

**О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ  
ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ  
СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ\*****Д. В. Кашковский, В. В. Конев***Томский государственный университет, г. Томск**E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru*

Для оценивания линейных параметров устойчивого процесса авторегрессии со случайными коэффициентами предлагается одноэтапная последовательная процедура, использующая специальное правило накопления наблюдений. Получена верхняя граница для среднеквадратической точности последовательной оценки, которая убывает обратно пропорционально значению параметра процедуры, определяющего длительность наблюдений. Изучено асимптотическое поведение средней длительности процедуры. Приведены результаты численного моделирования.

**Введение.** В прикладных задачах, связанных с обработкой сигналов, спектральным анализом и прогнозированием, находят широкое применение динамические модели, описываемые стохастическими разностными уравнениями типа авторегрессии. Построение таких моделей во многих случаях сводится к оцениванию их параметров. Наиболее полно теория оценивания параметров динамических моделей разработана для линейных моделей, когда параметры постоянны и шумы независимы. Однако неизвестные параметры сами могут быть подвержены случайным флуктуациям и оставаться постоянными только в среднем. Флуктуации параметров вносят дополнительные трудности в решение задач идентификации, фильтрации и прогнозирования, основанных на таких моделях. Использование же стандартных процедур идентификации, разработанных применительно к случаю постоянных параметров, может привести к ошибочным выводам.

Рассмотрим модель авторегрессии со случайными коэффициентами

$$x_k = \theta_1(k)x_{k-1} + \dots + \theta_p(k)x_{k-p} + \sigma_0 \varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (1)$$
$$\theta_j(k) = \theta_j + \sigma_j \eta_j(k),$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00855).

где  $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 1}$ ,  $\{\eta_j(k)\}_{k \geq 1, j = \overline{1, p}}$  – независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией; вектор начальных значений  $X_0 = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p+1})'$  с  $E\|X_0\|^2 < +\infty$  не зависит от последовательностей  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\{\eta_j(k)\}$ ; штрих означает транспонирование;  $\sigma_0 > 0$ ,  $\sigma_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Вектор параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$  неизвестен и подлежит оцениванию по наблюдениям процесса  $x_k$ . Параметры  $\theta_i$  предполагаются такими, что существует стационарное решение уравнения (1). В случае авторегрессии с постоянными параметрами ( $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ ) это требование, как известно [1], означает, что

а) все корни характеристического уравнения

$$z^p - \theta_1 z^{p-1} - \dots - \theta_p = 0$$

лежат внутри единичного круга. Если  $\sum_{i=1}^p \sigma_i > 0$ , стационарное решение уравнения (1) существует при выполнении следующих условий [2]:

а') все собственные значения матрицы  $D_\theta = A \otimes A + C_\sigma$  по модулю меньше 1, где

$$A = \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_p \\ I_{p-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad C_\sigma = E\Gamma_k \otimes \Gamma_k, \quad (2)$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 \eta_1(k) & \dots & \sigma_p \eta_p(k) \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$A \otimes B = [a_{ij} B]$  обозначает кронекерово произведение квадратных матриц  $A$  и  $B$ ,  $I_{p-1}$  – единичная матрица порядка  $p-1$ ;

б) распределение  $\varepsilon_k$  имеет положительную плотность (относительно меры Лебега) в интервале  $[-a, a]$  для некоторого  $a > 0$ .

При наличии мультипликативных помех ( $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$ ) усложняется и вид спектральной плотности стационарного процесса (1) (в сравнении со случаем постоянных параметров [3]):

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} \left[ \sum_{i=1}^p \left\langle D_\theta (I_{p^2} - D_\theta)^{-1} \right\rangle_{ii} \times \right. \\ \times (\langle e^{i\lambda} A (I_p - e^{i\lambda} A)^{-1} \rangle_{1i} + \langle e^{-i\lambda} A (I_p - e^{-i\lambda} A)^{-1} \rangle_{1i}) + \\ + \langle e^{i\lambda} A (I_p - e^{i\lambda} A)^{-1} \rangle_{11} + \langle e^{-i\lambda} A (I_p - e^{-i\lambda} A)^{-1} \rangle_{11} + \\ \left. + \left\langle D_\theta (I_{p^2} - D_\theta)^{-1} \right\rangle_{11} + 1 \right]. \quad (4)$$

Известно [1], что процесс авторегрессии ( $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ ) широко используется в анализе временных рядов, поскольку позволяет аппроксимировать любой стационарный процесс с непрерывной спектральной плотностью. Модель (1) с аддитивными и мультипликативными помехами находит применение в задачах обработки временных рядов [4], управления [5], компьютерной надежности [6], а также для расчета накопления в организме тяжелых элементов и их вывода [7].

Для оценивания параметров модели (1) могут использоваться те же методы, что и для обычной авторегрессии, однако анализ свойств оценок при этом усложняется. Основные результаты относятся к асимптотическому поведению оценок при больших выборках. В [8] для обобщенного метода моментов установлена сходимость почти наверное (п. н.) и асимптотическая нормальность оценок. Наряду со сходимостью оценок в прикладных задачах возникает необходимость оценивать их качество – наиболее часто это среднеквадратическая точность оценок.

Основная трудность нахождения среднеквадратической точности оценок метода наименьших квадратов (МНК) (максимального правдоподобия) параметров процесса (1) заключается в том, что оценки являются существенно нелинейными функциями наблюдений. Это относится и к случаю постоянных параметров ( $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ ). В [9] для идентификации модели (1) при одном параметре ( $p = 1$ ) был предложен последовательный метод наименьших квадратов, имеющий ряд преимуществ перед обычным МНК: дает несмещенные оценки, позволяет контролировать среднеквадратическую точность оценки и др.

В предлагаемой работе представлен последовательный метод наименьших квадратов для оценивания параметров процесса (1) произвольного конечного порядка  $p$  с гарантированной среднеквадратической точностью.

Заметим, что задача построения гарантированных в среднеквадратическом смысле точечных оценок векторных параметров на базе МНК для авторегрессии, случайной регрессии и более общих моделей семимартингалного типа, а также задача классификации процессов исследованы в работах [10–15]. При этом процедуры гарантированного оценивания параметров в авторегрессии и более сложных моделях случайной регрессии обычно строятся в два этапа, которые требуют использования в процедуре больше одной оценки наименьших квадратов. В работе предлагается одноэтапная последовательная оценка наименьших квадратов параметров процесса (1), отличающаяся от обычной оценки МНК только выбором специального правила прекращения наблюдений. Основным результатом этой работы состоит в том, что при  $h \rightarrow \infty$

$$\sup_{\theta \in K} E_{\theta} \left\| \theta^*(h) - \theta \right\|^2 \leq \frac{b_K}{h} (1 + o(1)),$$

где  $b_K = \sup_{\theta \in K} \varphi_{\sigma}(\theta)$ ;  $\theta^*(h)$  – последовательная оценка параметра  $\theta$ ;  $K$  – любое

компактное множество в области устойчивости  $\Lambda_{\sigma}$  ( $\Lambda_{\sigma} \subset \mathbb{R}^p$ );  $\varphi_{\sigma}(\theta)$  – некоторая известная функция от  $\theta$ . Предлагаемая последовательная процедура может использоваться при обработке временных рядов и в задачах классификации процессов типа (1) с аддитивными и мультипликативными шумами.

**Последовательное оценивание параметров процесса (1).** Для оценивания вектора неизвестных параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$  динамической системы (1) будем использовать последовательный вариант оценок метода наименьших квадратов. Оценка МНК для  $\theta$  по наблюдениям  $(x_i)$ ,  $i = -p + 1, n$ , определяется формулой

$$\theta(n) = M_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_{k-1} x_k, \quad M_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} X'_{k-1}, \quad (5)$$

где  $n \geq n_0$ ,  $n_0 = \inf \{n \geq 1 : \lambda_p(M_n) > 0\}$ ,  $\lambda_p(M_n)$  – минимальное собственное значение матрицы  $M_n$ ;  $X_{k-1} = (x_{k-1}, \dots, x_{k-p})'$ . Построение последовательной оценки основано на неравенстве

$$\|\theta(n) - \theta\|^2 \leq \|M_n^{-2}\| \|m_n\|^2, \quad (6)$$

где  $m_n$  – мартингал, определяемый равенством

$$m_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} \left( \sum_{i=1}^p \sigma_i \eta_i(k) x_{k-i} + \sigma_0 \varepsilon_k \right).$$

Учитывая, что  $\|M_n^{-2}\|$  убывает с ростом  $n$ , для каждого положительного  $h$  введем момент остановки

$$\tau(h) = \inf \left\{ n \geq n_0 : \|M_n^{-2}\|^{1/2} \leq h^{-1} \right\} \quad (7)$$

и вычислим последовательную оценку по формуле

$$\theta^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} x_k, \quad (8)$$

где

$$\tilde{M}_{\tau(h)} = \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} X'_{k-1}; \quad \beta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k < \tau(h), \\ \alpha(h), & \text{если } k = \tau(h), \end{cases}$$

$\alpha(h)$  находится из уравнения

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^{\tau(h)-1} X_{k-1} X'_{k-1} + \alpha X_{\tau(h)-1} X'_{\tau(h)-1} \right)^{-2} \right\|^{1/2} = h^{-1}. \quad (9)$$

Оценка  $\theta^*(h)$  отличается от обычной оценки МНК (5) тем, что фиксированный объем выборки  $n$  заменяется моментом остановки  $\tau(h)$ , а также тем, что последние слагаемые в обеих суммах в (8) берутся со специальным корректирующим множителем  $\alpha(h)$ .

**Свойства последовательной процедуры оценивания.** Изучим свойства последовательных оценок (7), (8). Запишем уравнение (1) в векторной форме

$$X_k = A_k X_{k-1} + \xi_k, \quad (10)$$

где  $\xi_k = (\sigma_0 \varepsilon_k, 0, \dots, 0)'$ ;  $A_k = A + \Gamma_k$ ,  $A$  и  $\Gamma_k$  определяются в (2), (3). Уравнение (10) имеет стационарное решение  $\tilde{X}_k$  при условии  $a$  для случая авторегрессии с постоянными параметрами ( $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ ) и при условиях  $a'$ ,  $b$ , если  $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$ .

**Лемма.** Пусть для процесса (1) выполнено условие  $a$ , если  $\sigma_i = 0$ ,  $i = \overline{1, p}$ , и  $a'$ ,  $b$ , если  $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$ . Тогда существует матрица  $F = E_\theta \tilde{X}_k \tilde{X}_k'$ , причем  $F$  удовлетворяет уравнению

$$F - AFA' = B_F, \quad B_F = [(\sigma_0^2 + \text{tr} \Sigma F) \delta_{1i} \delta_{1j}], \quad (11)$$

где  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ii} = 1$ .

**Доказательство** леммы основано на свойстве эргодичности процесса (10), благодаря которому имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = F \quad P_\theta - \text{п. н.} \quad (12)$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение момента останова  $\tau(h)$  с ростом  $h$ . По определению  $\tau(h)$  в (7) имеем

$$\left\| (M_{\tau(h)} / \tau(h))^{-2} \right\|^{1/2} \leq \tau(h) / h \leq \left\| (M_{\tau(h)-1} / \tau(h))^{-2} \right\|^{1/2}.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \tau(h) / h = \left\| F^{-2} \right\|^{1/2} \quad P_\theta - \text{п. н.}$$

Изучим асимптотику среднего времени наблюдений при  $h \rightarrow \infty$ . Для этого потребуется наложить дополнительные условия на процесс (1), обеспечивающие конечность и ограниченность по  $n$  восьмого момента  $E_\theta \|X_n\|^8$ . Пусть

c)  $E \|X_0\|^8 < \infty$ ,  $E \varepsilon_k^8 < \infty$  и  $E \eta_i^8(k) < \infty$ . Кроме того, при наличии мультипликативных помех ( $\sigma_i > 0$  хотя бы для одного значения  $i$ ) требуется, чтобы [2]

d) все собственные значения матрицы  $E_\theta A_1^{\otimes 8}$  были по модулю меньше 1. Предположим также, что

$$e) t_1(\theta) = 3^6 \left( \sum_{j \geq 0} \|A^j\|^2 \right)^4 \left( \sum_{i=1}^p \sigma_i^4 \right)^2 < 1, \quad t_2(\theta) < 1,$$

$$t_2(\theta) = \aleph_A (3 \|A\|^2 \text{tr} \Sigma + 2 \|\theta\|^2 \text{tr} \Sigma + \|\Sigma\|^2 \|A\|^2 + \mu_\sigma),$$

$$\text{где } \aleph_A = \sum_{j \geq 0} \|(A \otimes A)^j\|^2; \quad \mu_\sigma = \|\Sigma\|^2 \left[ (E_\theta \eta_1^4 - 3) \sum_{i=1}^p \sigma_i^4 + 3(\text{tr} \Sigma)^2 \right].$$

Обозначим через  $\Lambda_0$  область устойчивости процесса (1) при отсутствии мультипликативных помех ( $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ ), т. е.  $\Lambda_0 = \{\theta \in \mathbb{R}^p : \text{выполнено условие } a\}$ , а через  $\Lambda_\sigma$  обозначим ту часть параметрической области устойчивости процесса (1), в которой выполняются также условия  $a'$ ,  $d$  и  $e$ , т. е.

$$\Lambda_\sigma = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\lambda_{\max}(E_\theta A_1 \otimes A_1)| < 1, |\lambda_{\max}(E_\theta A_1^{\otimes 8})| < 1, t_i(\theta) < 1, i=1,2\},$$

где  $\lambda_{\max}(A)$  – наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ . Заметим, что  $\Lambda_\sigma = \Lambda_0$  при  $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть для процесса (1) при  $\sigma_i = 0, i=1, p$ , выполнены условия  $a, c$ , а при  $\max_{1 \leq i \leq p} \sigma_i > 0$  – условия  $a', b, c, d$  и  $e$ . Тогда для любого компактного множества  $K \subset \Lambda_\sigma$

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \left| E_\theta \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{1/2} \right| = 0, \quad (13)$$

где  $F$  определяется в (11).

Далее покажем, что для всех  $h > 0$  оценка  $\theta^*(h)$ , определяемая формулами (7), (8), удовлетворяет неравенству

$$E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \frac{1}{h^2} E_\theta \sum_{k=1}^{\tau(h)} \|X_{k-1}\|^2 E_\theta(\Psi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}), \quad (14)$$

где

$$\Psi_k = \sigma_0 \varepsilon_k + \sum_{i=1}^p \sigma_i x_{k-i} \eta_i(k);$$

$\mathcal{F}_k$  означает условное среднее относительно вектора случайных величин  $(X_0, \varepsilon_1, \eta_1(1), \dots, \eta_p(1), \dots, \varepsilon_k, \eta_1(k), \dots, \eta_p(k))'$ . Из (6) следует, что

$$\|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \|\tilde{M}_{\tau(h)}^{-2}\| \left\| \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} \Psi_k \right\|^2.$$

Отсюда в силу (9) получим

$$\begin{aligned} E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 &\leq h^{-2} E_\theta \left\| \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} \Psi_k \right\|^2 = \\ &= h^{-2} \sum_{l=1}^p E_\theta \sum_{k=1}^{\tau(h)} \sum_{j=1}^{\tau(h)} \beta_k \beta_j x_{k-l} x_{j-l} \Psi_k \Psi_j \leq h^{-2} E_\theta \sum_{k=1}^{\tau(h)} \|X_{k-1}\|^2 E_\theta(\Psi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}). \end{aligned}$$

Из (14) имеем

$$E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{h^2} E_\theta \text{tr} M_\tau + \frac{1}{h^2} E_\theta \text{tr} \Sigma G_{\tau(h)}, \quad (15)$$

где

$$G_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} X'_{k-1} X'_{k-1} X_{k-1}.$$

Оценка правой части неравенства (15) приводит к следующему результату.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, распределения помех  $\varepsilon_k$  и  $\eta_i(k)$  в (1) симметричны. Тогда при  $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$  для любого компактного множества  $K \subset \Lambda_0$

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \left\| \theta^*(h) - \theta \right\|^2 \leq \frac{a_K}{h} (1 + o(1)), \quad (16)$$

а при  $\max \sigma_i > 0$  для любого компактного множества  $K \subset \Lambda_\sigma$

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \left\| \theta^*(h) - \theta \right\|^2 \leq \frac{b_K}{h} (1 + o(1)), \quad (17)$$

где  $a_K = \sup_{\theta \in K} \varphi_0(\theta)$ ,  $\varphi_0(\theta) = \sigma_0^2 \left\| F^{-2} \right\|^{1/2} \text{tr} F$ ;  $b_K = \sup_{\theta \in K} \varphi_\sigma(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(\theta) = \varphi_0(\theta) + \sigma_*^2 \left[ (\sqrt{p} + 5) \text{tr} AFA' + \sigma_0^2 E\varepsilon_1^4 + \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 (2\text{tr} F + 3\langle F \rangle_{11}) \right] \times \\ \times \frac{\aleph_A}{1 - t_2(\theta)} \left\| F^{-2} \right\|^{1/2} \sigma_0^2, \end{aligned}$$

$\sigma_*^2 = \max_{1 \leq i \leq p} \sigma_i^2$ ;  $o(1) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Введем матрицу

$$\tilde{G}_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} X'_{k-1} \otimes X_{k-1} X'_{k-1}.$$

Имеет место равенство  $\text{tr} G_n = \text{tr} \tilde{G}_n$ , где  $G_n$  определяется в (15). Подставляя  $X_k$  из (10) в  $X_{k-1} X'_{k-1} \otimes X_{k-1} X'_{k-1}$  и суммируя по  $k$ , получаем уравнение для  $\tilde{G}_n$ . Используя оценки для слагаемых в момент  $\tau(h)$  и опуская простые и длинные выкладки, приходим к утверждению теоремы.

**З а м е ч а н и е.** Как видно из теоремы 2, среднеквадратическое отклонение оценки (8) от параметра  $\theta$  убывает обратно пропорционально параметру длительности наблюдений  $h$ .

**Численный пример.** Чтобы изучить влияние уровня аддитивных и мультипликативных помех процесса (1) на качество предлагаемых оценок (7), (8), моделировался процесс авторегрессии со случайными коэффициентами второго порядка:

$$x_n = (\theta_1 + \sigma_1 \eta_1(n))x_{n-1} + (\theta_2 + \sigma_2 \eta_2(n))x_{n-2} + \varepsilon_n; \quad x_0 = x_{-1} = 0 \quad (18)$$

с белыми гауссовскими шумами  $\eta_i(n), \varepsilon_n$ .

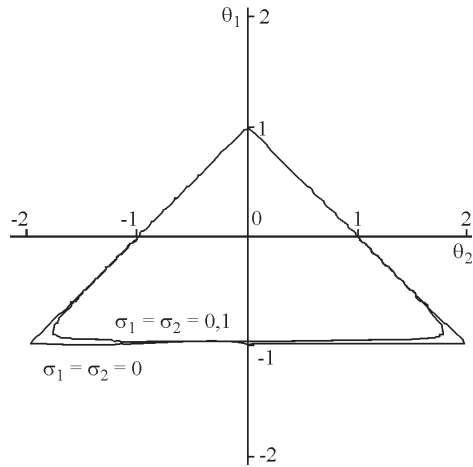


Рис. 1

На рис. 1 область внутри треугольника является областью устойчивости процесса (18) при отсутствии мультипликативных помех ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ). Здесь же изображена область устойчивости процесса (18) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$ , определяемая условием  $a'$ , согласно которому собственные значения матрицы  $D_\theta = E_\theta A_1 \otimes A_1$  должны быть по модулю меньше 1.

Интерес также представляет изменение вида спектральной плотности процесса авторегрессии при появлении у него мультипликативных помех. Спектральная плотность  $f(\lambda)$  вычисляется по формуле (4). На рис. 2 приведены графики спектральной плотности  $f(\lambda)$  процесса (18) при  $\theta_1 = 0,4$  и  $\theta_2 = -0,4$ . При этом на графике  $a$  коэффициенты дисперсии у процесса следующие:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  (процесс авторегрессии), а на графике  $b$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$  (добавлены мультипликативные помехи). Также на рисунке показан график  $c$  последовательной оценки спектральной плотности  $f^*(\lambda)$  процесса (18) по 112 наблюдениям при  $\theta_1 = 0,4$ ,  $\theta_2 = -0,4$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,2$ ,  $h = 100$ . Как видно из графиков, появление дополнительных мультипликативных помех приводит к увеличению пиков спектральной плотности.

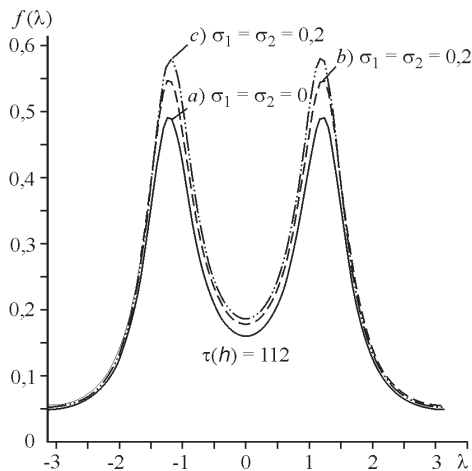


Рис. 2



Перейдем теперь к численному анализу качества оценок (7), (8). Матрица  $F$ , используемая в теоремах 1, 2, может быть найдена из уравнения (11), которое в данном случае принимает вид

$$F - \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 \\ \theta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 + \text{tr} \Sigma F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$F = \frac{\sigma_0^2}{(1 + \theta_2)[(1 - \theta_2)^2 - \theta_1^2] - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(1 - \theta_2)} \begin{pmatrix} 1 - \theta_2 & \theta_1 \\ \theta_1 & 1 - \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Отсюда, полагая  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , находим функции, через которые выражается средняя длительность процедуры (13) и граница для среднеквадратической точности (16):

$$\|F_0^{-2}\|^{1/2} = \frac{1 + \theta_2}{\sigma_0^2} \sqrt[4]{2((1 - \theta_2)^2 + \theta_1^2)^2 + 8\theta_1^2(1 - \theta_2)^2},$$

$$\varphi_0(\theta) = \frac{2(1 - \theta_2)}{(1 - \theta_2)^2 - \theta_1^2} \sqrt[4]{2((1 - \theta_2)^2 + \theta_1^2)^2 + 8\theta_1^2(1 - \theta_2)^2}.$$

Используя (19), можно записать также и явную формулу для функции  $\varphi_\sigma(\theta)$ , определяющей границу среднеквадратической точности (17) оценок (7), (8) при наличии мультипликативных помех.

Результаты численного моделирования по 50 реализациям процесса (1) представлены в табл. 1, 2.

Т а б л и ц а 1

Среднее время наблюдений при наличии мультипликативных помех для  $\sigma_i = 0,1$

$\theta_1$	$\theta_2$	$h$	$\bar{\tau}(h)$	$\bar{\tau}(h)/h$	$\ F^{-2}\ ^{1/2}$
0	0,5	50	55,20	1,104	0,868
0	0,5	100	98,00	0,980	0,868
0	0,5	500	450,26	0,901	0,868
0	0,5	1000	881,12	0,881	0,868
-0,5	0	100	153,74	1,537	1,464
0	0	100	123,96	1,240	1,165
0,2	-0,5	500	453,76	0,908	0,890
0,4	-0,4	500	543,92	1,088	1,076
0,4	0,4	500	676,28	1,353	1,341

Т а б л и ц а 2

Наблюдаемые стандартные отклонения МНК в случае фиксированной и последовательной выборок при отсутствии и наличии мультипликативных помех

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$							
$\theta_1$	$\theta_2$	$\varphi_0(\theta)$	$h\hat{E}_\theta \ \theta^*(h) - \theta\ ^2$	$SD(\theta_1^*)$	$SD(\theta_2^*)$	$SD(\hat{\theta}_1)$	$SD(\hat{\theta}_2)$
-0,6	0	5,005	0,909	0,028	0,032	0,028	0,033
-0,4	0	3,361	1,339	0,033	0,040	0,034	0,039
-0,2	0	2,615	1,633	0,037	0,044	0,038	0,042
0	0	2,378	1,622	0,038	0,043	0,037	0,044
0	-0,5	2,378	1,504	0,035	0,043	0,032	0,041
0,2	-0,5	2,484	1,365	0,033	0,041	0,033	0,040
0,4	-0,4	2,864	1,286	0,037	0,035	0,034	0,035
0,4	0,4	6,002	1,034	0,032	0,032	0,032	0,032
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$							
$\theta_1$	$\theta_2$	$\varphi_\sigma(\theta)$	$h\hat{E}_\theta \ \theta^*(h) - \theta\ ^2$	$SD(\theta_1^*)$	$SD(\theta_2^*)$	$SD(\hat{\theta}_1)$	$SD(\hat{\theta}_2)$
-0,6	0	9,010	1,152	0,031	0,037	0,031	0,035
-0,4	0	4,901	1,383	0,033	0,041	0,035	0,044
-0,2	0	3,566	1,735	0,038	0,045	0,038	0,046
0	0	3,186	1,700	0,039	0,043	0,038	0,044
0	-0,5	3,856	1,653	0,038	0,043	0,036	0,040
0,2	-0,5	4,180	1,514	0,039	0,039	0,036	0,038
0,4	-0,4	4,797	1,340	0,038	0,035	0,038	0,034
0,4	0,4	12,133	1,053	0,034	0,030	0,036	0,033

В табл. 1  $\bar{\tau}(h)$  обозначает выборочное среднее длительности процедуры  $\tau(h)$ . Из таблицы видно, что величина  $\bar{\tau}(h)/h$  с ростом  $h$  достаточно быстро (начиная с  $h = 100$ ) приближается к предельному значению  $\|F^{-2}\|^{1/2}$ .

В табл. 2 даны результаты моделирования предлагаемых оценок (7), (8) и оценок МНК (5). Здесь  $SD(\theta_1^*)$ ,  $SD(\theta_2^*)$  – наблюдаемые стандартные отклонения последовательных оценок  $\theta_1^*(h)$  и  $\theta_2^*(h)$  соответственно при значении порога  $h = 500$ , а  $SD(\hat{\theta}_1)$  и  $SD(\hat{\theta}_2)$  – наблюдаемые стандартные отклонения оценок МНК (5). Число наблюдений, используемых в непоследовательной процедуре МНК, равно средней продолжительности последовательной про-

цедуры при 50 повторениях эксперимента. Как видно из таблицы, последовательные и непоследовательные оценки МНК примерно одинаковы по точности. Однако следует иметь в виду, что для оценок МНК теоретические границы для среднеквадратической точности до сих пор не найдены. В табл. 2 величина  $h\hat{E}_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2$  обозначает выборочное среднеквадратическое отклонение  $E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2$ , умноженное на  $h$  и полученное по 50 повторениям эксперимента. Здесь также приводятся значения функций  $\varphi_0(\theta)$  и  $\varphi_\sigma(\theta)$ , через которые определяются границы среднеквадратической точности последовательных оценок в теореме 2. Эти функции дают аппроксимации для величины  $hE_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2$ . Видно, что аппроксимации вполне удовлетворительны, если корни соответствующего характеристического уравнения находятся внутри единичного круга. Например, при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  и  $\theta_1 = -0,2$ ,  $\theta_2 = 0$  имеем  $\varphi_0(\theta) = 2,615$ , а выборочное значение  $h\hat{E}_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 = 1,633$ . При действии мультипликативных помех с  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$  получаем  $\varphi_\sigma(\theta) = 3,566$  и  $h\hat{E}_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 = 1,735$ . С приближением вектора неизвестных параметров  $\theta$  к границе области устойчивости функции  $\varphi_0(\theta)$  и  $\varphi_\sigma(\theta)$  возрастают. Это объясняется, по-видимому, тем, что процесс (1) приближается к взрывному, что сказывается на поведении как самого процесса, так и оценок его параметров.

**Заключение.** В данной работе предлагается процедура идентификации параметров процесса авторегрессии с аддитивными и мультипликативными помехами произвольного порядка  $p$ . Процедура является последовательным вариантом метода наименьших квадратов и использует специальное правило накопления наблюдений в зависимости от требуемой точности оценивания. Найдена теоретическая граница для среднеквадратической точности вектора неизвестных параметров. Полученные результаты могут быть использованы при обработке временных рядов, спектральном анализе систем, а также при исследовании адаптивных алгоритмов управления линейными стохастическими системами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
2. Feigin P. D., Tweedie R. L. Random coefficient autoregressive processes: A Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments // Journ. Time Series Anal. 1985. 6, N 1. P. 1.
3. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
4. Nicholls D. F., Quinn B. G. Random coefficient autoregressive models: An introduction // Lecture Notes in Statistics. New York – Berlin: Springer-Verlag, 1982. Vol. 11.
5. Kalman R. E. Control of randomly varying linear dynamical systems // Proc. Symp. Appl. Math. 1962. 13. P. 287.
6. Singpurwalla N. D., Soyer R. Assessing (software) reliability growth using a random coefficient autoregressive process and its ramifications // IEEE Trans. Software Eng. 1985. SE-11. P. 1456.

7. **Paulson A. S., Uppuluri V. R. R.** Limit laws of a sequence determined by a random difference equation governing a one compartment system // *Math. Biosci.* 1972. **13**, N 3. P. 325.
8. **Lee T. Y., Wirjanto T. S.** On the efficiency of conditional heteroscedasticity models // *Rev. Quantitative Finance and Accounting.* 1998. **10**, N 1. P. 21.
9. **Пергаменщиков С. М., Ширяев А. Н.** О последовательном оценивании параметра стохастического разностного уравнения со случайными коэффициентами // *Теория вероятностей и ее применения.* 1992. **37**, вып. 3. С. 482.
10. **Борисов В. З., Конев В. В.** О последовательном оценивании параметров дискретных процессов // *АиТ.* 1977. № 10. С. 58.
11. **Кашковский Д. В.** Последовательная процедура классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами // *Автометрия.* 2006. **42**, № 1. С. 77.
12. **Конев В. В., Пергаменщиков С. М.** Последовательные планы идентификации параметров динамических систем // *АиТ.* 1981. № 7. С. 84.
13. **Шаповалов Д. В.** Последовательная процедура классификации процессов авторегрессии–скользящего среднего // *Автометрия.* 2002. **38**, № 5. С. 49.
14. **Galtchouk L., Konev V.** On sequential estimation of parameters in semimartingale regression models with continuous time parameter // *Ann. Statist.* 2001. **29**, N 5. P. 1508.
15. **Konev V. V., Lai T. L.** Estimators with prescribed precision in stochastic regression models // *Sequential Analysis.* 1995. **14**, N 3. P. 179.

*Поступила в редакцию 25 декабря 2006 г.*

---