begin{aligned} C_{10}(j, k) &= \frac{\tilde{f}_0(j+1, k) - \tilde{f}_0(j-1, k)}{2} = \tilde{f}'_{0x}(j, k); \\ C_{01}(j, k) &= \frac{\tilde{f}_0(j, k+1) - \tilde{f}_0(j, k-1)}{2} = \tilde{f}'_{0y}(j, k). \end{aligned} \quad (10)$$

Функционал (8) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} J_{LS}(a, b) &= \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{M-2} \left[ \tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_0(j, k) + \frac{\tilde{f}_0(j+1, k) - \tilde{f}_0(j-1, k)}{2} a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{f}_0(j, k+1) - \tilde{f}_0(j, k-1)}{2} b \right]^2, \end{aligned} \quad (8')$$

а оценки приобретают хорошо известную форму [6]:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= - \frac{\overline{\tilde{d}(j, k) \tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k)} - \overline{\tilde{d}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k) \tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k)}}}{\overline{\tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k)} - \overline{(\tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k))^2}}; \\ \hat{b} &= - \frac{\overline{\tilde{d}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k) \tilde{f}'_{0x}(j, k)} - \overline{\tilde{d}(j, k) \tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k) \tilde{f}'_{0x}(j, k)}}}{\overline{\tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k)} - \overline{(\tilde{f}'_{0x}(j, k) \tilde{f}'_{0y}(j, k))^2}}, \end{aligned} \quad (9')$$

где черта сверху обозначает усреднение по всем  $j, k$ . Заметим, что при таком определении коэффициентов  $C(j, k)$  изображение  $\tilde{f}_0$  должно содержать по каждой координате на два отсчета больше, чем  $\tilde{f}$ .

Ковариационную матрицу оценок сдвига в предположении, что уровень шума мал ( $\sigma \ll \sqrt{\tilde{f}'_x{}^2 + \tilde{f}'_y{}^2}$ ), при этом приближенно можно представить как

$$\mathbf{K}_{LS} \approx \frac{\sigma^2}{MN (\overline{\tilde{f}'_x{}^2 \tilde{f}'_y{}^2} - \overline{\tilde{f}'_x \tilde{f}'_y})^2} \begin{bmatrix} \overline{\tilde{f}'_y{}^2} & -\overline{\tilde{f}'_x \tilde{f}'_y} \\ -\overline{\tilde{f}'_x \tilde{f}'_y} & \overline{\tilde{f}'_x{}^2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Этот алгоритм дает смещенные оценки  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ . Можно выделить две компоненты смещения оценок. Первая обусловлена недостаточностью линейного описания

$$\tilde{f}_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b) = \tilde{f}_0(j, k) - \tilde{f}'_{0x}(j, k)a - \tilde{f}'_{0y}(j, k)b$$

и увеличивается с ростом доли высокочастотных составляющих в изображении. Вторая возникает из-за нелинейной зависимости оценок (9) от отсчетов  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}_0$ , содержащих шум. Разлагая оценки (9) в ряд по степеням  $\xi(j, k)$ , можно показать, что для некоррелированного шума величины этой компоненты смещения составляют

$$\Delta a \approx \frac{a\sigma^2(\overline{f_x'^2} + \overline{f_y'^2})}{2\overline{f_x'^2}\overline{f_y'^2}}; \quad \Delta b \approx \frac{b\sigma^2(\overline{f_x'^2} + \overline{f_y'^2})}{2\overline{f_x'^2}\overline{f_y'^2}} \quad (12)$$

для  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  соответственно и не уменьшаются с увеличением размеров анализируемых изображений. Как следует из (12), данная компонента, наоборот, уменьшается с увеличением доли высокочастотных составляющих.

*Алгоритм, основанный на ММП.* Рассмотрим теперь метод оценивания сдвига, основанный на ММП. Используя для аппроксимации непрерывного изображения линейное приближение (5), в котором

$$C_{10}(j, k) = \frac{f_0(j+1, k) - f_0(j-1, k)}{2} = f'_{0x}(j, k); \quad (13)$$

$$C_{01}(j, k) = \frac{f_0(j, k+1) - f_0(j, k-1)}{2} = f'_{0y}(j, k),$$

функционал (3) можно привести к виду

$$J_{ML}(a, b, f_0) = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} [\tilde{f}_0(j, k) - f_0(j, k)]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{M-2} \left[ \tilde{f}(j, k) - f_0(j, k) + \frac{f_0(j+1, k) - f_0(j-1, k)}{2} a + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f_0(j, k+1) - f_0(j, k-1)}{2} b \right]^2 \right\}. \quad (14)$$

Здесь, как и в функционале МНК, размер сдвинутого изображения должен быть меньше размера исходного вдоль каждой координаты. Минимизация функционала требует решения системы из  $MN + 2$  уравнений, в которых  $MN$  оцениваемых значений  $f_0$  и два параметра сдвига связаны нелинейной зависимостью. Выразив оценки  $f_0$  через  $a$  и  $b$ , что требует обращения матрицы размера  $MN \times MN$ , получим систему из двух нелинейных уравнений, зависящих только от параметров сдвига.

Можно показать, что при условиях получения (11) матрица, являющаяся согласно неравенству Крамера – Рао [10, п. 3.3.3] минимальной границей

для ковариационной матрицы (МГ-ковариационная матрица) ММП-оценок параметров сдвига, представляется выражением

$$\mathbf{K}_{ML}^0 \approx \frac{2\sigma^2}{MN(\overline{f'_{0x}{}^2} \overline{f'_{0y}{}^2} - \overline{f'_{0x} f'_{0y}})^2} \begin{bmatrix} \overline{f'_{0y}{}^2} & -\overline{f'_{0x} f'_{0y}} \\ -\overline{f'_{0x} f'_{0y}} & \overline{f'_{0x}{}^2} \end{bmatrix} \approx 2\mathbf{K}_{LS}. \quad (15)$$

Поскольку оценки ММП являются асимптотически несмещенными, применение такого подхода позволяет, по крайней мере при больших размерах изображений, избавиться от компоненты смещения оценок, обусловленной шумом. Платой за это преимущество являются увеличение случайной ошибки в оценках и трудоемкость оценивания параметров сдвига, связанная с итерационной процедурой минимизации функционала (14), которая содержит обращение матриц больших размеров на каждой итерации. Следует отметить, что компонента смещения оценок, обусловленная недостаточностью линейного описания исходного изображения в окрестности узлов дискретизации, сохраняется и в этом случае.

**Привязка в частотной области.** Алгоритм, основанный на ММП. Пусть  $M = 2\tilde{M}$ ,  $N = 2\tilde{N}$ . Представим изображения  $\tilde{f}_0(j, k)$  и  $\tilde{f}(j, k)$  в виде

$$\tilde{f}_0(j, k) = \frac{1}{MN} \sum_{m=-\tilde{M}}^{\tilde{M}-1} \sum_{n=-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1} \tilde{F}_0(m, n) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{nj}{2\tilde{N}} + \frac{mk}{2\tilde{M}} \right) \right]; \quad (16)$$

$$\tilde{f}(j, k) = \frac{1}{MN} \sum_{m=-\tilde{M}}^{\tilde{M}-1} \sum_{n=-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1} \tilde{F}(m, n) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{nj}{2\tilde{N}} + \frac{mk}{2\tilde{M}} \right) \right],$$

а непрерывное изображение  $f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b)$  в виде

$$f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b) = \frac{1}{MN} \sum_{m=-\tilde{M}}^{\tilde{M}-1} \sum_{n=-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1} F_0(m, n) \times \\ \times \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{nj}{2\tilde{N}} + \frac{mk}{2\tilde{M}} \right) \right] \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{na}{2\tilde{N}} + \frac{mb}{2\tilde{M}} \right) \right],$$

где

$$\tilde{F}_0(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_0(j, k) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{nj}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right]; \\ \tilde{F}(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}(j, k) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{nj}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right]; \quad (16')$$

$$F_0(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_0(j, k) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{nj}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right]$$

есть коэффициенты дискретного преобразования Фурье изображений  $\tilde{f}_0, \tilde{f}$  и  $f_0$  соответственно.

Подставив эти представления в функционал ММП (3) и выполнив суммирование по  $j$  и  $k$ , получим новую форму функционала:

$$J_F(a, b, F_0) = \frac{1}{2MN\sigma^2} \sum_{m=-\tilde{M}}^{\tilde{M}-1} \sum_{n=-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1} \left\{ \left| \tilde{F}_0(m, n) \right|^2 + \left| \tilde{F}(m, n) \right|^2 + 2 \left| F_0(m, n) \right|^2 - \right. \\ \left. - \tilde{F}_0(m, n) F_0^*(m, n) - \tilde{F}_0^*(m, n) F_0(m, n) - \tilde{F}(m, n) F_0^*(m, n) \times \right. \\ \left. \times \exp[i\alpha(m, n; a, b)] - F_0(m, n) \tilde{F}^*(m, n) \exp[-i\alpha(m, n; a, b)] \right\},$$

где  $\alpha(m, n; a, b) = 2\pi \left( \frac{na}{N} + \frac{mb}{M} \right)$ .

Дифференцируя функционал по коэффициентам  $F_0(m, n)$  и приравнявая производные к нулю, легко получить оценки  $\hat{F}_0(m, n; a, b)$  как функции от параметров сдвига. В силу ортогональности преобразования Фурье обращения матриц больших размеров не требуются и система уравнений относительно  $\hat{F}_0(m, n; a, b)$  решается аналитически. Подставляя эти оценки в исходный функционал, получим функционал, зависящий только от параметров сдвига:

$$J_F(a, b) = \frac{1}{4MN\sigma^2} \sum_{m=-\tilde{M}}^{\tilde{M}-1} \sum_{n=-\tilde{N}}^{\tilde{N}-1} \left\{ \left| \tilde{F}_0(m, n) \right|^2 + \left| \tilde{F}(m, n) \right|^2 - \tilde{F}_0^*(m, n) \tilde{F}(m, n) \times \right. \\ \left. \times \exp[i\alpha(m, n; a, b)] - \tilde{F}_0(m, n) \tilde{F}^*(m, n) \exp[-i\alpha(m, n; a, b)] \right\}. \quad (17)$$

Оценивание параметров сдвига, минимизирующих функционал (17), требует решения системы из двух нелинейных уравнений:

$$\sum_{m, n} \left\{ \tilde{F}_0^*(m, n) \tilde{F}(m, n) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{na}{N} + \frac{mb}{M} \right) \right] - \right. \\ \left. - \tilde{F}_0(m, n) \tilde{F}^*(m, n) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{na}{N} + \frac{mb}{M} \right) \right] \right\} n = 0; \\ \sum_{m, n} \left\{ \tilde{F}_0^*(m, n) \tilde{F}(m, n) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{na}{N} + \frac{mb}{M} \right) \right] - \right. \\ \left. - \tilde{F}_0(m, n) \tilde{F}^*(m, n) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{na}{N} + \frac{mb}{M} \right) \right] \right\} m = 0, \quad (18)$$

которое может быть получено итерационным путем (здесь пределы суммирования те же, что и в (17)).

Вычисляя математическое ожидание от вторых производных функционала (17) по параметрам сдвига, можно получить МГ-ковариационную матрицу оценок

$$\mathbf{K}_F^0 = \left\{ \mathbb{E} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J_F}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 J_F}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 J_F}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 J_F}{\partial b^2} \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \frac{MN\sigma^2}{2\pi^2 D_F} \begin{bmatrix} N^2 \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 m^2 & -MN \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 mn \\ -MN \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 mn & M^2 \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 n^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где

$$D_F = \left( \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 m^2 \right) \left( \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 n^2 \right) - \left( \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 mn \right)^2,$$

а символом  $\mathbb{E}$  обозначена операция вычисления математического ожидания.

Интересно сравнить ковариационные матрицы (15) и (19). Предположим, что рассматриваемые изображения статистически изотропны:

$$\overline{f_x'^2} \approx \overline{f_y'^2}, \quad (\overline{f_x' f_y'})^2 \ll \overline{f_x'^2} \overline{f_y'^2},$$

или

$$\sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 m^2 \approx \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 n^2, \\ \left( \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 mn \right) \ll \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 m^2 \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 n^2,$$

и выразим дискретные производные (13) через представление изображения  $f_0$  в виде (16). Нетрудно показать, что при таком представлении средний квадрат производной, например, вдоль координаты  $x$  примет вид

$$\overline{f_{0x}'^2} = \frac{1}{2(MN)^2} \sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 \left( 1 - \cos \frac{4\pi n}{N} \right).$$

Дисперсия случайной компоненты оценки  $a$ , полученной при минимизации функционала (14), как вытекает из (15), приобретает вид

$$\sigma_{aML}^2 = \frac{\sigma^2 MN}{\sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 \left( 1 - \cos \frac{4\pi n}{N} \right) / 4}, \quad (20)$$



тогда как из (19) следует, что дисперсия оценки  $a$ , полученной минимизацией функционала (17), есть

$$\sigma_{aF}^2 = \frac{\sigma^2 MN}{\sum_{m,n} |F_0(m,n)|^2 2\pi^2 (n^2/N^2)}. \quad (20')$$

Если в изображениях присутствуют только низкочастотные компоненты, то эти дисперсии примерно одинаковы, в противном случае они могут существенно различаться. Подчеркнем, что матрицы (15) и (19) характеризуют нижнюю границу дисперсии оценок, поэтому действительные дисперсии оценок могут и превышать задаваемые этими матрицами предельные значения.

Заметим, что, подставив в функционал (2) вместо изображений  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}_{0c}$  их представление в форме (16), получим с точностью до постоянного множителя функционал (17). Это означает, что при такой аппроксимации непрерывного изображения оценки МНК и ММП совпадают. В оценках, полученных таким способом, компонента смещенности, обусловленная присутствием шума, при увеличении размеров изображений стремится к нулю. Более того, если дискретизация изображений выполнена в соответствии с критерием Найквиста, должна отсутствовать и систематическая составляющая смещения. Однако при использовании аппроксимации (16) появляется другой источник систематической составляющей. Аппроксимация (16) предполагает, что изображение является фрагментом бесконечного периодического поля. Поэтому, если между правым и левым (верхним и нижним) краем изображения возникают разрывы, в спектрах (16') появляются паразитные компоненты, не связанные с внутренней структурой (в частности, со сдвигом) изображения. Эти компоненты и приводят к появлению систематического смещения в оценках величины сдвига. Смещение, как можно показать, по порядку величины составляет  $(a/N) |\overline{\Delta f_x}|$  и  $(b/M) |\overline{\Delta f_y}|$  для оценок  $a$  и  $b$  соответственно, где

$$|\overline{\Delta f_x}| = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |f(N, k) - f(0, k)|; \quad |\overline{\Delta f_y}| = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |f(j, M) - f(j, 0)|,$$

и при малых размерах изображений может вносить существенный вклад в ошибки оценивания.

Влияние краевого эффекта можно ослабить с помощью известного способа, состоящего в построении симметричных изображений, которые получены из исходных путем их зеркального отражения по обеим координатам, и последующей их аппроксимации двумерным косинусным разложением. Другой способ состоит в предварительном умножении изображений на симметричную относительно центра весовую функцию, спадающую к краям изображений. Первый способ предпочтительней с точки зрения уменьшения случайной ошибки, второй – с точки зрения снижения вычислительных затрат.

**Устранение смещения, обусловленного недостаточностью линейного описания.** Компонента смещения при оценивании в пространственной области обусловлена тем, что линейное приближение

$$f_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b) = f_0(j, k) - f'_{0x}(j, k)a - f'_{0y}(j, k)b$$

аппроксимирует непрерывное изображение в точке  $(j\Delta x - a, k\Delta y - b)$  тем хуже, чем дальше находится эта точка от узла  $(j, k)$ . Уменьшить эту ошибку можно, увеличив порядок описания, т. е. увеличив длину ряда (5). Однако оценивание коэффициентов  $C(j, k)$  высших порядков требует дополнительных вычислений тем больших, чем более высокого порядка коэффициенты требуется оценивать. Поэтому предлагается другой способ уточнения описания (аналогичный подход используется в [11] при установлении соответствий между фрагментами стереопар). Построим основанную на МНК-алгоритме итерационную процедуру, для которой непрерывное изображение на  $i+1$ -м шаге вычисляется в форме

$$\tilde{f}_{0c}(j\Delta x - a, k\Delta y - b) = \tilde{f}_0^{(i)}(j, k) - \tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k)\Delta a_{i+1} - \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)\Delta b_{i+1}, \quad (21)$$

где

$$\hat{a}_i = \hat{a}_{i-1} + \Delta \hat{a}_i; \quad \hat{b}_i = \hat{b}_{i-1} + \Delta \hat{b}_i; \quad \hat{a}_0 = \hat{b}_0 = 0; \quad \tilde{f}_0^{(0)}(j, k) = \tilde{f}_0(j, k), \quad (22)$$

а изображение  $\tilde{f}_0^{(i)}(j, k)$  получается путем билинейной интерполяции дискретного изображения  $\tilde{f}_0(j, k)$  в точке  $(j\Delta x - \hat{a}_i, k\Delta y - \hat{b}_i)$ . Производные  $\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k)$  и  $\tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)$  вычисляются из  $\tilde{f}_0^{(i)}(j, k)$  аналогично (10), а поправки к параметрам сдвига  $\Delta \hat{a}_{i+1}, \Delta \hat{b}_{i+1}$  – согласно формулам

$$\Delta \hat{a}_{i+1} = - \frac{\overline{\tilde{d}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) [\tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)]^2} - \overline{\tilde{d}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)}}{\overline{[\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k)]^2 [\tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)]^2} - \overline{(\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k))^2}}, \quad (23)$$

$$\Delta \hat{b}_{i+1} = - \frac{\overline{\tilde{d}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k) [\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k)]^2} - \overline{\tilde{d}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)}}{\overline{[\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k)]^2 [\tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k)]^2} - \overline{(\tilde{f}'_{0x}{}^{(i)}(j, k) \tilde{f}'_{0y}{}^{(i)}(j, k))^2}},$$

где  $\tilde{d}^{(i)}(j, k) = \tilde{f}(j, k) - \tilde{f}_0^{(i)}(j, k)$ .

Аналитические оценки ошибок этого алгоритма получить достаточно трудно, однако есть предположение, что случайная компонента ошибок не должна превышать случайную компоненту для ММП.

**Экспериментальные результаты.** Для эксперимента использован космический снимок городского ландшафта размером  $3032 \times 2064$  элемента. Для получения изображений с известным относительным смещением исходный снимок подвергался предварительной фильтрации гауссовым фильтром с импульсным откликом

$$h(p, s) = A \exp\left(-\frac{p^2 + s^2}{2r^2}\right),$$

имитирующим функцию рассеяния точки оптической системы, и свертке с квадратным окном размером  $l \times l$  пикселей, имитирующим интегрирование на ячейке матричного фотоприемника. Из отфильтрованного таким образом

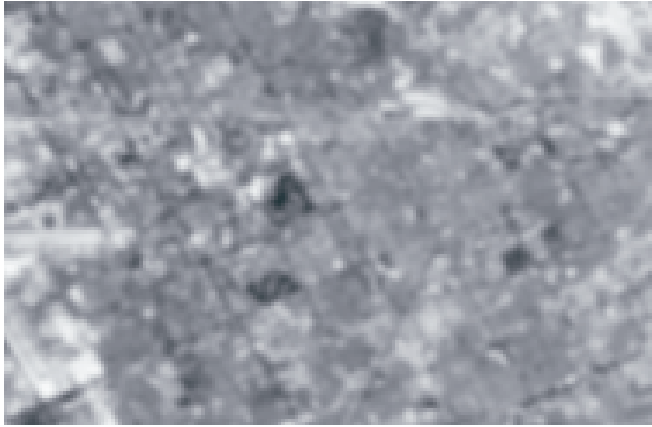


Рис. 1. Опорное изображение из серии корректно дискретизованных

изображения выбором с шагом  $L \geq l$  по каждой координате, начиная с точки  $(p_i, s_i)$ , строились «дискретизованные» изображения. Изменением начальных координат в диапазоне  $0 \leq p_i < L, 0 \leq s_i < L$  имитировался относительный сдвиг изображений. Основной режим «дискретизации», удовлетворяющий критерию Найквиста, задавался значениями параметров  $r = 15, L = 15, l = 13$ ;  $p_i, s_i$  изменялись с шагом 3. Так формировалась серия из 25 изображений размером  $190 \times 125$ , 24 из которых были сдвинуты относительно первого на 0,2, 0,4, 0,6 и 0,8 шага дискретизации по каждой координате. Далее к изображениям добавлялся некоррелированный нормальный шум с дисперсией  $\sigma^2$  и вычислялись оценки сдвига всех изображений относительно первого линейным алгоритмом МНК (9'), алгоритмом ММП в частотной области (18) и итерационным алгоритмом (21)–(23). Для получения среднеквадратичного отклонения случайной компоненты ошибок оценивания вычисления выполнялись для 100 различных реализаций шума. Изображение, относительно которого оценивались сдвиги всех остальных (опорное изображение), приведено на рис. 1.

Результаты оценивания сдвига различными алгоритмами при уровне шума, составляющем 0,1 от среднеквадратичного значения амплитуды изображения, приведены на рис. 2. Узлам сетки на рисунках соответствуют истинные относительные сдвиги изображений. Оцененный сдвиг каждого изображения при каждой реализации шума отображен точкой с координатами, равными величине оценки. Отрезки прямых из узлов сетки показывают, какому истинному сдвигу соответствует данная группа оценок. На нижнем правом графике показан одномерный спектр мощности первого изображения серии, усредненный по столбцам. Этот график иллюстрирует соблюдение критерия Найквиста при дискретизации (ненулевые значения спектра на краю частотного диапазона обусловлены присутствием некоррелированного шума).

Оценки МГ-ковариационных матриц, полученные согласно приведенным выше формулам, имеют вид

$$\hat{\mathbf{K}}_{ML}^0 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 9,28 & 0,23 \\ 0,23 & 7,93 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_F^0 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 6,08 & 0,15 \\ 0,15 & 5,03 \end{bmatrix}.$$

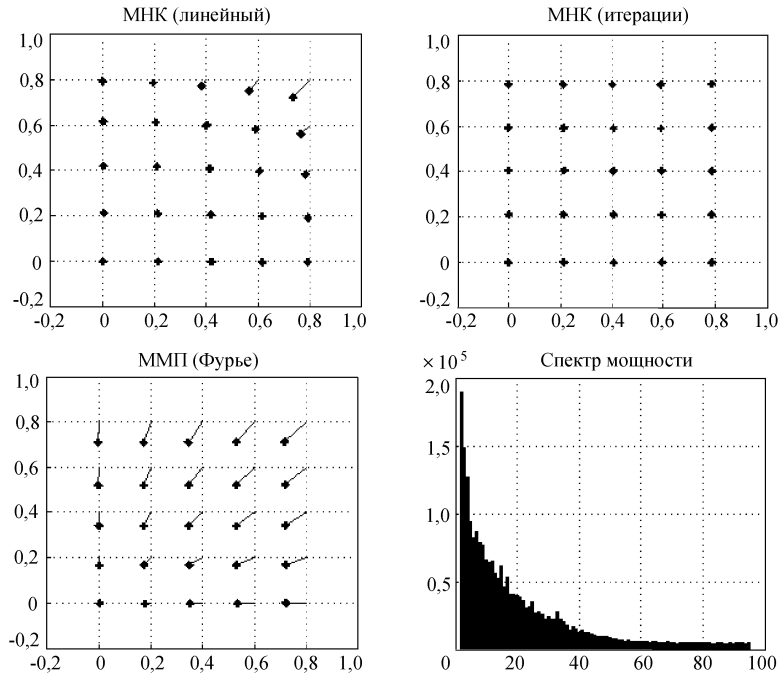


Рис. 2. Оценки сдвига при малом уровне шума

Средние квадраты отклонений оценок сдвига, полученные непосредственно из эксперимента, показаны в первой строке таблицы. Средние квадраты ошибок алгоритма (9') (второй и третий столбцы таблицы) примерно вдвое меньше, чем диагональные элементы  $\hat{\mathbf{K}}_{ML}^0$ , а средние квадраты ошибок алгоритма (18) (шестой и седьмой столбцы) близки диагональным элементам матрицы  $\hat{\mathbf{K}}_F^0$ , что соответствует соотношениям (15) и (19). Итерационный алгоритм МНК дает ошибки, сравнимые с ошибками линейного МНК (четвертый и пятый столбцы таблицы).

На верхнем левом графике рис. 2 хорошо заметна смещенность оценок, полученных алгоритмом (9'). Она обусловлена как наличием шума, так и недостаточностью линейного приближения между отсчетами. Влияние по-

$\sigma^2$	$\hat{\sigma}_{aLS}^2$	$\hat{\sigma}_{bLS}^2$	$\hat{\sigma}_{aLSiter}^2$	$\hat{\sigma}_{bLSiter}^2$	$\hat{\sigma}_{aF}^2$	$\hat{\sigma}_{bF}^2$
0,01	$4,65 \cdot 10^{-6}$	$4,21 \cdot 10^{-6}$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$4,28 \cdot 10^{-6}$ ( $9,60 \cdot 10^{-6}$ )	$3,46 \cdot 10^{-6}$ ( $8,45 \cdot 10^{-6}$ )
0,04	$16,7 \cdot 10^{-6}$	$14,3 \cdot 10^{-6}$	$18,4 \cdot 10^{-6}$	$15,1 \cdot 10^{-6}$	$62,0 \cdot 10^{-6}$	$57,78 \cdot 10^{-6}$
0,09	$31,4 \cdot 10^{-6}$	$27,1 \cdot 10^{-6}$	$46,0 \cdot 10^{-6}$	$38,9 \cdot 10^{-6}$	$215,0 \cdot 10^{-6}$	$195,0 \cdot 10^{-6}$
0,16	$0,432 \cdot 10^{-4}$	$0,396 \cdot 10^{-4}$	$0,903 \cdot 10^{-4}$	$0,769 \cdot 10^{-4}$	$6,64 \cdot 10^{-4}$	$5,74 \cdot 10^{-4}$
0,25	$0,525 \cdot 10^{-4}$	$0,471 \cdot 10^{-4}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$1,40 \cdot 10^{-4}$	$14,5 \cdot 10^{-4}$	$12,9 \cdot 10^{-4}$

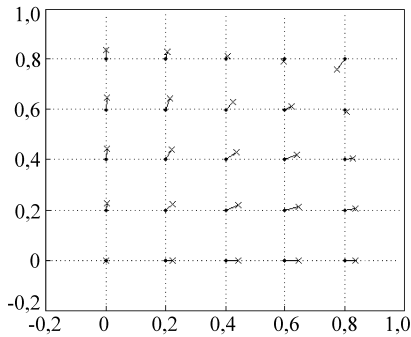


Рис. 3. Влияние недостаточности линейного описания в алгоритме МНК

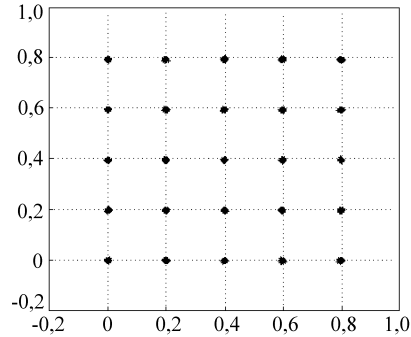


Рис. 4. Коррекция краевого эффекта в алгоритме ММП в частотной области

следней компоненты в чистом виде иллюстрирует рис. 3, где представлены оценки, полученные алгоритмом (9') в отсутствие шума.

В данном эксперименте не принимались меры по устранению влияния краевого эффекта при оценивании в частотной области, поэтому оценки, полученные этим методом, оказались смещенными (см. рис. 2, внизу слева). Коррекция краевого эффекта посредством умножения изображений на весовую функцию устраняет смещение (рис. 4), но приводит к значительному увеличению случайной ошибки в оценках (см. таблицу, данные в скобках в первой строке).

Эти результаты получены при сравнительно низком уровне шума и в целом соответствуют вышеприведенным аналитическим оценкам. Однако иногда возникают ситуации, когда необходимо оценивать относительный

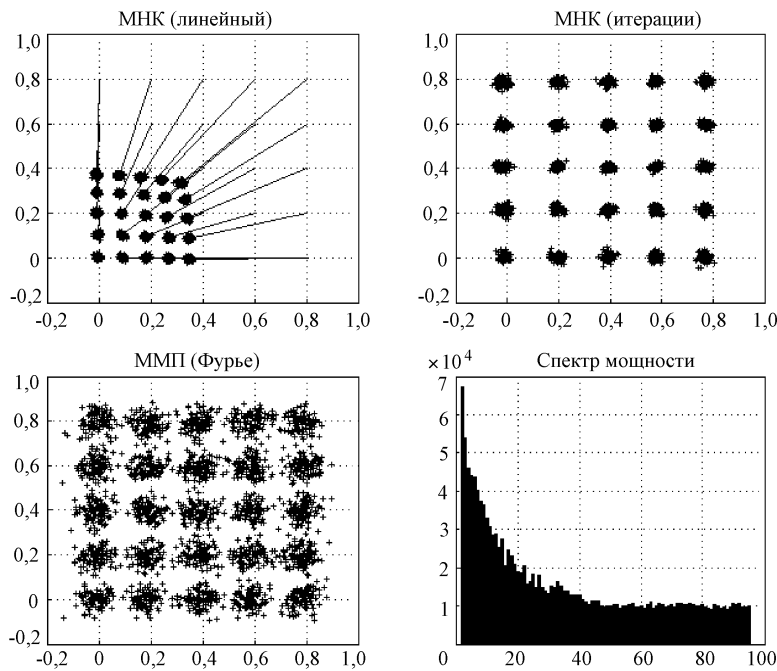


Рис. 5. Оценки сдвига при большом уровне шума

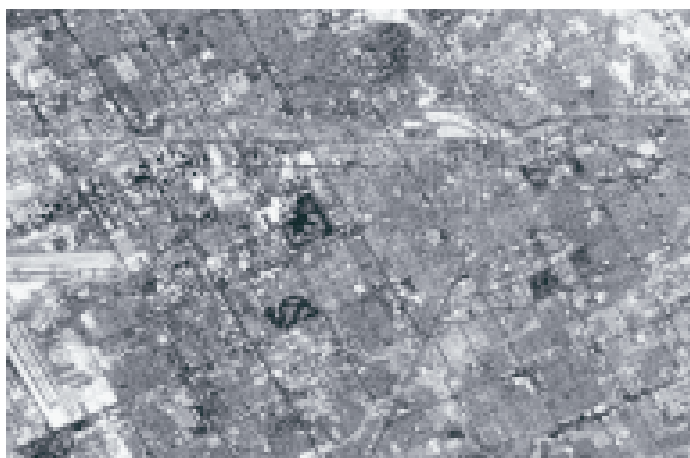


Рис. 6. Опорное изображение из серии «недискретизованных»

сдвиг сильно зашумленных изображений. Результаты оценивания сдвига различными алгоритмами при уровне шума, составляющем 0,5 от среднеквадратичного значения амплитуды изображения, приведены на рис. 5. Среднеквадратичные отклонения оценок сдвига при этом уровне шума даны в последней строке таблицы. В этом эксперименте алгоритм в частотной области применялся с коррекцией краевого эффекта.

Как следует из таблицы, алгоритм ММП в частотной области дает значительно бóльшие случайные ошибки, чем итерационный алгоритм МНК, а на

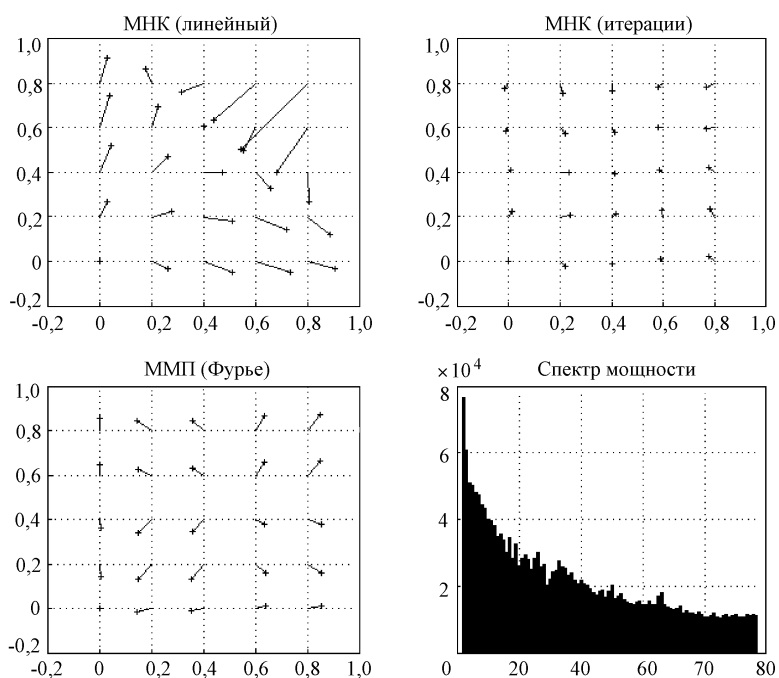


Рис. 7. Оценки сдвига между недискретизованными изображениями ( $\sigma = 0,1$ )

рис. 5 хорошо видно, что линейный МНК приводит к неприемлемо большим смещениям оценок. Лучшие результаты показывает итерационный алгоритм МНК.

*Влияние недостаточной частоты дискретизации.* Одно из изображений серии, сформированной описанным ранее способом при  $r = 3,75$ , показано на рис. 6, а результаты оценивания относительного сдвига в отсутствие шума содержит рис. 7. Недостаточность частоты дискретизации демонстрирует график внизу справа (спектр не спадает до нуля на границе частотного диапазона). Как следует из рис. 7, наименьшую смещенность оценок дает итерационный алгоритм МНК.

**Заключение.** Проведенное аналитическое исследование методов оценивания субпиксельного сдвига дискретных изображений и численные эксперименты показали, что широко используемый алгоритм МНК, базирующийся на линейном тэйлоровском разложении изображения, не обеспечивает получение состоятельных оценок из-за наличия зависящих от величины сдвига систематических смещений, которые обусловлены влиянием шума и неадекватностью линейной аппроксимации изображения между отсчетами. При больших уровнях случайного шума смещение оценок становится сравнимым с величиной сдвига.

Применение ММП как в пространственной, так и в частотной области дает состоятельные асимптотически несмещенные оценки, но в пространственной области алгоритм практически нереализуем из-за необходимости обращения матриц больших размеров. При оценивании сдвига алгоритмом ММП, основанным на разложении Фурье, с увеличением уровня шума обнаруживается увеличение ошибок значительно более быстрое, чем при применении алгоритмов, которые основаны на разложении в ряд Тэйлора. Кроме того, при несоблюдении критерия Найквиста возникает смещенность оценок.

Для предложенного итерационного алгоритма не удалось получить аналитической зависимости точности оценок сдвига от характеристик изображений и шума. Однако численные эксперименты показывают состоятельность и несмещенность оценок, при этом систематическая составляющая ошибок меньше зависит от соблюдения критерия Найквиста, а величина случайной компоненты сравнима с наименьшей границей ошибок даже при очень высоких уровнях шума. Вычислительные затраты, необходимые для получения оценок посредством предложенного алгоритма, в несколько раз превышают затраты алгоритма, базирующегося на линейном тэйлоровском разложении, и существенно меньше затрат алгоритмов, основанных на ММП.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Киричук В. С., Косых В. П., Пустовских А. И.** Восстановление слабоконтрастных электронно-микроскопических изображений // Автометрия. 1983. № 6. С. 77.
2. **Zhu Z., Xu G., Yang Y., Jin J. S.** Camera stabilization based on 2.5D motion estimation and inertial motion filtering // IEEE Intern. Symp. on Intelligent Vehicles. Stuttgart. 1998. P. 329.
3. **Kim S. P., Bose N. K., Valensuela H. M.** Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes // IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing. 1990. 38, N 6. P. 1013.
4. **Прэйт У.** Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982.

5. **Reddy B. S., Chatterji B. N.** An FFT-based technique for translation, rotation and scale-invariant image registration // IEEE Trans. on Image Processing. 1996. **5**. P. 1266.
6. **Губанов А. В., Ефимов В. М., Киричук В. С. и др.** Методы оценивания взаимного смещения фрагментов цифровых изображений // Автометрия. 1988. № 3. С. 70.
7. **Alam M. S., Bogner J. G., Hardie R. C., Yasuda B. J.** High resolution infrared image reconstruction using multiple, randomly shifted, low resolution, aliased frames // SPIE. 1997. **3063**. P. 102.
8. **Luengo Hendriks C. L., Van Vliet L. J.** Improving resolution to reduce aliasing in an under-sampled image sequence // SPIE. 2000. **3965**. P. 1.
9. **Young S. S.** Aliased-free image subsampling using Fourier-based windowing methods // Opt. Eng. 2004. **43**. P. 843.
10. **Справочник** по прикладной статистике /Под ред. Э. Ллойд, У. Ледерман. М.: Финансы и статистика, 1989. Т. 1.
11. **Ропов S. A.** Statistically optimal region-growing image matching // Proc. of the 6th German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Processing". Novosibirsk, 2003. P. 115.

*Поступила в редакцию 16 апреля 2007 г.*

---