

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 517.518.8

КОМБИНИРОВАННЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОНТРАСТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Ю. Е. Воскобойников

*Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет, г. Новосибирск  
E-mail: voscob@mail.ru*

Рассматривается задача восстановления изображения, когда правая часть двумерного интегрального уравнения и аппаратная функция (ядро интегрального уравнения) заданы со случайными ошибками. Предлагается устойчивый алгоритм восстановления изображений, который является объединением регуляризирующего алгоритма (РА) решения интегрального уравнения (частотная фильтрация) и локального нелинейного фильтра (пространственная фильтрация). Вводятся характеристики двумерной функции рассеяния РА и предлагается выбор параметра регуляризации исходя из требуемой разрешающей способности РА. Для удаления случайной ошибки восстановления регуляризованное решение подвергается нелинейной локальной фильтрации, сохраняющей высокочастотные информативные составляющие восстанавливаемого изображения.

**Введение.** Для большинства систем, регистрирующих изображения, при обычных предположениях о стационарности и линейности связь между измеряемым (исходным)  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  и зарегистрированным изображением  $f(t_1, t_2)$  описывается интегральным уравнением Фредгольма I рода с разностным ядром вида [1, 2]

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} k(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = f(t_1, t_2), \quad (1)$$

где  $k(\tau_1, \tau_2)$  – аппаратная функция регистрирующей системы. В силу конечной полосы пропускания регистрирующей системы (функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  отличается от  $\delta$ -функции) изображение  $f(t_1, t_2)$  может существенно отличаться от  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ . Поэтому возникает задача восстановления изображения  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ , т. е. необходимо решить уравнение (1) относительно функции  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ . Эта задача относится к классу некорректно поставленных задач [3],

для решения которых используются регуляризирующие алгоритмы (РА) [3–6]. Обычно полагают, что вместо изображения  $f(t_1, t_2)$  регистрируется «зашумленная» правая часть уравнения (1)  $\tilde{f}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) + \eta(t_1, t_2)$ , а функция  $k(t_1, t_2)$  (ядро уравнения (1)) известна точно [1, 2, 6]. Однако в ряде практических задач вместо  $k(\tau_1, \tau_2)$  известна функция  $\tilde{k}(\tau_1, \tau_2) = k(\tau_1, \tau_2) + \zeta(\tau_1, \tau_2)$ . Предположим, функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  оценивается при помощи процедуры непараметрической идентификации (и поэтому известна с некоторой ошибкой) или аппаратная функция изменяется под влиянием случайных неконтролируемых факторов (например, функция пропускания атмосферы).

В работе [7] для случая, когда  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\zeta(\tau_1, \tau_2)$  являются стационарными двумерными случайными процессами с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_\eta^2$ ,  $\sigma_\zeta^2$ , был предложен РА, учитывающий погрешность задания аппаратной функции как на этапе построения устойчивого решения, так и при выборе параметра регуляризации. Предложенный подход к выбору такого параметра позволяет оценить оптимальный параметр регуляризации  $\alpha_{\text{opt}}$ , который минимизирует среднеквадратическую ошибку (СКО) восстановления.

Однако в ряде случаев регуляризованное изображение, построенное при  $\alpha_{\text{opt}}$ , воспринимается глазом «хуже», чем изображение, построенное при меньших (например, на порядок) значениях параметра регуляризации. Это объясняется тем, что в первом изображении отсутствуют (или сильно сглажены) контрастные (высокочастотные) детали (границы, ребра и т. д.). Но во втором изображении возможно появление на «плоских фрагментах» заметных шумовых осцилляций, которые обусловлены случайной ошибкой регуляризованного изображения. В этом проявляется известное противоречие между разрешающей способностью РА и его устойчивостью к погрешности исходных данных. Поэтому возникает задача выбора такого значения параметра регуляризации (назовем его эффективным), которое гарантировало бы сохранение в восстановленном изображении контрастных деталей заданных размеров. Но для удаления возросших шумовых осцилляций необходимо дополнительно обработать регуляризованное изображение таким образом, чтобы сохранить в нем контрастные детали, но при этом максимально отфильтровать случайную ошибку восстановления.

В работе [8] для случая точно заданной аппаратной функции  $k(\tau_1, \tau_2)$  (т. е.  $\sigma_\zeta^2 = 0$ ) был предложен алгоритм, в котором выбор эффективного значения параметра регуляризации осуществляется из требуемой разрешающей способности, а для фильтрации случайной ошибки регуляризованного изображения были использованы нелинейные локальные алгоритмы. Предложенный подход оказался весьма эффективным, так как хорошо сохранял контрастные детали и успешно фильтровал случайную ошибку регуляризованного изображения.

Поэтому в данной работе этот подход обобщается на случай, когда аппаратная функция задается со случайной ошибкой ( $\sigma_\zeta^2 \neq 0$ ). Строится комбинированный алгоритм, объединяющий в себе два алгоритма: первый – решение уравнения (1) в частотной области; второй – нелинейная фильтрация полученного изображения в пространственной области. Такой алгоритм назовем комбинированным алгоритмом восстановления изображения.

Первоначально (следуя работе [7]) рассмотрим построение РА решения уравнения (1) в частотной области.

**Регуляризирующий алгоритм восстановления изображений.** Используя формулу прямоугольников, аппроксимируем интегральное уравнение (1) следующим конечномерным аналогом:

$$\sum_{m_1=1}^{N_{\varphi_1}} \sum_{m_2=1}^{N_{\varphi_2}} k(t_{j_1} - \tau_{m_1}, t_{j_2} - \tau_{m_2}) \varphi(\tau_{m_1}, \tau_{m_2}) \Delta_2 \Delta_1 =$$

$$= f(t_{j_1}, t_{j_2}), \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_{f_1}, \quad j_2 = 1, 2, \dots, N_{f_2}. \quad (2)$$

Шаги дискретизации  $\Delta_1$  (по первой переменной  $\tau_1$ ) и  $\Delta_2$  (по второй переменной  $\tau_2$ ) задаются или выбираются из условия малости погрешности аппроксимации интеграла (1) квадратурной формулой (2) по сравнению с уровнем шума измерения правой части. Таким образом, в данной постановке задача восстановления изображения заключается в вычислении значений изображения  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  в узлах  $(\tau_{m_1}, \tau_{m_2})$  двумерной прямоугольной сетки, т. е. в решении двумерной дискретной свертки (2) относительно сеточной функции  $\varphi(\tau_{m_1}, \tau_{m_2})$  при неточно заданных исходных данных.

Для построения регуляризованного решения на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) примем следующие допущения:

1. Функция  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  ограничена и определена на прямоугольной области  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Тогда  $N_{\varphi_1} = \text{ent}[(b_1 - a_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{\varphi_2} = \text{ent}[(b_2 - a_2)/\Delta_2]$ , где  $\text{ent}[z]$  – целая часть числа  $z$ .

2. Аппаратная функция  $k(\tau_1, \tau_2)$  непрерывна, ограничена и определена на прямоугольной области  $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ . Тогда  $N_{k_1} = \text{ent}[(d_1 - c_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{k_2} = \text{ent}[(d_2 - c_2)/\Delta_2]$ . Как правило, для уравнений Фредгольма  $c_1 < 0$ ,  $c_2 < 0$ , а для уравнений Вольтерра  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ .

3. Функции  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\zeta(\tau_1, \tau_2)$  являются стационарными случайными процессами с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_\eta^2$  и  $\sigma_\zeta^2$ . Предполагается, что интервал корреляции случайных процессов  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\zeta(\tau_1, \tau_2)$  по каждой переменной меньше  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно.

Заметим, что при предположениях 1, 2 зарегистрированное изображение  $f(t_1, t_2)$  также является функцией, определенной на прямоугольной области  $[x_1, y_1] \times [x_2, y_2]$ , где  $x_1 = a_1 + c_1$ ,  $x_2 = a_2 + c_2$ ,  $y_1 = b_1 + d_1$ ,  $y_2 = b_2 + d_2$ . Тогда  $N_{f_1} = \text{ent}[(y_1 - x_1)/\Delta_1]$ ,  $N_{f_2} = \text{ent}[(y_2 - x_2)/\Delta_2]$ .

Алгоритм построения регуляризованного решения для двумерной дискретной свертки (2) можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Формирование двумерной периодической последовательности с периодом  $N_1 \times N_2$  из значений зарегистрированного изображения в узлах сетки:

$$\tilde{f}_p(j_1 - 1, j_2 - 1) = \begin{cases} \tilde{f}(t_{j_1}, t_{j_2}), & \text{если } j_1 = 1, \dots, N_{f_1}, \quad j_2 = 1, \dots, N_{f_2}, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

При этом  $j_1 = 1, \dots, N_1$ ,  $j_2 = 1, \dots, N_2$ , а индекс  $p$  указывает на периодичность формируемой последовательности.

Шаг 2. Формирование двумерной периодической последовательности из значений аппаратной функции:

$$\tilde{k}_p(j_1, j_2) = \Delta_1 \Delta_2 \begin{cases} \tilde{k}(j_1 \Delta_1, j_2 \Delta_2), & \text{если } 0 \leq j_1 \leq N_{k_1}^+ - 1, \\ & 0 \leq j_2 \leq N_{k_2}^+ - 1; \\ \tilde{k}((j_1 - N_1) \Delta_1, j_2 \Delta_2), & \text{если } N_1 - N_{k_1}^- \leq j_1 \leq N_1 - 1, \\ & 0 \leq j_2 \leq N_{k_2}^+ - 1; \\ \tilde{k}(j_1 \Delta_1, (j_2 - N_2) \Delta_2), & \text{если } 0 \leq j_1 \leq N_{k_1}^+ - 1, \\ & N_2 - N_{k_2}^- \leq j_2 \leq N_2 - 1; \\ \tilde{k}((j_1 - N_1) \Delta_1, (j_2 - N_2) \Delta_2), & \text{если } N_1 - N_{k_1}^- \leq j_1 \leq N_1 - 1, \\ & N_2 - N_{k_2}^- \leq j_2 \leq N_2 - 1; \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

При этом  $j_1 = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $j_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ . Величины  $N_{k_1}^- = \text{ent}[|c_1|/\Delta_1]$ ,  $N_{k_2}^- = \text{ent}[|c_2|/\Delta_2]$  определяют число узлов сетки при отрицательных значениях  $\tau_1 < 0$ ,  $\tau_2 < 0$ ,  $N_{k_1}^+ = N_{k_1} - N_{k_1}^-$ ,  $N_{k_2}^+ = N_{k_2} - N_{k_2}^-$ .

Шаг 3. Вычисление комплексной двумерной периодической последовательности с периодом  $N_1 \times N_2$ :

$$\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \tilde{k}_p(j_1, j_2) \exp \left\{ -2\pi i \left( \frac{j_1 l_1}{N_1} + \frac{j_2 l_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (5)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Шаг 4. Вычисление коэффициентов дискретного преобразования Фурье последовательности  $\{\tilde{f}_p(j_1, j_2)\}$  (прямое двумерное ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \tilde{f}_p(j_1, j_2) \exp \left\{ -2\pi i \left( \frac{j_1 l_1}{N_1} + \frac{j_2 l_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Шаг 5. Вычисление коэффициентов ДПФ  $\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)$  регуляризованного периодического решения. Можно показать [7], что коэффициенты  $\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)$  определяются из нелинейного уравнения

$$\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) = \frac{\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta|\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)|^2 + 1)\mathcal{Q}_p(l_1, l_2)} \tilde{F}_p(l_1, l_2), \quad (7)$$

$$l_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad l_2 = 0, \dots, N_2 - 1,$$

где  $\theta = \sigma_\zeta^2 / \sigma_\eta^2$  – отношение дисперсий случайных процессов  $\zeta(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\eta(t_1, t_2)$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)$  – величина, комплексно-сопряженная с  $\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)$ . Элементы периодической последовательности  $\{Q_p(l_1, l_2)\}$  формируются по правилу

$$Q_p(l_1, l_2) = \begin{cases} Q(l_1 \Delta_{\omega_1}, l_2 \Delta_{\omega_2}), & \text{если } 0 \leq l_1 \leq N_1/2, \\ & 0 \leq l_2 \leq N_2/2; \\ Q(l_1 \Delta_{\omega_1}, (N_2 - l_2) \Delta_{\omega_2}), & \text{если } 0 \leq l_1 \leq N_1/2, \\ & N_2/2 + 1 \leq l_2 \leq N_2 - 1; \\ Q((N_1 - l_1) \Delta_{\omega_1}, l_2 \Delta_{\omega_2}), & \text{если } N_1/2 + 1 \leq l_1 \leq N_1 - 1, \\ & 0 \leq l_2 \leq N_2/2; \\ Q((N_1 - l_1) \Delta_{\omega_1}, (N_2 - l_2) \Delta_{\omega_2}), & \text{если } N_1/2 + 1 \leq l_1 \leq N_1 - 1, \\ & N_2/2 + 1 \leq l_2 \leq N_2 - 1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\Delta_{\omega_1} = 2\pi / (N_1 \Delta_1)$ ,  $\Delta_{\omega_2} = 2\pi / (N_2 \Delta_2)$  – шаги дискретизации в частотной области. Функцию  $Q(\omega_1, \omega_2)$  можно трактовать как частную характеристику стабилизирующего функционала: она должна быть неубывающей и  $Q(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \infty$  при  $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$ . Например,  $Q(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{2p_1} + \omega_2^{2p_2}$ , где  $p_1, p_2 > 0$  – порядки регуляризации (обычно равны 1 или 2). Приняв  $p_1 \neq p_2$ , задаем разные «сглаживающие свойства» РА по переменным  $\tau_1, \tau_2$ . В частности, если  $p_1 > p_2$ , то «гладкость» регуляризованного изображения по переменной  $\tau_1$  будет больше, чем по переменной  $\tau_2$ .

Для нахождения решения  $\Phi_{p\alpha}^*(l_1, l_2)$  уравнения (7) при фиксированном  $\alpha$  обратимся к схеме простой итерации (выполняемой для  $l_1 = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ ):

$$\Phi_{p\alpha}^{(n+1)}(l_1, l_2) = \frac{\tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta |\Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2)|^2 + 1)} \tilde{F}_p(l_1, l_2), \quad (9)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

«Точка старта» задается как

$$\Phi_{p\alpha}^{(0)}(l_1, l_2) = \tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2) \tilde{F}_p(l_1, l_2) / (|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha Q_p(l_1, l_2)).$$

Условие прекращения итераций имеет вид

$$\left[ \frac{\sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \left| \Phi_{p\alpha}^{(n+1)}(l_1, l_2) - \Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2) \right|^2}{\sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \left| \Phi_{p\alpha}^{(n)}(l_1, l_2) \right|^2} \right]^{1/2} \leq 0,01. \quad (10)$$

Вычислительный эксперимент показал, что для выполнения условия (10) требуется не более 4–7 итераций.

Шаг 6. Вычисление двумерного регуляризованного периодического решения (обратное двумерное ДПФ):

$$\Phi_{p\alpha}(j_1, j_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) \exp \left\{ 2\pi i \left( \frac{l_1 j_1}{N_1} + \frac{l_2 j_2}{N_2} \right) \right\}, \quad (11)$$

$$j_1 = 0, \dots, N_1 - 1; \quad j_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Шаг 7. Формирование двумерного дискретного изображения  $\varphi_\alpha$  по правилу

$$\varphi_{\alpha_{j_1, j_2}} = \varphi_{p\alpha}(j_1 + N_{k_1}^- - 1, j_2 + N_{k_2}^- - 1), \quad j_1 = 1, \dots, N_{\varphi_1}; \quad j_2 = 1, \dots, N_{\varphi_2},$$

где  $N_{\varphi_1} = N_{f_1} - N_{k_1} + 1$ ,  $N_{\varphi_2} = N_{f_2} - N_{k_2} + 1$ . Если выполнены условия

$$N_1 \geq N_{f_1} + N_{k_1} - 1; \quad N_2 \geq N_{f_2} + N_{k_2} - 1, \quad (12)$$

то проекции  $\varphi_{\alpha_{j_1, j_2}}$  принимаются в качестве значений регуляризованного решения уравнения (1) в узлах  $(\tau_{j_1}, \tau_{j_2})$ , где  $\tau_{j_1} = N_{k_1}^- \Delta_1 + (j_1 - 1)\Delta_1 + x_1$ ,  $\tau_{j_2} = N_{k_2}^- \Delta_2 + (j_2 - 1)\Delta_2 + x_2$ .

Таким образом, предложенный алгоритм учитывает погрешность задания аппаратной функции уже на этапе построения регуляризованного изображения (см. (7), (9)). Использование двумерного преобразования Фурье при вычислении (5), (6), (11) на 5–8 порядков уменьшает число операций по сравнению с «прямым» вычислением соответствующих двойных сумм, что обуславливает высокую вычислительную эффективность РА.

**Функция рассеяния регуляризирующего алгоритма.** Вернемся к регуляризованному периодическому решению  $\varphi_{p\alpha}(j_1, j_2)$ , коэффициенты которого определяются уравнением (7). Коэффициенты ДПФ  $\tilde{F}_p(l_1, l_2)$  (входящие в (7)) допускают представление

$$\tilde{F}_p(l_1, l_2) = \lambda_k(l_1, l_2) \Phi_p(l_1, l_2) + H_p(l_1, l_2) = F_p(l_1, l_2) + H_p(l_1, l_2), \quad (13)$$

где  $H_p(l_1, l_2)$  – коэффициенты ДПФ периодической последовательности  $\eta_p(j_1, j_2)$ , формируемой из значений  $\eta(j_1 \Delta_1, j_2 \Delta_2)$  по тем же соотношениям, что и последовательность  $\tilde{f}_p(j_1, j_2)$  (3). Элементы  $\lambda_k(l_1, l_2)$  определяются выражением (5) по точным значениям аппаратной функции  $k(j_1 \Delta_1, j_2 \Delta_2)$ . Коэффициенты ДПФ  $\Phi_p(l_1, l_2)$  соответствуют точному периодическому решению  $\varphi_p(j_1, j_2)$  и определяются выражением

$$\Phi_p(l_1, l_2) = F_p(l_1, l_2) / \lambda_k(l_1, l_2). \quad (14)$$

Принятая аддитивная модель  $\tilde{k}(\tau_1, \tau_2) = k(\tau_1, \tau_2) + \zeta(\tau_1, \tau_2)$  позволяет записать

$$\lambda_k(l_1, l_2) = \tilde{\lambda}_k(l_1, l_2) - \lambda_\zeta(l_1, l_2), \quad (15)$$

где  $\lambda_\zeta(l_1, l_2)$  – случайная величина, определяемая выражением (5) по значениям  $\zeta_p(j_1, j_2)$ . Получаем следующее выражение для  $\tilde{F}_p(l_1, l_2)$ :

$$\tilde{F}_p(l_1, l_2) = \tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)\Phi_p(l_1, l_2) - \lambda_\zeta(l_1, l_2)\Phi_p(l_1, l_2) + H_p(l_1, l_2). \quad (16)$$

Тогда соотношение (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) = \\ = \frac{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 \Phi_p(l_1, l_2) - \tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)\lambda_\zeta(l_1, l_2)\Phi_p(l_1, l_2) + \tilde{\lambda}_k^C(l_1, l_2)H_p(l_1, l_2)}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta|\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)|^2 + 1)\mathcal{Q}_p(l_1, l_2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычислим условное математическое ожидание правой части (17) по случайным величинам  $\eta, \zeta$  при фиксированном коэффициенте  $\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)$ :

$$\bar{\Phi}_{p\alpha}(l_1, l_2) = M_{\eta, \zeta}[\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2) | \tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)]. \quad (18)$$

С учетом  $M_\eta[H_p(l_1, l_2)] = 0$ ,  $M_\zeta[\lambda_\zeta(l_1, l_2)] = 0$  получаем

$$\bar{\Phi}_{p\alpha}(l_1, l_2) = \frac{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta|\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)|^2 + 1)\mathcal{Q}_p(l_1, l_2)} \Phi_p(l_1, l_2). \quad (19)$$

Величины  $\bar{\Phi}_{p\alpha}(l_1, l_2)$  можно интерпретировать как коэффициенты ДПФ регуляризованного решения, построенного при нулевых погрешностях  $\eta(t_1, t_2)$ ,  $\zeta(\tau_1, \tau_2)$  и заданной аппаратной функции  $\tilde{k}(\tau_1, \tau_2)$ .

Учитывая известное свойство коэффициентов ДПФ дискретной периодической свертки и соотношение (19), можно записать следующую двумерную свертку:

$$\bar{\Phi}_{p\alpha}(j_1, j_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} h_{p\alpha}(j_1 - m_1, j_2 - m_2)\Phi_p(m_1, m_2), \quad (20)$$

в которой

$$h_{p\alpha}(j_1, j_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} H_{p\alpha}(l_1, l_2) \exp\left\{2\pi i \left( \frac{l_1 j_1}{N_1} + \frac{l_2 j_2}{N_2} \right)\right\}, \quad (21)$$

$$H_{p\alpha}(l_1, l_2) = \frac{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2}{|\tilde{\lambda}_k(l_1, l_2)|^2 + \alpha(\theta|\Phi_{p\alpha}(l_1, l_2)|^2 + 1)\mathcal{Q}_p(l_1, l_2)}. \quad (22)$$

При  $\alpha = 0$  имеет место  $H_{p\alpha}(l_1, l_2) \equiv 1$  и соотношение

$$h_{p\alpha}(j_1 - m_1, j_2 - m_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = m_1, j_2 = m_2, \\ 0 & \text{во всех других случаях,} \end{cases} \quad (23)$$

и тогда  $\bar{\varphi}_{p\alpha}(j_1, j_2) = \varphi_p(j_1, j_2)$ , т. е. систематическая ошибка решения  $\bar{\varphi}_{p\alpha}(j_1, j_2)$  равна нулю. При увеличении  $\alpha$  все большее число элементов  $h_{p\alpha}(j_1, j_2)$  отличается от нуля и все в большей степени регуляризованное значение  $\bar{\varphi}_{p\alpha}(j_1, j_2)$  будет отличаться от «точного» значения  $\varphi_p(j_1, j_2)$ . Поэтому двумерную последовательность  $h_{p\alpha}(j_1, j_2)$  можно назвать дискретной функцией рассеяния РА.

В качестве характеристик «протяженности» функции  $h_{p\alpha}(j_1, j_2)$  примем две величины  $\delta_{h_1}(\alpha), \delta_{h_2}(\alpha)$ , которые являются корнями нелинейных уравнений

$$h_{\alpha}\left(\frac{\delta_{h_1}(\alpha)}{2}, 0\right) = 0,4h_{\alpha}(0,0); \quad h_{\alpha}\left(0, \frac{\delta_{h_2}(\alpha)}{2}\right) = 0,4h_{\alpha}(0,0), \quad (24)$$

где  $h_{\alpha}(\tau_1, \tau_2)$  – функция, определенная для  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  путем интерполяции (например, кубическими сплайнами) значений  $h_{p\alpha}(j_1 \Delta_1, j_2 \Delta_2), j_1 = 0, \dots, N_{\varphi_1} - 1, j_2 = 0, \dots, N_{\varphi_2} - 1$ . Величина  $\delta_{h_1}(\alpha)$  определяет ширину функции рассеяния на уровне 0,4 от максимального значения по переменной  $\tau_1$ , величина  $\delta_{h_2}(\alpha)$  – по переменной  $\tau_2$ . «Геометрическая» трактовка этих величин достаточно проста. Если расстояние между контрастными элементами по переменной  $\tau_1$  в исходном изображении будет больше  $\delta_{h_1}(\alpha)$ , то эти элементы проявятся в восстановленном изображении. Аналогично можно трактовать и величину  $\delta_{h_2}(\alpha)$ .

Поясним такую трактовку на следующем примере. Исходное изображение, состоящее из четырех пикообразных функций, приведено на рис. 1, *a*. Расстояние между пиками 1 и 2 по оси  $\tau_1$  равно 20 пикселей, а между 2 и 3 равно 70 пикселей. На рис. 1, *b* показано зарегистрированное (без шума) изображение, в правой части  $f(t_1, t_2)$  которого пики 1 и 2 «слились».

Возникает вопрос, как выбрать параметр регуляризации, чтобы пики 1 и 2 «появились» в регуляризованном изображении  $\varphi_{\alpha}(\tau_1, \tau_2)$ ? Учитывая, что расстояние между пиками 1 и 2 по оси  $\tau_1$  равно 20 пикселей, найдем параметр регуляризации  $\alpha$ , для которого  $\delta_{h_1}(\alpha) = 20$  пикселей (шаги дискретиза-

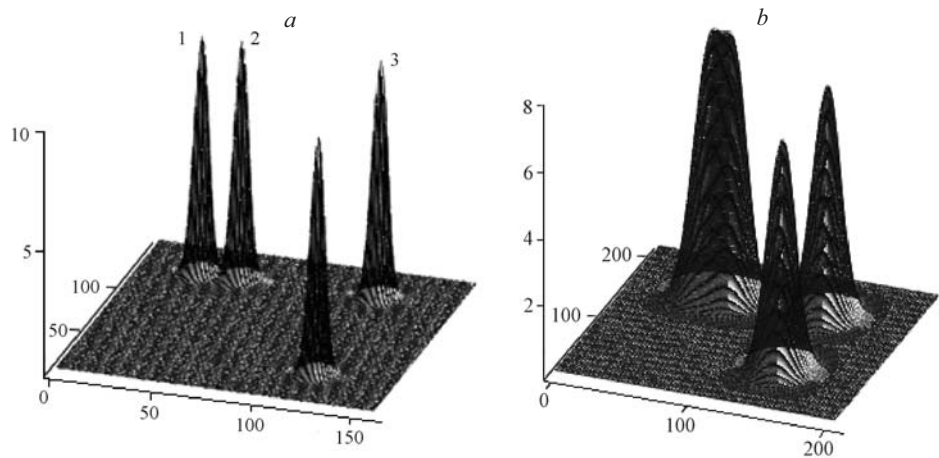


Рис. 1



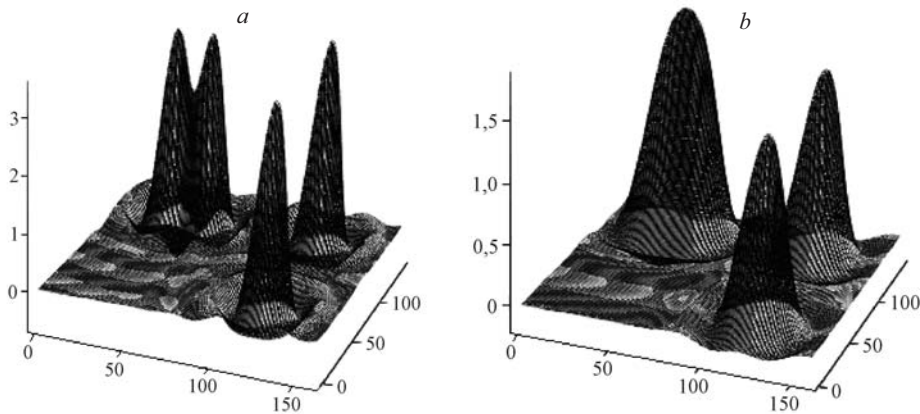


Рис. 2

ции:  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 1$ ). Регуляризованное решение, построенное при этом параметре регуляризации, предложено на рис. 2, *a*. Видно, что пики 1 и 2 «разделились» в регуляризованном изображении, что и подтверждает данную выше трактовку величин  $\delta_{h_1}(\alpha)$  и  $\delta_{h_2}(\alpha)$ . Изображение, построенное при параметре регуляризации, соответствующем  $\delta_{h_1}(\alpha) = 30$  пикселей, представлено на рис. 2, *b*. Как и следовало ожидать, при таком значении параметра регуляризации пики 1 и 2 не разделились.

Величины  $\delta_{h_1}(\alpha)$  и  $\delta_{h_2}(\alpha)$  можно также трактовать как минимальные размеры объекта, который будет «сохранен» в регуляризованном изображении. Например, пики рассматриваемого изображения имеют ширину 10 пикселей на уровне 0,4 от максимального значения. В изображении, построенном при параметре регуляризации, соответствующем  $\delta_{h_1}(\alpha) = 10$  пикселей, пики 1 и 2 не только отчетливо разделились, но и имели амплитуду 9, что гораздо ближе к амплитуде 10 точного изображения по сравнению с изображением, показанным на рис. 2, *a* (амплитуда равна 6).

В отличие от случая точно заданной аппаратной функции, где  $h_{p\alpha}(j_1, j_2)$  не зависит от восстановленного изображения (см. (22) при  $\theta = 0$ ), функция рассеяния РА, построенного по неточно заданной аппаратной функции, зависит от восстановленного изображения, и поэтому нельзя найти характеристики  $\delta_{h_1}(\alpha)$ ,  $\delta_{h_2}(\alpha)$  до процедуры восстановления изображения. На рис. 3 показаны графики зависимостей  $\delta_{h_1}(\alpha)$  (кривая 1),  $\delta_{h_2}(\alpha)$  (кривая 2), которые вычислены для изображения, приведенного на рис. 1, *a*. Видно, что при увеличении  $\alpha$  характеристики  $\delta_{h_1}(\alpha)$ ,  $\delta_{h_2}(\alpha)$  монотонно возрастают. При этом дисперсия случайной ошибки регуляризованного решения будет монотонно уменьшаться в силу известного противоречия между разрешающей способностью и устойчивостью РА.

Поэтому рассмотрим выбор параметра регуляризации из условия

$$\max(\delta_{h_1}(\alpha), \delta_{h_2}(\alpha)) = \delta_{\text{пр}}. \quad (25)$$

Значение  $\alpha_\delta$ , являющееся решением этого нелинейного уравнения и принятое в качестве параметра регуляризации, позволяет построить РА с наимень-

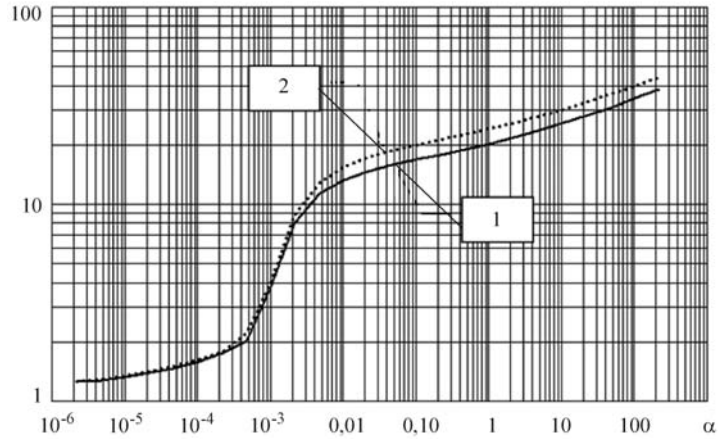


Рис. 3

шим уровнем случайной ошибки при его гарантированной разрешающей способности, задаваемой значением  $\delta_{\text{пр}}$  – предельным размером контрастной детали изображения, которая с небольшими искажениями «сохранится» в восстановленном изображении. Монотонное поведение  $\delta_{h_1}(\alpha)$ ,  $\delta_{h_2}(\alpha)$  при изменении  $\alpha$  обуславливает существование и единственность значения  $\alpha_{\delta}$  при ограничении

$$\delta_{\text{пр}} \geq 3 \max(\Delta_1, \Delta_2), \quad (26)$$

которое вызвано процедурой интерполяции значений дискретной функции  $h_{p\alpha}(j_1, j_2)$  при вычислении корней нелинейных уравнений (24).

Далее по тексту значение  $\alpha_{\delta}$  будем называть эффективным, подчеркивая тем самым эффект сохранения в восстановленном изображении контрастных деталей исходного изображения «размером» не менее  $\delta_{\text{пр}}$ . Однако восстановленное (при параметре  $\alpha_{\delta}$ ) изображение может содержать пульсации, обусловленные случайной ошибкой восстановления  $\xi_{p\alpha}(j_1, j_2)$ . Для устранения этих пульсаций с сохранением разрешающей способности РА (т. е. без увеличения систематической ошибки) обратимся к нелинейным локальным фильтрам.

#### **Пространственная фильтрация регуляризованного изображения.**

Изображение  $\varphi_{\alpha_{j_1, j_2}}$ , являющееся результатом восстановления с использованием РА, представим в следующем виде:

$$\varphi_{\alpha_{j_1, j_2}} = \varphi_{j_1, j_2} + b_{\alpha_{j_1, j_2}} + \xi_{\alpha_{j_1, j_2}},$$

где  $b_{\alpha_{j_1, j_2}}$ ,  $\xi_{\alpha_{j_1, j_2}}$  – систематическая и случайная ошибки восстановления, зависящие от величины параметра  $\alpha$ . Как было отмечено, при уменьшении  $\alpha$  увеличивается случайная ошибка, но уменьшается систематическая, и наоборот. Возникает вопрос: можно ли дальнейшей обработкой восстановленного изображения уменьшить общую ошибку  $\varepsilon_{\alpha_{j_1, j_2}} = b_{\alpha_{j_1, j_2}} + \xi_{\alpha_{j_1, j_2}}$  восстановления? Ответ будет положительным, если использовать алгоритм, который не будет увеличивать (или незначительно увеличивать) систематичес-

кую ошибку и существенно уменьшать случайную. Такой алгоритм можно построить на основе локальных нелинейных фильтров, выходной сигнал которых является результатом операций (в большинстве случаев нелинейных) над значениями обрабатываемого изображения, попавших в апертуру фильтра. Размер апертуры намного меньше размера изображения. Одним из таких фильтров является медианный. Для пояснения принципа работы этого фильтра предположим, что даны значения некоторого зашумленного одномерного сигнала

$$\varphi_j = \bar{\varphi}_j + \xi_j, \quad 1 \leq j \leq N,$$

где  $\xi_j$  – случайный шум. Тогда выходной сигнал  $\varphi_j^M$  медианного фильтра определяется соотношением

$$\varphi_j^M = \text{med}_L(\tilde{\varphi}_{j-L}, \tilde{\varphi}_{j-L+1}, \dots, \tilde{\varphi}_j, \dots, \tilde{\varphi}_{j+L}),$$

где  $\text{med}_L(\cdot)$  – функция, вычисляющая медиану из значений, указанных в скобках. Таким образом,  $\varphi_j^M$  равен медиане выборки из  $2L+1$  значений  $\tilde{\varphi}_i$  и значения  $\tilde{\varphi}_j$  (медиана выборки сформирована из  $L$  значений, лежащих по обе стороны точки  $j$ ). Величину  $L$  можно интерпретировать как размер апертуры медианного фильтра. С «перемещением» апертуры фильтра по всем значениям  $\tilde{\varphi}_j$  вычисляются значения  $\varphi_j^M$  для всего исходного сигнала.

Известно, что медианный фильтр хорошо фильтрует импульсный шум, но плохо – низкоамплитудный. Поэтому в работе [9] был предложен класс комбинированных фильтров, представляющих собой последовательное соединение медианного фильтра (удаление импульсного шума) и некоторой модификации интервального фильтра скользящего среднего (удаление низкоамплитудного шума с сохранением контрастных деталей сигнала). Работу такого комбинированного фильтра (КФ) – «медианный фильтр + интервальный фильтр скользящего среднего» – можно представить следующими шагами, выполняемыми для  $j \in [1, \dots, N]$ .

Шаг 1. Строится оценка

$$\varphi_j^M = \text{med}_L(\tilde{\varphi}_{j-L}, \dots, \tilde{\varphi}_j, \dots, \tilde{\varphi}_{j+L}). \quad (27)$$

Шаг 2. Строится оценка

$$\varphi_j^{\text{КФ}} = \text{aver}_K(\tilde{\varphi}_i: j-K \leq i \leq j+K, |\varphi_i^M - \varphi_j^M| \leq \beta), \quad (28)$$

где  $\text{aver}_K(\cdot)$  – операция усреднения;  $L$  и  $K$  – размеры апертур фильтров, причем  $K \geq L$ . Заметим, что на шаге 2 усредняются только те значения  $\varphi_i^M$ , которые попали в интервал

$$I(j) = [\varphi_j^M - \beta, \varphi_j^M + \beta]. \quad (29)$$

Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей сигнала  $\bar{\varphi}_j$ .

Описанный алгоритм фильтрации одномерного сигнала легко обобщается на фильтрацию восстановленного изображения  $\varphi_\alpha = \{\varphi_{\alpha_{m_1, m_2}}\}$ . Для этого

операция вычисления медианы (27) будет осуществляться над значениями  $\varphi_{\alpha_{m_1, m_2}}$ , попавшими в квадратную апертуру размером  $(2L+1) \times (2L+1)$  с центром  $(j_1, j_2)$ , а интервальное усреднение (28) – над значениями, попавшими в квадратную апертуру размером  $(2K+1) \times (2K+1)$ .

Выбор величины  $\beta$  играет существенную роль в работе рассматриваемого комбинированного фильтра (27), (28). Для определения  $\beta$  предлагается следующий подход.

Предположим, что изображение  $\varphi^M = \{\varphi_{j_1, j_2}^M\}$ , являющееся результатом медианной фильтрации, содержит «остаточную» случайную ошибку с дисперсией  $\sigma_M^2$ . Тогда величину  $\beta$  можно определить по правилу «трех сигм»:

$$\beta = 3\sigma_M. \quad (30)$$

Для оценивания дисперсии  $\sigma_M^2$  сформируем периодическую  $N_1 \times N_2$  двумерную последовательность  $\varphi_p^M(j_1, j_2)$  по правилу

$$\varphi_p^M(j_1 - 1, j_2 - 1) = \begin{cases} \varphi_{j_1, j_2}^M, & \text{если } j_1 = 1, \dots, N_{\varphi_1}, j_2 = 1, \dots, N_{\varphi_2}, \\ 0 & \text{во всех других случаях,} \end{cases}$$

$$j_1 = 1, \dots, N_1, \quad j_2 = 1, \dots, N_2.$$

Затем, используя прямое двумерное ДПФ (6), вычисляем коэффициенты ДПФ  $\Phi_p^M(l_1, l_2)$ . Величины  $N_1 \geq N_{\varphi_1}$ ,  $N_2 \geq N_{\varphi_2}$  выбираются из условия применимости алгоритма быстрого преобразования Фурье к последовательности  $\varphi_p^M(j_1, j_2)$ .

В качестве оценки для  $\sigma_M^2$  принимаем величину

$$s_M^2 = \frac{(N_1^2 N_2^2) / (N_{\varphi_1} N_{\varphi_2})}{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1) - 1} \sum_{l_1 = -L_1}^{L_1} \sum_{l_2 = -L_2}^{L_2} \left| \Phi_p^M \left( \frac{N_1}{2} + l_1, \frac{N_2}{2} + l_2 \right) \right|^2. \quad (31)$$

Эта оценка основана на допущении, что коэффициенты ДПФ  $\Phi_p^M(l_1, l_2)$  для некоторого «прямоугольника» значений  $l_1, l_2$  с центром в точке  $(N_1/2, N_2/2)$  определяются только шумом изображения  $\varphi_{j_1, j_2}^M$ . Зададим величины  $L_1 = 0,1N_1$ ,  $L_2 = 0,1N_2$ , соответствующие объему выборки  $\approx 0,04N_1N_2$ . Для типичных значений  $N_1 = 512$ ,  $N_2 = 512$  объем выборки  $\approx 10500$ , что позволяет достаточно точно оценить  $\sigma_M^2$ . Проведенные вычислительные эксперименты доказали такую возможность.

**Результаты вычислительного эксперимента.** В качестве иллюстрации предложенного подхода к восстановлению контрастных изображений рассмотрим следующий вычислительный эксперимент. В качестве исходного изображения  $\varphi$  принималось изображение двух символов размером  $172 \times 275$  пикселей (рис. 4, а). Затем это изображение «сворачивалось» с ядром  $k$  уравнения (1) и результат искажался случайным шумом с относительным уровнем  $\delta_f = \|\tilde{f} - f\| / \|f\| = 0,05$ . Полученное таким образом



Рис. 4

изображение  $\tilde{f}$  показано на рис. 4, *b*. Видно существенное сглаживание, вносимое аппаратной функцией, и шумовые искажения. Заметим, что число обусловленности матрицы системы (2) равно  $7,5 \cdot 10^9$ , что характеризует большую неустойчивость рассматриваемой задачи восстановления.

Далее предполагалось, что вместо точной аппаратной функции  $k$  известна «зашумленная» функция  $\tilde{k}$  с относительным уровнем шума  $\delta_k = \|\tilde{k} - k\| / \|k\| = 0,1$ . Таким образом, исходными данными для восстановления изображения описанным выше регуляризирующим алгоритмом (соотношения (3)–(9)) являлись изображение  $f_{j_1, j_2}$  и аппаратная функция  $k_{m_1, m_2}$ .

Остановимся на выборе параметра регуляризации  $\alpha$ . Так как самый «тонкий» контрастный элемент изображения (верхняя часть буквы D) имел размер 10 пикселей, то значение параметра регуляризации было равно решению нелинейного уравнения (25) при  $\delta_{np} = 10$  пикселей. Регуляризованное изображение, построенное при таком параметре регуляризации, показано на рис. 5, *a* и имеет относительную ошибку  $\delta_\varphi = \|\varphi_\alpha - \varphi\| / \|\varphi\| = 0,202$ . На рисунке виден высокий уровень случайной ошибки восстановления. Для уменьшения уровня этой ошибки с сохранением контрастных деталей регуляризованное изображение было обработано комбинированным фильтром (27), (28) с параметрами  $L_1 = L_2 = 3$ ,  $K_1 = K_2 = 6$ . Величина  $\beta$  определялась по формуле (30), где вместо  $\sigma_M$  использовалась оценка  $s_M = 4,3$ , т. е.  $\beta = 3,0 \cdot 4,3 = 12,9$ . Относительная ошибка  $\delta_\varphi$  отфильтрованного изображения  $\varphi^{K\Phi}$ , представленного на рис. 5, *b*, равна 0,086. Заметим, что регуляризованное изображение, построенное при  $\alpha = \alpha_{opt}$ , имеет относительную ошибку  $\delta_\varphi = 0,162$  и значительно сглаженные границы символов изображения.

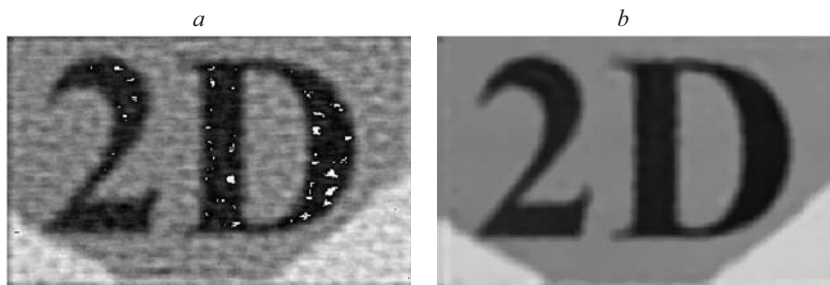


Рис. 5

Таким образом, обработка регуляризованного изображения комбинированным фильтром (27), (28) существенно уменьшает общую ошибку восстановления изображения. Аналогичные результаты были получены при восстановлении и других контрастных изображений.

**Заключение.** Предложенный нелинейный комбинированный (частотно-пространственный) алгоритм восстановления позволяет в определенной степени преодолеть противоречие между разрешающей способностью и устойчивостью линейного регуляризирующего алгоритма восстановления изображений.

Альтернативой используемому комбинированному фильтру с фиксированными размерами апертуры может быть адаптивный фильтр. Размеры апертуры такого фильтра изменяются в зависимости от особенностей обрабатываемого фрагмента изображения. При попадании в апертуру контрастных элементов размеры апертуры уменьшаются, при обработке «однородного» фрагмента размеры апертуры увеличиваются (подробнее см. [10, 11]). Это позволит более эффективно отфильтровать случайную ошибку регуляризованного изображения при сохранении контрастных элементов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн. 2. М.: Мир, 1982.
2. Цифровая обработка сигналов в информационных системах: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
5. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
6. Морозов В. А., Гребенников А. И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
7. Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А. Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. 2006. 42, № 6. С. 3.
8. Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А. Частотно-пространственный устойчивый алгоритм восстановления контрастных изображений // Науч. вестн. НГТУ. 2006. № 1(22). С. 3.
9. Бронников А. В., Воскобойников Ю. Е. Комбинированные алгоритмы нелинейной фильтрации зашумленных сигналов и изображений // Автометрия. 1990. № 1. С. 21.
10. Белявцев В. Г., Воскобойников Ю. Е. Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры // Автометрия. 1998. № 3. С. 18.
11. Воскобойников Ю. Е., Кузнецов А. М. Новый алгоритм адаптации размера апертуры локальных векторных фильтров // Автометрия. 2005. 41, № 5. С. 3.

*Поступила в редакцию 22 января 2007 г.*