

**ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПОДХОДА КЕЙПОНА
В ЗАДАЧЕ ДЕМОДУЛЯЦИИ
ЧАСТОТНО-МАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ**

А. А. Логинов, О. А. Морозов, Е. А. Солдатов, С. Л. Хмелев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,

г. Нижний Новгород

E-mail: loginov@nifti.unn.ru

Разработан алгоритм цифровой фильтрации на основе подхода Кейпона в задаче демодуляции частотно-манипулированных сигналов. Коэффициенты фильтра соответствуют информационно-оптимальному решению задачи минимизации дисперсии на выходе линейного фильтра. Показана эффективность предложенного метода в условиях аддитивных шумов и неточного знания центральной частоты спектра обрабатываемого сигнала. Алгоритм может быть реализован на базе программируемой логики в режиме реального времени.

Введение. Задача цифровой фильтрации возникает во многих областях науки и техники, в том числе связанных с приемом и анализом сигналов с различными видами модуляции (манипуляции). В задаче демодуляции частотно-манипулированных (ЧМ) сигналов фильтрация может быть использована для изменения представления обрабатываемого сигнала к виду, удобному для проведения декодирования переданной информационной последовательности. Для ЧМ-сигналов задача формулируется следующим образом: необходимо провести фильтрацию гармонического заполнения принятого сигнала так, чтобы каждой из частот ЧМ-сигнала соответствовал некоторый постоянный уровень. В этом случае задача декодирования решается пороговым методом на основе критерия максимального правдоподобия [1].

Традиционные подходы к решению данной задачи основаны на использовании согласованных фильтров, отвечающих условию максимизации соотношения сигнал/шум на их выходе. Согласованная фильтрация (особенно в условиях неизвестного сдвига спектра сигнала, вызванного, например, влиянием эффекта Доплера) предполагает использование схем автоподстройки частоты, что, с одной стороны, усложняет аппаратную реализацию, а с другой – не позволяет обрабатывать короткие информационные сигналы в силу необходимости соблюдения компромисса между скоростью сходимости и точностью алгоритма подстройки. Применение полосовых фильтров, настроенных на каждую из частот ЧМ-сигнала, частично устраняет отмеченные проблемы, однако не является оптимальным с точки зрения обработки гармонических сигналов [1].

Кроме того, могут быть предложены методы, основанные на модификации существующих подходов [2–4] к синтезу фильтров, позволяющие учесть имеющуюся информацию об обрабатываемом сигнале и избежать использования схем автоподстройки частоты. Одним из таких подходов является подход минимальной дисперсии Кейпона [5].

Цель данной работы – создание алгоритма демодуляции коротких ЧМ-сигналов в условиях присутствия эффекта Доплера на основе модификации подхода минимальной дисперсии.

Принцип построения модифицированного фильтра минимальной дисперсии. В ситуации, когда имеется необходимость обработки сигнала, в спектре которого по тем или иным причинам могут быть выделены две частотные компоненты, известный подход Кейпона модифицируется следующим образом. Нужно найти такой вектор коэффициентов, который минимизировал бы дисперсию на выходе линейного фильтра при заданных коэффициентах пропускания b_1, b_2 на частотах f_1, f_2 . Математически данную задачу можно сформулировать в виде [5]

$$\begin{cases} \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_1) = b_1, \\ \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_2) = b_2, \\ \mathbf{c}^H \mathbf{R} \mathbf{c} \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{c} – вектор коэффициентов фильтра; $\mathbf{e}(f_i)$ – вектор комплексных экспонент соответствующей частоты; $\mathbf{R} = \mathbf{R}(f_1, f_2)$ – автокорреляционная матрица (АКМ) сигнала, содержащего две синусоиды с частотами f_1, f_2 . Здесь и далее предполагается, что все частоты выражены в относительных величинах, т. е. $f \equiv f/d$, где d – частота дискретизации.

Выполнение поставленных ограничений соответствует задаче обработки сигнала так называемого частотного телеграфа (ЧТ) с возможными частотами f_1, f_2 . Целью обработки является изменение формы представления сигнала, т. е. переход от его исходного вида к представлению, удобному для последующего анализа. В частности, по отклику фильтра могут быть произведены оценки параметров сигнала, выделение модулирующей последовательности или обнаружение известного сигнала на фоне других сигналов и аддитивных шумов в условиях неизвестного сдвига спектра сигнала.

Система (1) допускает аналитическое решение при $f_1 = f_2$ и $b_1 = b_2$, которое переходит в решение минимума дисперсии [5]. Варьирование функционала Лагранжа

$$\Phi = \mathbf{c}^H \mathbf{R} \mathbf{c} - \lambda_1 (\mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_1) - b_1) - \lambda_2 (\mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_2) - b_2) \quad (2)$$

приводит к следующей системе линейных уравнений относительно коэффициентов фильтра \mathbf{c} :

$$\begin{cases} \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_1) = b_1, \\ \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_2) = b_2, \\ \mathbf{R} \mathbf{c} - \lambda_1 \mathbf{e}(f_1) - \lambda_2 \mathbf{e}(f_2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) имеет вид

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}^{-1}(\lambda_1 \mathbf{e}(f_1) + \lambda_2 \mathbf{e}(f_2)). \quad (4)$$

Вводя обозначение

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{e}^H(f_i) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(f_j), \quad (5)$$

получаем систему уравнений относительно множителей Лагранжа λ_1, λ_2

$$\begin{cases} \lambda_1 \varepsilon_{11} + \lambda_2 \varepsilon_{12} = b_1, \\ \lambda_1 \varepsilon_{21} + \lambda_2 \varepsilon_{22} = b_2, \end{cases} \quad (6)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{b_1 \varepsilon_{22} - b_2 \varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21}}, \\ \lambda_2 = \frac{b_2 \varepsilon_{11} - b_1 \varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21}}. \end{cases} \quad (7)$$

Выражения (4) и (7) являются точным решением поставленной задачи нахождения коэффициентов кейпоноподобного фильтра (1). Следует отметить, что полученное решение (при условии взаимной непротиворечивости параметров f_1, f_2, b_1, b_2) имеет свойства, аналогичные свойствам решения минимума дисперсии. При нахождении решения системы (1) предполагается, что АКМ невырождена, а количество коэффициентов фильтра p определяется количеством спектральных составляющих в исходном сигнале. Увеличение значения параметра p приводит к вырождению АКМ, что, в свою очередь, приводит к появлению бесконечного числа решений, удовлетворяющих поставленным линейным ограничениям (1). В этом случае традиционно применяется метод замены обратной матрицы псевдообратной матрицей Мура – Пенроуза [5]. Полученное решение задачи (1) будет соответствовать критерию минимальной нормы вектора коэффициентов фильтра. На рис. 1, a, c, e приведены модули частотных характеристик модифицированного фильтра Кейпона, найденных на основе псевдообратной матрицы.

В соответствии с подходом Кейпона построим зависимость дисперсии выхода предложенного фильтра от частот f_1, f_2 , считая их переменными величинами:

$$\rho = \frac{b_1^2 \varepsilon_{22} + b_2^2 \varepsilon_{11} - b_1 b_2 (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})}{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21}}. \quad (8)$$

Данная зависимость для случая $b_1 = b_2 = 1$ приведена на рис. 2. Анализ выражения (8) показывает, что его свойства аналогичны свойствам выражения дисперсии Кейпона. Пока f_1 и f_2 в выражении (8) не соответствуют частотам, для которых построена АКМ, дисперсия оказывается практически нулевой. При совпадении одной из частот с частотой соответствующей АКМ дисперсия принимает некоторое значение, увеличивающееся вдвое, когда совпадают обе частоты. Следует отметить, что в силу симметрии на рис. 2 приведена четверть всех частотных отсчетов.

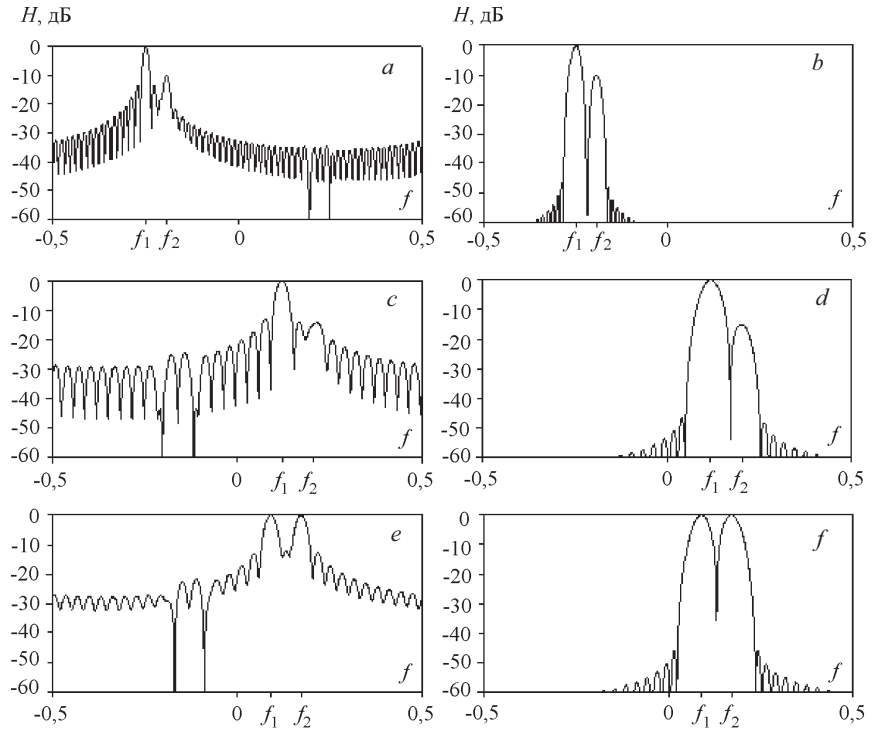


Рис. 1. Частотные характеристики для параметров: $p = 64$, $b_2 = -10$ дБ (a, b); $p = 31$, $b_2 = -15$ дБ (c, d); $p = 32$, $b_2 = 0$ дБ (e, f)

Необходимо отдельно подчеркнуть, что выражения (4), (7) и (8) в пределе (при $f_1 = f_2$, $b_1 = b_2$) асимптотически соответствуют выражениям для фильтра минимальной дисперсии Кейпона [5].

Получение коэффициентов модифицированного фильтра минимальной дисперсии на основе подхода максимума энтропии. Рассмотренный выше подход к синтезу фильтров допускает следующее обобщение. Существование бесконечного числа векторов коэффициентов, удовлетворяющих системе (1), вызванное вырождением АКМ, позволяет выбрать тот из них, который отвечает некоторому критерию. Такой критерий может быть выбран в виде определенного функционала, оптимум которого соответствует решению, обладающему заданными свойствами.

Обоснованность такого подхода при решении подобных задач показана, например, в работах [2, 3], где в качестве критерия выбора использовался функционал «минимальной спектральной полосы». Для получения оптимального решения в условиях недостаточной информации

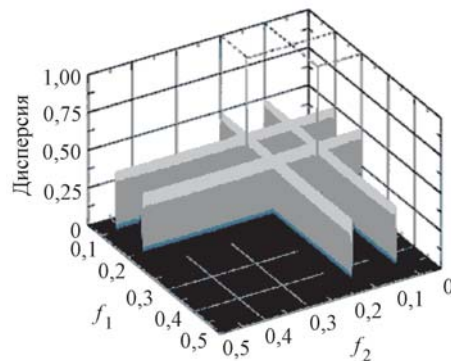


Рис. 2. Зависимость дисперсии выхода модифицированного фильтра Кейпона от f_1 и f_2

при ограниченном числе коэффициентов фильтра возможно применение функционала информационной энтропии в форме Берга [6], выпуклость которого гарантирует единственность решения при линейных ограничениях.

Таким образом, предлагается переформулировать задачу следующим образом: необходимо найти коэффициенты линейного фильтра, максимизирующие энтропийный функционал Берга, аргументом которого в силу своей неотрицательности и ограниченности может служить амплитудно-частотная характеристика разрабатываемого фильтра при условии заданных коэффициентов пропускания на частотах f_1, f_2 . При этом по-прежнему полагается, что коэффициенты должны минимизировать дисперсию выхода фильтра. Математически данная задача может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_1) = b_1, \\ \mathbf{c}^H \mathbf{e}(f_2) = b_2, \\ \mathbf{c}^H \mathbf{R} \mathbf{c} \rightarrow \min, \\ S = - \int \log(|H(f)|) \rightarrow \max, \end{cases} \quad (9)$$

где частотная характеристика фильтра $H(f)$ представляет собой преобразование Фурье от коэффициентов фильтра:

$$H(f) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \exp(-2\pi ifk); \quad (10)$$

S – функционал информационной энтропии в форме Берга для $H(f)$. Непосредственное использование численного метода неопределенных множителей Лагранжа в этом случае предполагает решение системы нелинейных уравнений с комплексными коэффициентами для явного нахождения множителей Лагранжа. Существенная вычислительная сложность решения таких систем не ограничивает применение этого подхода в рамках поставленной задачи, так как процедура нахождения коэффициентов фильтра должна быть выполнена только один раз при его конструировании. Вместе с тем свойства функционала информационной энтропии дают возможность построения итерационных процедур, сходящихся к единственному решению. В частности, возможен поиск решения прямыми методами оптимизации функционала энтропии при автоматическом слежении за условиями (9). При данных ограничениях функционал энтропии имеет хорошо выраженный минимум с плоским дном и вытянутую форму, вследствие чего является обоснованным выбор алгоритма оптимизации на основе метода Хука – Дживса [7].

Частотные характеристики фильтров, полученных на основе описанного подхода, приведены на рис. 1, e, d, f , из которого видно, что требование оптимальности функционала энтропии позволяет существенно понизить уровень боковых лепестков по сравнению с фильтром на основе псевдообратной матрицы и лучше разделить лепестки, соответствующие частотам f_1, f_2 .

Алгоритм декодирования ЧТ-сигналов. На основе предложенного подхода к цифровой фильтрации (2) может быть разработан алгоритм обработки ЧТ-сигналов в условиях аддитивного шума и неизвестного сдвига частот, вызванного, например, эффектом Доплера. Его влияние можно рассмат-

ривать как частотное масштабирование спектрального распределения, что для ЧТ-сигналов приводит к изменению частот f_1, f_2 и длины символьных сегментов сигнала. В данной работе исследуется влияние изменения частоты заполнения на эффективность предложенного алгоритма декодирования. При этом не выполняется коррекция длины символьных сегментов, так как во многих случаях, например в широко распространенных системах с временным разделением доступа и кадровой синхронизацией, такая коррекция часто не требуется, поскольку производится обработка коротких выборок символов (сотни символов).

Поведение выходного сигнала фильтра, полученного на основе системы (9), приведено на рис. 3. До тех пор, пока на вход фильтра поступает сигнал частоты f_1 , выходом фильтра является некоторое приблизительно постоянное значение, соответствующее коэффициенту пропускания b_1 . Если на вход фильтра подать сигнал частоты f_2 , то выходом фильтра будет другое значение, соответствующее коэффициенту пропускания b_2 . Таким образом, выходной сигнал фильтра представляет собой некоторый аналог модулирующей последовательности.

Поскольку гармоническому сигналу каждой из частот f_1, f_2 в идеальном случае соответствует выход определенного уровня, то декодирование битовой последовательности может быть произведено пороговым методом.

Выбор уровня порога был проведен на основе критерия максимального правдоподобия [1]. С учетом равенства априорных вероятностей ожидаемых сигналов оптимальный порог находим по точке пересечения плотностей вероятности уровня выхода, построенных для каждого из возможных входных сигналов. Поскольку линейная система не изменяет гауссового распределения присутствующего шума [8], то плотность вероятности уровня выходного сигнала строится на основе вычисления его среднего и дисперсии. При определении зависимости оптимального порога от уровня шума были проведены оценки среднего и дисперсии выходного сигнала фильтра каждого из возможных входных сигналов для отношения сигнал/шум в интервале 0–20 дБ. Моделирование показало, что уровень оптимального порога в интервале оценивания слабо зависит от уровня шума, следовательно, он может быть выбран на уровне максимального соотношения сигнал/шум, при котором предлагаемый алгоритм должен гарантировать требуемую достоверность результатов декодирования. В данной работе уровень порога рассчитывался

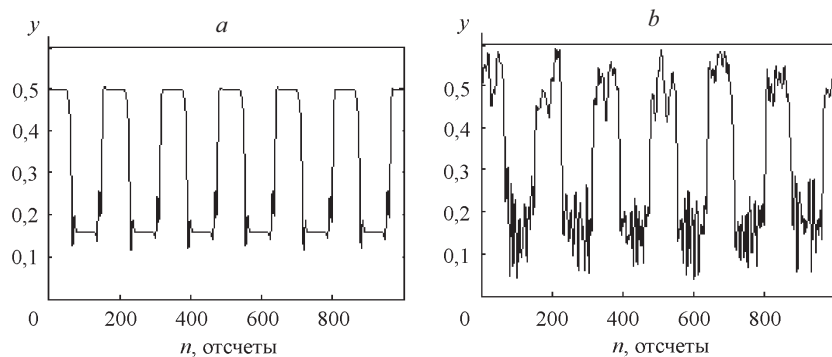


Рис. 3. Модуль выхода фильтра при отношениях сигнал/шум: +60 дБ (а) и +6 дБ (б)

для соотношения сигнал/шум 0 дБ, величина порога выхода фильтра составила 0,35 (см. рис. 3).

Результаты моделирования. Численные эксперименты проводились с использованием программной реализации предложенного алгоритма. Для определения устойчивости построенного фильтра к шуму перед декодированием на сигнал накладывался аддитивный шум в полной спектральной полосе. При определении чувствительности построенной системы к сдвигу центральной частоты спектра сигнала ω_0 были проведены испытания на частоте, отличающейся от ω_0 на величину $\Delta\omega = 1$ кГц.

Декодирование производилось по уровню выхода фильтра пороговым методом. Порог выбирался с помощью критерия максимального правдоподобия на основе проведенных исследований. Для моделирования был взят фильтр с параметрами: $p = 32$, $b_1 = 0$ дБ, $b_2 = -10$ дБ. Параметры обрабатываемого сигнала: $\omega_1 = 200$ кГц, $\omega_2 = 216$ кГц, частота манипуляций 4800 Гц, частота дискретизации 190 кГц.

Результаты статистических испытаний метода декодирования представлены на рис. 4. Каждая точка на графиках получена декодированием 10^6 символов. На рисунке приведены зависимости вероятности символьной ошибки от отношения сигнал/шум для тестовых сигналов в случае $\Delta\omega = 0$ кГц (кривая 1) и $\Delta\omega = 1$ кГц (кривая 2). Анализ полученных зависимостей позволяет сделать вывод об устойчивости предложенного алгоритма к наличию неизвестного сдвига центральной частоты спектра сигнала.

Декодирование производится на основе сравнения значения выходного сигнала в середине очередного символа (при этом учитывается влияние переходной характеристики фильтра) с выбранным порогом. Для повышения устойчивости предлагаемого алгоритма относительно уровня шума можно усреднить значения выхода на интервале манипуляции с помощью окна. Получаемый при этом выигрыш составляет около 1 дБ для вероятности ошибки 10^{-3} .

Моделирование показало, что применение предложенного подхода позволяет построить систему, декодирующую ЧТ-сигналы с вероятностью ошибки менее 10^{-3} для соотношений сигнал/шум не хуже +6 дБ при использовании схемы на основе порогового сравнения по одной точке и не хуже +5 дБ для схемы с усреднением.

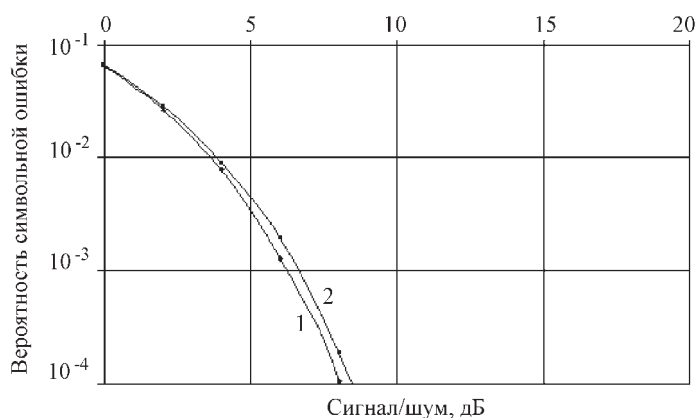


Рис. 4. Зависимости вероятности символьной ошибки от отношения сигнал/шум

Заключение. В данной работе предложен алгоритм цифровой фильтрации с помощью модифицированного фильтра Кейпона, имеющего оптимальную в информационном смысле амплитудно-частотную характеристику, в задаче декодирования бинарных ЧМ-сигналов. Разработанный алгоритм основан на простых арифметических операциях и может быть эффективно реализован на встроенных вычислительных системах. Проведенные исследования устойчивости работы предложенного алгоритма относительно аддитивных шумов дают основания для применения описанного метода в задаче декодирования ЧТ-сигналов в условиях сдвига центральной частоты спектра, обусловленного влиянием эффекта Доплера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.
2. **Логинов А. А., Морозов О. А., Солдатов Е. А., Фидельман В. Р.** Алгоритм обработки фазоманипулированных сигналов избыточным линейным фильтром в задаче определения временной задержки // Автометрия. 2006. **42**, № 4. С. 91.
3. **Логинов А. А., Морозов О. А., Солдатов Е. А., Фидельман В. Р.** Применение нелинейной цифровой фильтрации на основе подхода минимальной дисперсии Кейпона в задаче определения временной задержки // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Радиофизика. 2005. Вып. 1(3). С. 65.
4. **Li J., Stoica P., Wang Z.** On robust Capon beamforming and diagonal loading // IEEE Trans. Signal Process. 2003. **51**, N 7. P. 1702.
5. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
6. **Джейнс Э. Т.** О логическом обосновании методов максимальной энтропии // ТИИЭР. 1982. **70**, № 9. С. 33.
7. **Базара М., Шегги К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
8. **Van Trees H. L.** Detection, Estimation and Modulation Theory. N. Y.: John Willey & Sons, Inc., 1968. Pt. 1.

Поступила в редакцию 13 февраля 2007 г.