

ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 535.31

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА  
ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ  
ЗАДАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОСВЕЩЕННОСТИ\*

А. А. Белоусов, Л. Л. Досколович, С. И. Харитонов

*Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара*

*Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара*

*E-mail: ipsi@smr.ru*

Рассмотрен метод расчета преломляющих поверхностей для формирования заданных распределений освещенности при компактных источниках света. Расчет преломляющей поверхности базируется на градиентной минимизации функционала ошибки, представляющего отличие расчетной и заданной освещенности полей. Метод основан на представлении поверхности через распределение эйконала светового поля в прилегающей плоскости, который определяется в виде полинома. Получено аналитическое выражение для градиента функционала ошибки. Произведен расчет преломляющих поверхностей для формирования прямоугольного и треугольного распределений освещенности.

**Введение.** Задача расчета оптических элементов для формирования заданных распределений освещенности является актуальной для большого числа задач, включающих в себя расчет лазерных систем фокусировки, сканирования и навигации, расчет светотехнических устройств и систем освещения и т. д.

С математической точки зрения расчет преломляющей поверхности является обратной задачей и состоит в расчете формы поверхности из условия формирования заданного распределения освещенности в некоторой плоскости. В общем случае задача формирования заданного распределения освещенности при точечном (компактном) источнике света сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения типа уравнения Монжа – Ампера и является крайне сложной [1–3].

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-07-97601-р\_офи, № 07-01-96602-р\_поволжье\_а, № 07-07-91580-АСП\_а) и CRDF (Project RUXO-014-SA-06).

Ряд методов решения задач данного класса в приближении геометрической оптики разработан для дифракционных оптических элементов [4–10]. В этом случае ставится задача расчета эйконала светового поля в плоскости из условия формирования заданной интенсивности поля в некоторой области пространства. Задача расчета эйконала в плоскости отлична от задачи расчета преломляющей поверхности. Кроме того, восстановление формы поверхности рельефа дифракционного элемента по функции эйконала основано на использовании параксиального приближения и приближения тонкого оптического элемента. Такие приближения недопустимы при расчете преломляющих поверхностей, формирующих области с достаточным угловым размером ( $>10^\circ$ ).

Ряд методов расчета оптических элементов разработан в светотехнике [11–14]. Эти методы позволяют учесть размеры и форму источника света, однако аналитические решения и эффективные алгоритмы расчета известны только для задач с радиальной симметрией. В последние годы появились публикации о расчете оптических поверхностей итерационными методами при компактных источниках света [15, 16]. Указанные методы позволяют сформировать сложные распределения освещенности, например, в виде алфавитно-цифровых символов, однако обладают низкой эффективностью.

В данной работе рассмотрен градиентный метод расчета преломляющих оптических поверхностей для фокусировки в заданную плоскую область при точечном источнике света. Метод не использует соотношения типа приближения тонкого оптического элемента и позволяет реализовать фокусировку с эффективностью фактически 100 % в области, не обладающие радиальной симметрией. Он основан на представлении поверхности через распределение эйконала светового поля в прилегающей плоскости. Эйконал находится в виде полинома. Расчет преломляющей поверхности базируется на градиентной минимизации функционала ошибки, представляющего отличие расчетной и заданной освещенности, по коэффициентам полинома эйконала, определяющего поверхность.

**Постановка задачи расчета оптической поверхности.** Требуется рассчитать преломляющую поверхность  $M$  из условия фокусировки излучения точечного источника  $O = (O_x, O_y, O_z)$  в область  $D$ , расположенную в плоскости  $z = f$  (рис. 1). При этом в области  $D$  должно быть сформировано требуемое

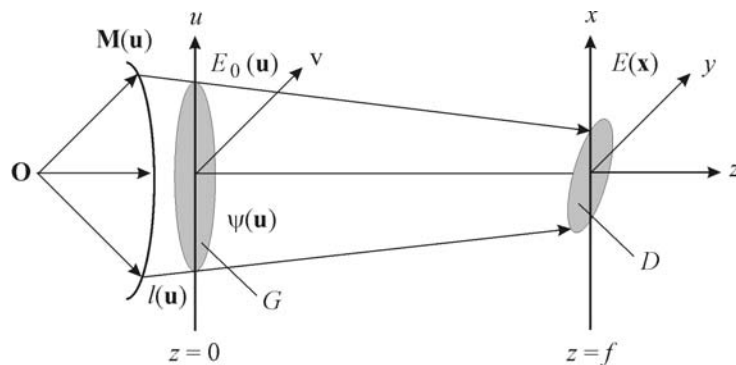


Рис. 1. Геометрия задачи расчета преломляющего оптического элемента, формирующего требуемое распределение освещенности

мое распределение освещенности  $E(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in D$ . Плоскость  $z = f$  и область  $D$  будем называть плоскостью фокусировки и областью фокусировки соответственно.

Поверхность  $\mathbf{M}$  определим через распределение эйконала светового поля  $\psi(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in G$ , в некоторой плоскости, где  $\mathbf{u} = (u, v)$  – декартовы координаты. Без потери общности будем считать, что эйконал задан в плоскости  $z = 0$  (см. рис. 1). Представление поверхности через распределение эйконала в плоскости считаем удобным, поскольку оно позволяет использовать аналитические и итерационные методы расчета эйконала, разработанные для дифракционных оптических элементов [4–10].

Поверхность  $M(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}), z(\mathbf{u}))$  однозначно определяется через распределение эйконала  $\psi(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in G$ . Проведем расчет преломляющей поверхности по распределению эйконала  $\psi(\mathbf{u})$  (см. рис. 1). Запишем уравнение преломляющей поверхности в виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})l(\mathbf{u}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = (u, v, 0)$  – вектор точки в плоскости задания эйконала;  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  – вектор направления луча, который определяется эйконалом  $\psi(\mathbf{u})$ ;  $l(\mathbf{u})$  – расстояние от точки  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  до преломляющей поверхности по направлению  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ . Вектор луча  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$  имеет следующий вид [17]:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = (p_x(\mathbf{u}), p_y(\mathbf{u}), p_z(\mathbf{u})) = \left( \nabla\psi(\mathbf{u}), \sqrt{1 - (\nabla\psi(\mathbf{u}))^2} \right), \quad (2)$$

где  $\nabla\psi(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial u}, \frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial v} \right)$ . Функция  $l(\mathbf{u})$  в (1) определяется из уравнения

$$\psi(\mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) + n|\mathbf{OM}(\mathbf{u})|, \quad (3)$$

где  $n$  – показатель преломления материала оптического элемента;  $|\mathbf{OM}(\mathbf{u})| = |\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})l(\mathbf{u}) - \mathbf{O}|$  – расстояние от источника излучения до точки преломляющей поверхности. Уравнение (3) определяет условие равенства оптических длин лучей, прошедших через преломляющую поверхность, заданному эйконалу  $\psi(\mathbf{u})$ . Расчет функции  $l(\mathbf{u})$  из (3) сводится к решению квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (n^2 - 1)l(\mathbf{u}) + 2l(\mathbf{u})(\psi(\mathbf{u}) - n^2(\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{O}, \mathbf{p}(\mathbf{u}))) + \\ + n^2|\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{O}|^2 - \psi^2(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Расчет освещенности в плоскости фокусировки** рассмотрим для  $z = f$ . Обозначим через  $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x(\mathbf{u}), y(\mathbf{u}))$  координаты пересечения лучей с плоскостью фокусировки. Согласно (2) получим

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \nabla\psi(\mathbf{u}) \frac{f}{\sqrt{1 - (\nabla\psi(\mathbf{u}))^2}}. \quad (5)$$

Освещенность в плоскости фокусировки определяется из закона сохранения светового потока в виде

$$E(\mathbf{x}) = E_0(\mathbf{u})/|J(\mathbf{u})|, \quad (6)$$

где  $E_0(\mathbf{u})$  – освещенность, созданная поверхностью в плоскости задания эйконала, а

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial x(\mathbf{u})}{\partial u} \frac{\partial y(\mathbf{u})}{\partial v} - \frac{\partial y(\mathbf{u})}{\partial u} \frac{\partial x(\mathbf{u})}{\partial v} \quad (7)$$

– якобиан преобразования координат (5). Освещенность  $E_0(\mathbf{u})$  также определяется из закона сохранения светового потока по формуле

$$E_0(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u}) \frac{\left| \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial v} \right) \right|}{|\mathbf{OM}(\mathbf{u})|^2} \cos \alpha, \quad (8)$$

где  $I(\mathbf{u})$  – интенсивность точечного источника излучения;

$$\cos \alpha = (\mathbf{OM}(\mathbf{u}), \mathbf{n}(\mathbf{u})) / |\mathbf{OM}(\mathbf{u})|;$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial v} \right) / \left| \left( \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial v} \right) \right|$$

– единичный вектор нормали к оптической поверхности. Векторы-компоненты векторного произведения в (8) вычисляются из (1) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial u} p_x(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_x(\mathbf{u})}{\partial u} \\ -\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial u} p_y(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_y(\mathbf{u})}{\partial u} \\ -\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial u} p_z(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_z(\mathbf{u})}{\partial u} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{u})}{\partial v} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial v} p_x(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_x(\mathbf{u})}{\partial v} \\ 1 - \frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial v} p_y(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_y(\mathbf{u})}{\partial v} \\ -\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial v} p_z(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u}) \frac{\partial p_z(\mathbf{u})}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Производные  $\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial l(\mathbf{u})}{\partial v}$  в формуле (9) находятся дифференцированием уравнения (4).

Представление освещенности (6) неудобно для расчета, поскольку его нельзя использовать в области каустик, а также в случае, когда несколько лучей из плоскости задания эйконала приходит в одну точку области фокусировки. Расчетная формула для распределения освещенности  $E(\mathbf{x})$  находится с помощью интегрального представления формулы (6):

$$E(\mathbf{x}) = \iint_G \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (10)$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта-функция. Аппроксимируем дельта-функцию в (10) некоторой иглообразной функцией  $\delta_\sigma(x, y)$   $\left( \lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta_\sigma(x, y) = \delta(x, y) \right)$  и представим распределение освещенности в виде

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \iint_G \delta_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u})) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\ &= \iint_G \delta_\sigma \left( \mathbf{x} - \mathbf{u} - \nabla \Psi(\mathbf{u}) f / \sqrt{1 - (\nabla \Psi(\mathbf{u}))^2} \right) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (11) ориентировано на расчет освещенности с использованием метода трассировки лучей. В этом случае (11) дает усредненное значение освещенности по окрестности, определяемой «эффективной» шириной функции  $\delta_\sigma(x, y)$ . Величина окрестности обычно задается шагом дискретизации в области наблюдения. В качестве функции  $\delta_\sigma(x, y)$  может использоваться, например, гауссова функция

$$\delta_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right). \quad (12)$$

Здесь освещенность (11) будет усредненным значением освещенности (10) с гауссовым весом (12).

**Расчет оптической поверхности для фокусировки в заданную область.** Для расчета преломляющей поверхности  $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ , формирующей заданное распределение освещенности, применялся градиентный метод минимизации функционала ошибки  $\varepsilon(\psi)$ , выражающего отличие расчетного и требуемого распределений освещенности в плоскости фокусировки.

При этом поверхность и распределение освещенности считаются представленными через эйконал поля в плоскости  $z = 0$  согласно формулам (1), (2), (4), (8), (9), (11), что является удобным. Применение аналитических и численных методов расчета эйконала поля, разработанных для расчета дифракционных оптических элементов, позволяет выбрать начальное приближение для градиентного метода. В качестве такого приближения можно взять, например, результат решения задачи расчета эйконала для формирования подобного распределения освещенности.

Рассмотрим градиентный метод. Определим эйконал в виде полинома

$$\psi(u, v) = \sum_{ij} c_{ij} u^i v^j. \quad (13)$$

Полиномиальное представление эйконала использовалось в работах [18, 19] и показало хорошие результаты при расчете эйконала из условия фокусировки в заданные области. В этом случае задача минимизации функционала ошибки  $\varepsilon(\psi)$  сводится к задаче минимизации функции многих переменных от коэффициентов  $c_{ij}$ . В качестве функции невязки была взята квадратичная функция

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \iint_D (E(\mathbf{x}; \mathbf{c}) - E(\mathbf{x}))^2 dx dy, \quad (14)$$

где вектор  $\mathbf{c}$  обозначает набор коэффициентов полинома, а  $E(\mathbf{x}; \mathbf{c})$ ,  $E(\mathbf{x})$  – расчетное и требуемое распределения освещенности в области фокусировки. Градиентный расчет функции преломляющей поверхности состоит в итерационной коррекции вектора коэффициентов  $\mathbf{c}$  по правилу

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n-1} - t \nabla \varepsilon(\mathbf{c}_{n-1}) \quad (15)$$

(здесь  $\nabla \varepsilon(\mathbf{c})$  – градиент функции невязки,  $t$  – шаг метода). Компоненты вектора градиента в (15) несложно получить в виде

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{c})}{\partial c_{ij}} = 2 \iint_D (E(\mathbf{x}; \mathbf{c}) - E(\mathbf{x})) \Psi_{ij}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}, \quad (16)$$

где

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}) = \iint_G E_0(\mathbf{u}; \mathbf{c}) \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \left( \delta_\sigma \left( \mathbf{x} - \mathbf{u} - \nabla \psi(\mathbf{u}) f / \sqrt{1 - (\nabla \psi(\mathbf{u}))^2} \right) \right) d^2 \mathbf{u}$$

( $E_0(\mathbf{u}; \mathbf{c})$  – освещенность (8) в плоскости задания эйконала,  $\mathbf{x}(\mathbf{u}; \mathbf{c})$  – координаты лучей (5) в плоскости фокусировки).

Вектор градиента также может рассчитываться численно с применением разностных формул для определения производных  $\partial \varepsilon / \partial c_{ij}$ . В данной работе для минимизации функции ошибки (14) и реализации градиентного метода (15) были использованы java-класс `Uncmin_f77` и java-интерфейс `Uncmin_methods` из пакета оптимизации AN UNCONSTRAINED NONLINEAR OPTIMIZATION SOLVER.

**Результаты расчета.** Для характеристики качества решений, получаемых в результате работы итерационного алгоритма, введем значения энергетической эффективности  $e$  и среднеквадратической ошибки  $\delta$ . Величина

$$e = \int_D E(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} / \int_G E_0(\mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} \quad (17)$$

характеризует долю энергии, фокусируемой в требуемую область  $D$ , а

$$\delta = \frac{1}{\bar{E}} \left[ \frac{1}{\|D\|} \int_D (E(\mathbf{x}; \mathbf{c}) - E(\mathbf{x}))^2 d^2 \mathbf{x} \right]^{1/2}, \quad (18)$$

где  $\|D\|$  – площадь области фокусировки  $D$ , а  $\bar{E}$  – среднее значение, характеризующее ошибку формирования заданного распределения освещенности  $E(\mathbf{x})$ .

Преломляющая поверхность, рассчитанная градиентным методом из условия формирования равномерного распределения освещенности в прямоугольной области, показана на рис. 2. В данном случае эйконал, представляющий поверхность, задавался в виде симметричного полинома 6-й степени в круговой области радиуса 2,5 мм. Источник находился в точке  $O = (0, 0, -5)$  мм. В примере эйконал определен в прилегающей плоскости и

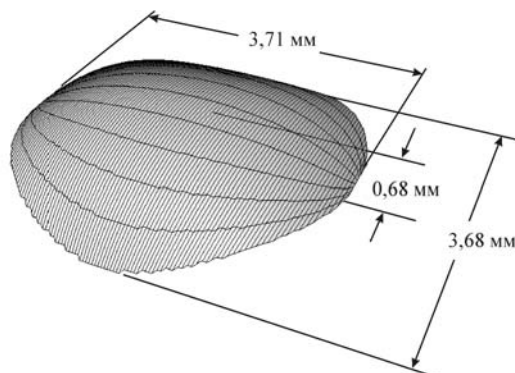


Рис. 2. Преломляющая поверхность для фокусировки в прямоугольную область размером  $70 \times 50$  мм, расположенную на плоскости  $z = 115$  мм

вершина преломляющей поверхности касается плоскости задания эйконала в точке  $(0, 0, 0)$ .

Симметричный полином 6-й степени имеет девять коэффициентов для оптимизации. Время расчета эйконала с указанным числом параметров на компьютере Pentium4 составляет порядка 15 мин. Для поверхности (см. рис. 2) энергетическая эффективность фокусировки составляет фактически 100 % при среднеквадратической ошибке  $\delta = 5,9$  %.

В целях проверки правильности разработанных алгоритмов и программ было проведено моделирование работы рассчитанного оптического элемента средствами специализированной программы по светотехнике TracePro (<http://www.lambdare.com/products/tracepro/index.phtml>). Отметим, что программа TracePro не решает обратных задач расчета поверхностей, а позволяет только моделировать работу оптических систем по методу трассировки лучей. Результаты расчета по этому методу при числе лучей 100000 приведены на рис. 3. Они соответствуют требуемому распределению и подтверждают правильность разработанных программ.

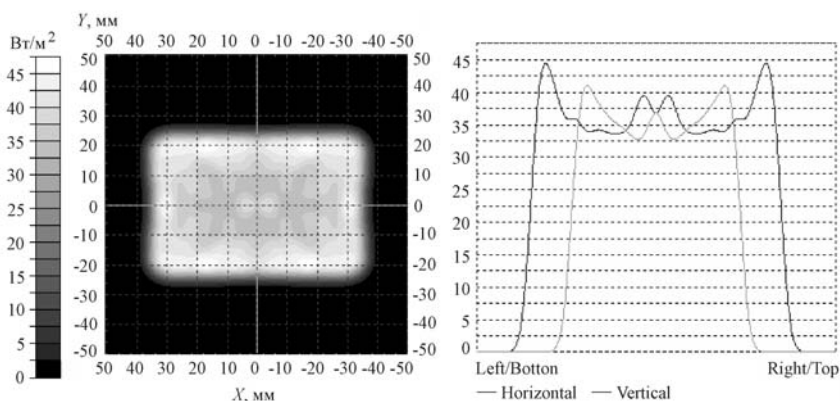


Рис. 3. Рассчитанная освещенность от преломляющей поверхности в плоскости фокусировки  $z = 115$  мм (см. рис. 2) с помощью TracePro



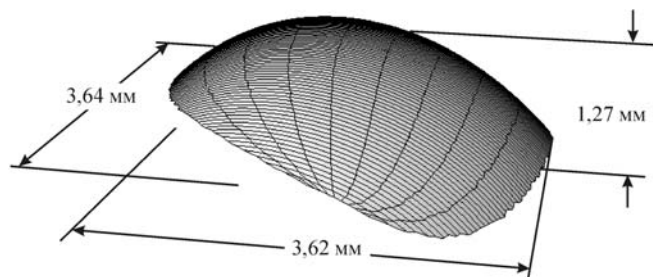


Рис. 4. Преломляющая поверхность для фокусировки излучения от точечного источника в несимметричную треугольную область на плоскости  $z = 115$  мм

Преломляющая поверхность, рассчитанная для фокусировки в несимметричную область в виде равнобедренного треугольника со сторонами 50 и 51 мм, показана на рис. 4. Здесь эйконал задавался в виде несимметричного полинома 6-й степени в круговой области радиуса 2,5 мм. Источник находился в точке  $O = (0, 0, -5)$  мм. Эйконал определен также в прилегающей плоскости, и вершина преломляющей поверхности касается плоскости задания эйконала в точке  $(0, 0, 0)$ .

Несимметричный полином 6-й степени имеет 27 коэффициентов для оптимизации. Время расчета эйконала с указанным числом параметров на компьютере Pentium4 составило порядка 90 мин. Для поверхности (см. рис. 4) энергетическая эффективность фокусировки составляет фактически 100 % при среднеквадратической ошибке  $\delta = 11,2$  %.

Для рассчитанной поверхности также было проведено моделирование распространения излучения точечного источника с использованием TracePro

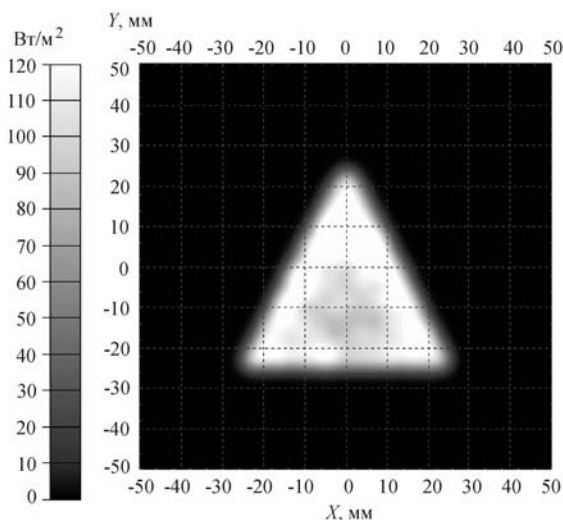


Рис. 5. Рассчитанная освещенность от преломляющей поверхности в плоскости фокусировки  $z = 115$  мм (см. рис. 4) с помощью TracePro



при 100000 лучах (рис. 5). Наблюдается соответствие результатов, полученных при расчете распределения освещенности и при моделировании.

Приведенные примеры подтверждают эффективность разработанного итерационного алгоритма для задачи расчета преломляющих оптических элементов при фокусировке в заданные двумерные области.

**Заключение.** Рассмотренный в данной работе метод расчета преломляющей поверхности, представленной через эйконал поля, дает высокое качество фокусировки в заданную двумерную область. Для расчета поверхностей, формирующих равномерное прямоугольное и треугольное распределение освещенности, достаточно представить поверхности через эйконал в виде полинома 6-й степени, который обеспечивает низкую среднеквадратическую ошибку (5–10 %) при фактически 100 %-ной энергетической эффективности. Предложенный метод можно использовать при расчете отражающих поверхностей, когда изменится только уравнение (4), описывающее восстановление поверхности по эйконалу в плоскости, а также модифицировать для расчета оптических элементов при размерном источнике излучения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Guan P., Wang X.** On a Monge–Ampere equation arising in geometric optics // Journ. Differential Geometry. 1998. **48**. P. 205.
2. **Oliker V.** Mathematical Aspects of Design of Beam Shaping Surfaces in Geometrical Optics in Trends in Nonlinear Analysis. Berlin: Springer, 2003. P. 193.
3. **Glimm T., Oliker V.** Optical design of two-reflector systems, the Monge–Kantorovich mass transfer problem and Fermat's principle // Indiana Univer. Math. Journ. 2004. **53**. P. 1255.
4. **Волков А. В., Головашкин Д. Л., Досколович Л. Л. и др.** Методы компьютерной оптики /Под ред. В. А. Соифера. М.: Физматлит, 2003.
5. **Soifer V. A., Doskolovich L. L., Golovashkin D. L. et al.** Methods For Computer Design of Diffractive Optical Elements /Ed. V. A. Soifer. N. Y.: John Willey & Sons, Inc., 2002.
6. **Данилов В. А., Попов В. В., Прохоров А. М. и др.** Оптические элементы, фокусирующие когерентное излучение в произвольную фокальную линию. М., 1983. 41 с. (Препр. /ФИАН СССР; № 6).
7. **Гончарский А. В., Данилов В. А., Попов В. В. и др.** Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // ДАН СССР. 1983. **273**, № 3. С. 605.
8. **Данилов В. А., Попов В. В., Прохоров А. М. и др.** Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ. 1982. **8**, № 13. С. 810.
9. **Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В.** Введение в компьютерную оптику. М.: Изд-во МГУ, 1991.
10. **Данилов В. А., Кинбер Б. Е., Шилов А. Е.** Теория когерентных фокусаторов // Компьютерная оптика. 1987. Вып. 1. С. 40.
11. **Elmer W. B.** The Optical Design of Reflectors. N. Y.: Willey, 1985.
12. **Feuermann D., Gordon J. M., Ries H.** Nonimaging optical designs for maximum power density remote irradiation // Appl. Opt. 1998. **37**. P. 1835.
13. **Feuermann D., Gordon J. M.** Optical performance of axisymmetric edge-ray concentrators and illuminators // Ibid. P. 1905.

14. **Gordon J. M., Rabl A.** Reflectors for uniform far-field irradiance: fundamental limits and example of an axisymmetric solution // Ibid. P. 44.
15. **Ries H., Muschaweck J.** Tailored freeform optical surfaces // JOSA A. 2002. **19**. P. 590.
16. **Hicks R. A.** Designing a mirror to realize a given projection // JOSA A. 2005. **22**. P. 323.
17. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970.
18. **Белоусов А. А., Досколович Л. Л., Харитонов С. И.** Градиентный метод расчета эйконала для фокусировки в заданную область // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 98.
19. **Dresel T., Beyerlein M., Schwider J.** Design of computer-generated beam-shapingholograms by iterative finite-element mesh adaption // Appl. Opt. 1996. **35**. P. 6865.

*Поступила в редакцию 2 февраля 2007 г.*

---