Р О С С И Й С К А Я А К А Д Е М И Я Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2008, том 44, № 5

УДК 621.391 : 519.6 : 531.1

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ЦИФРОВЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

С. В. Леньков

Физико-технический институт УрО РАН, г. Ижевск
E-mail: gep@pti.udm.ru

Проведен анализ алгоритма восстановления двумерного входного сигнала (измеряемого изображения) по конечной реализации двумерного сигнала на выходе цифровой оптической системы регистрации с использованием быстрого преобразования Фурье. Получена оценка погрешности восстановления изображения.

Введение. В линейных оптических системах регистрации связь между измеряемым и зарегистрированным сигналом (изображением) описывается интегральным уравнением типа свертки или в частотной области линейным соотношением [1, 2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = \Psi(t_1,t_2);$$
$$G(\omega_1,\omega_2)S_\varphi(\omega_1,\omega_2) = S_\Psi(\omega_1,\omega_2), \tag{1}$$

где $g(\tau_1,\tau_2)$ – аппаратная функция аналоговой части оптической цифровой регистрирующей системы; $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ – измеряемое изображение; $\Psi(t_1,t_2)$ – зарегистрированное изображение; $G(\omega_1,\omega_2)$ – частотная характеристика (аналоговой) аппаратной части оптической системы; $S_\varphi(\omega_1,\omega_2)$ – двумерный спектр измеряемого изображения; $S_\Psi(\omega_1,\omega_2)$ – двумерный спектр зарегистрированного изображения.

Измеряемое изображение получается обратным преобразованием Фурье от восстановленного спектра исходного изображения $S_\varphi(\omega_1,\omega_2) = S_\Psi(\omega_1,\omega_2)/G(\omega_1,\omega_2)$ [2, 3]:

$$\varphi(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega_1,\omega_2)\exp(j\omega_1 t_1 + j\omega_2 t_2)\,\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}. \tag{2}$$

Интеграл (2), определяющий решение интегрального уравнения (1), существует, и решение $\varphi(t_1,\ t_2)\in L_2$, если $G(\omega_1,\ \omega_2)\in L_2$, $S_\Psi(\omega_1,\ \omega_2)\in L_2$ и $S_\varphi(\omega_1,\omega_2)\in L_2$, а единственность решения уравнения (1) гарантирует необращение в нуль частотной характеристики аппаратной части оптической системы $G(\omega_1,\omega_2)$ [1, 3].

Пусть двумерный спектр входного изображения $S_\varphi(\omega_1,\omega_2)$ – финитная функция. Тогда интеграл в (2) надо брать только по частотам (волновым числам) $-\omega_{1m}\le\omega_1\le\omega_{1m}$, $-\omega_{2m}\le\omega_2\le\omega_{2m}$, где ω_{1m}, ω_{2m} – максимальные частоты двумерного спектра измеряемого изображения. Выражение (2) можно представить аналогично [4] для одномерного сигнала

$$\varphi(t_1,t_2)=\int_0^{\omega_{1m}}\int_0^{\omega_{2m}}\frac{S_\Psi(\omega_1,\omega_2)}{G(\omega_1,\omega_2)}\exp(j\omega_1 t_1+j\omega_2 t_2)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}+$$

$$+\int_{\omega_{1m}}^{2\omega_{1m}}\int_0^{\omega_{2m}}\frac{S_\Psi(-(2\omega_{1m}-\varepsilon_1);\ \omega_2)}{G(-(2\omega_{1m}-\varepsilon_1);\ \omega_2)}\exp(-j(2\omega_{1m}-\varepsilon_1)t_1+j\omega_2 t_2)\frac{d\varepsilon_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}+$$

$$+\int_0^{\omega_{1m}}\int_{\omega_{2m}}^{2\omega_{2m}}\frac{S_\Psi(\omega_1;\ -(2\omega_{2m}-\varepsilon_2))}{G(\omega_1;\ -(2\omega_{2m}-\varepsilon_2))}\exp(j\omega_1 t_1-j(2\omega_{2m}-\varepsilon_2)t_2)\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\varepsilon_2}{2\pi}+$$

$$+\int_{\omega_{1m}}^{2\omega_{1m}}\int_{\omega_{2m}}^{2\omega_{2m}}\frac{S_\Psi(-(2\omega_{1m}-\varepsilon_1);\ -(2\omega_{2m}-\varepsilon_2))}{G(-(2\omega_{1m}-\varepsilon_1);\ -(2\omega_{2m}-\varepsilon_2))}\times$$

$$\times\exp(-j(2\omega_{1m}-\varepsilon_1)t_1-j(2\omega_{2m}-\varepsilon_2)t_2)\frac{d\varepsilon_1}{2\pi}\frac{d\varepsilon_2}{2\pi}. \qquad (3)$$

При использовании цифровых оптических регистраторов сигнал на выходе аналоговой части оптической системы неизвестен. Для восстановления входного сигнала есть только конечная реализация дискретного зарегистрированного изображения и оценка его дискретного спектра, вычисленная с помощью двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ). Поэтому актуально рассмотрение алгоритма и точности восстановления измеряемого входного изображения по дискретной конечной реализации зарегистрированного изображения и его спектра, полученного с помощью двумерного БПФ, что является целью данной работы.

Анализ алгоритма восстановления по оцифрованному сигналу. Дискретное зарегистрированное изображение согласно (1) и [1, 2] имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t_{1n}-\tau_1,t_{2k}-\tau_2)\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=\Psi(t_{1n},t_{2k}), \qquad (4)$$

где $t_{1n}=n\Delta_1$, $t_{2k}=k\Delta_2$ – координаты отсчетов изображения; Δ_1,Δ_2 – шаги дискретизации изображения по координатам; $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots,N_1-1$, $k=$

$= 0, 1, 2, 3, \ldots, N_2 - 1$; $N_1 \times N_2$ – число отсчетов изображения (объем выборки), кратное степени числа 2.

Применим к обеим частям (4) прямое двумерное БПФ и получим интегральное соотношение для спектров

$$\Delta_1 \Delta_2 \int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}} \int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}} G(\omega_1, \omega_2) S_{\varphi}(\omega_1, \omega_2) K_{1N}(\omega_1 - \omega_n) \times$$

$$\times K_{2N}(\omega_2 - \omega_n) \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} = D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j}), \qquad (5)$$

где $D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j})$ – оценка спектра выходного сигнала, полученная с помощью двумерного БПФ; $\omega_{1i} = i\Delta\omega_1$; $\omega_{2j} = j\Delta\omega_2$; $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, N_1 - 1$; $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, N_2 - 1$; $\Delta\omega_1 = 2\pi/a$, $\Delta\omega_2 = 2\pi/b$ – шаги квантования двумерного спектра по частотам (по волновым числам) при БПФ;

$$K_{1N}(\omega_1 - \omega_i) = \frac{\exp(j(\omega - \omega_{1i})a) - 1}{\exp(j(\omega_1 - \omega_{1i})\Delta_1) - 1},$$

$$K_{2N}(\omega_2 - \omega_{2j}) = \frac{\exp(j(\omega - \omega_{2j})b) - 1}{\exp(j(\omega_2 - \omega_{2j})\Delta_2) - 1} \qquad (6)$$

– функции основного спектрального окна при БПФ [5], определяющие точность оценки двумерного спектра по координатам; $\omega_{1D} = \Delta\omega_1 N_2$, $\omega_{2D} = \Delta\omega_2 N_2$ – частоты дискретизации изображения по координатам; $a = \Delta_1 N_1$, $b = \Delta_2 N_2$ – размеры окна, ограничивающего измеряемое изображение.

Для восстановления входного сигнала вместо непрерывного спектра имеем дискретную оценку спектра $D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j})$, полученную с помощью двумерного БПФ. Причем дискретный двумерный спектр, полученный БПФ, располагается в области частот $\omega_1 \in [0; 2\omega_{1m}]$, $\omega_2 \in [0; 2\omega_{2m}]$, совпадающей с областью интегрирования в (3). Поскольку при дискретизации должны выполняться равенства $\omega_{1D} = 2\omega_{1m}$, $\omega_{2D} = 2\omega_{2m}$ и $\exp(\pm j\omega_{1D} t_{1n}) = 1$, $\exp(\pm j\omega_{2D} t_{2n}) = 1$, то выражение для оценки отсчетов входного изображения будет являться дискретным аналогом выражения (3):

$$\varphi_D(t_n, t_k) = \sum_{j=0}^{N_1/2} \sum_{i=0}^{N_2/2} \frac{D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i}, \omega_{2j})} \exp(j\omega_{1i} t_{1n} + j\omega_{2j} t_{2k}) \frac{\Delta\omega_1}{2\pi} \frac{\Delta\omega_2}{2\pi} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N_1/2} \sum_{i=N_2/2+1}^{N_2-1} \frac{D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(-(\omega_{1D} - \omega_{1i});\ \omega_{2j})} \exp(j\omega_{1i} t_{1n} + j\omega_{2j} t_{2k}) \frac{\Delta\omega_1}{2\pi} \frac{\Delta\omega_2}{2\pi} +$$

$$+ \sum_{j=N_1/2+1}^{N_1-1} \sum_{i=0}^{N_2/2} \frac{D_{\Psi}(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i};\ -(2\omega_{2D} - \omega_{2j}))} \exp(j\omega_{1i} t_{1n} + j\omega_{2j} t_{2k}) \frac{\Delta\omega_1}{2\pi} \frac{\Delta\omega_2}{2\pi} +$$

$$+\sum_{j=N_1/2+1}^{N_1-1}\ \sum_{i=N_2/2+1}^{N_2-1} \frac{D_{\Psi}(\omega_{1i},\omega_{2j})}{G(-(2\omega_{1D}-\omega_{1i});\ -(2\omega_{2D}-\omega_{2j}))}\times$$

$$\times\exp(j\omega_{1i}t_{1n}+j\omega_{2j}t_{2k})\frac{\Delta\omega_1}{2\pi}\frac{\Delta\omega_2}{2\pi}. \qquad (7)$$

Обычно для обеспечения устойчивой процедуры восстановления производят фильтрацию зарегистрированного изображения цифровым (сглаживающим) фильтром нижних частот (ФНЧ) [1–3]. При этом применяют следующие методы линейной фильтрации, различающиеся способом задания передаточной характеристики фильтра $F(\omega_1,\omega_2)$: инверсная фильтрация с ограничением полосы частот, регуляризация методом Тихонова, оптимальная фильтрация [2, 3].

Используя преобразования, аналогичные приведенным в работе [4], сначала получаем отсчеты отфильтрованного зарегистрированного изображения, далее – оценку его спектра, а затем – оценку измеряемого изображения после процедуры восстановления:

$$\varphi_F(t_n,t_k)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\sum_{i=0}^{N_2-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}}\frac{RK(\xi_1,\xi_2,\omega_1,\omega_2)}{G_{ab}(\omega_{1i},\omega_{2j})}\times$$

$$\times\exp(j\omega_{1i}t_{1n}+j\omega_{2j}t_{2k})\frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}; \qquad (8)$$

$$RK(\xi_1,\xi_2,\omega_1,\omega_2)=R(\xi_1,\xi_2,\omega_1,\omega_2)K_{1N}(\omega_1-\omega_{1i})K_{2N}(\omega_2-\omega_{2j})\frac{\Delta_1}{N_1}\frac{\Delta_2}{N_2};$$

$$R(\xi_1,\xi_2,\omega_1,\omega_2)=G(\xi_1,\xi_2)S_{\varphi}(\xi_1,\xi_2)F(\omega_1,\omega_2)K_{1N}(\omega_1-\xi_1)K_{2N}(\omega_2-\xi_2),$$

где $F(\omega_1,\omega_2)$ – частотная характеристика цифрового ФНЧ (стабилизирующего множителя);

$$G_{ab}(\omega_{1i},\omega_{2j})=$$

$$=\begin{cases} G(\omega_{1i},\omega_{2j}) & \forall i\in[0,\,N_1/2],\ \forall j\in[0,\,N_2/2],\\ G(-(\omega_{1D}-\omega_{1i});\ \omega_{2j}) & \forall i\in[N_1/2+1,\,N_1-1],\ \forall j\in[0,N_2],\\ G(\omega_{1i};\ -(\omega_{2D}-\omega_{2j})) & \forall i\in[0,\,N_1/2],\ \forall j\in[N_2/2+1,\,N_2-1],\\ G(-(\omega_{1D}-\omega_{1i});-(\omega_{2D}-\omega_{2j})) & \forall i\in[N_1/2+1,\,N_1-1],\ \forall j\in[N_2/2+1,\,N_2-1]. \end{cases}$$

(9)

Погрешность алгоритма восстановления исходного изображения находим как норму разности:

$$\Pi_F = \left\| \varphi_F(t_n, t_k) - \varphi_T(t_n, t_k) \right\| = \max_n \max_k \left| \varphi_F(t_n, t_k) - \varphi_T(t_n, t_k) \right|, \qquad (10)$$

где $\varphi_F(t_n, t_k)$ – восстановленное дискретное изображение; $\varphi_T(t_n, t_k)$ – отсчеты измеряемого изображения в узлах сетки в прямоугольном окне размером $a \times b$, определяемые выражением

$$\varphi_T(t_n, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}} S_\varphi(\xi_1, \xi_2) K_{a,b}(\omega_1 - \xi_1; \omega_2 - \xi_2) \times$$

$$\times \exp(j\omega_1 t_k + j\omega_2 t_n) \frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}, \qquad (11)$$

$$K_{a,b}(\omega_1 - \xi_1; \omega_2 - \xi_2) = \frac{1 - \exp(j(\omega_1 - \xi_1)a)}{j(\omega_1 - \xi_1)} \frac{1 - \exp(j(\omega_2 - \xi_2)b)}{j(\omega_2 - \xi_2)},$$

где $K_{a,b}$ – прямоугольное (основное) спектральное окно [1, 4, 5].

Подставив выражения (8), (11) в (10) и проведя тождественные преобразования, аналогичные приведенным в [4], а затем воспользовавшись свойствами нормы, получим оценку погрешности восстановления

$$\Pi_F \le$$

$$\le ab \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}} \left| F1 \frac{K_{1N}(\omega_1 - \omega_{1i}) K_{2N}(\omega_2 - \omega_{2j})}{N_1 N_2} \right| \frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi} +$$

$$+ ab \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}} \left| F2 \frac{K_{1N}(\omega_1 - \omega_{1i}) K_{2N}(\omega_2 - \omega_{2j})}{N_1 N_2} \right| \frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi} +$$

$$+ ab \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}} \left| F3 \frac{K_{1N}(\omega_1 - \omega_{1i}) K_{2N}(\omega_2 - \omega_{2j})}{N_1 N_2} \right| \frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}, \qquad (12)$$

$$F1 = \frac{S_\varphi(\xi_1, \xi_2) F(\omega_1, \omega_2) K_{a,b}(\omega_1 - \xi_1; \omega_2 - \xi_2)}{N_1 N_2} \left(\frac{G(\xi_1, \xi_2)}{G_{ab}(\omega_{1i}, \omega_{2j})} - 1 \right),$$

$$F2 = S_\varphi(\xi_1, \xi_2) \left(\frac{(F(\omega_1, \omega_2) - 1) K_{1N}(\omega_1 - \xi_1) K_{2N}(\omega_2 - \xi_2)}{N_1 N_2} \right),$$

$$F3 = S_{\varphi}(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{K_{1N}(\omega_1 - \xi_1)K_{2N}(\omega_2 - \xi_2)}{N_1 N_2} - \frac{K_{a,b}(\omega_1 - \xi_1;\ \omega_2 - \xi_2)}{ab}\right).$$

Оценка дополнительной погрешности восстановления исходного изображения, вызванная аддитивной помехой, имеет вид (аналогичный [4])

$$\Pi_{\varepsilon} \le$$

$$\le ab\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\omega_{1m}}^{\omega_{1m}}\int_{-\omega_{2m}}^{\omega_{2m}}\left|F4\,\frac{K_{1N}(\omega_1 - \omega_{1i})K_{2N}(\omega_2 - \omega_{2j})}{N_1 N_2}\right|\frac{d\xi_1}{2\pi}\frac{d\xi_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}, \quad (13)$$

$$F4 = \frac{S_{\varepsilon}(\xi_1, \xi_2)F(\omega_1, \omega_2)K_{1N}(\omega_1 - \xi_1)K_{2N}(\omega_2 - \xi_2)}{G_{ab}(\omega_{1i}, \omega_{2j})N_1 N_2}.$$

Была проведена оценка интегралов в (12) и (13) с помощью интегрального неравенства Коши – Буняковского. Для последующего вычисления интегралов в неравенстве Коши – Буняковского, как и в [3], функцию $|K_N(\omega)|$ аппроксимировали на отрезке $\omega \in [-\Delta\omega, \Delta\omega]$ треугольным импульсом и раскладывали частотную характеристику $G(\omega_1, \omega_2)$ в двумерный ряд Тейлора около отсчетов частот ω_i и ω_j.

Полученная полная оценка погрешности восстановления изображения (двумерного сигнала) имеет вид

$$\Pi_{AF} + \Pi_{\varepsilon} \le \sum_{i=0}^{N_{1F}-1}\sum_{j=0}^{N_{2F}-1}\sigma_F\, M(\omega_{1i}, \omega_{2j}) + \frac{\sigma_{F-1}(N_1 - N_{1F})(N_2 - N_{2F})}{3} +$$

$$+\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_{F-1}^2}\,\frac{\pi^2}{30} + \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}\frac{|F(\omega_{1i}, \omega_{2j})|\sigma_{\varepsilon F}}{|G(\omega_{1i}, \omega_{2j})|}\frac{1}{3},$$

$$M(\omega_{1i}, \omega_{2j}) = \quad (14)$$

$$= \sqrt{\left|\frac{G_1(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i}, \omega_{2j})}\right|^2 K1 + 2K2\left|\frac{G_1(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i}, \omega_{2j})}\frac{G_2(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i}, \omega_{2j})}\right| + \left|\frac{G_2(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{G(\omega_{1i}, \omega_{2j})}\right|^2 K3},$$

$$K1 = \frac{\Delta\omega_1^2}{90}, \quad K2 = \frac{\Delta\omega_1}{12}\frac{\Delta\omega_2}{12}, \quad K3 = \frac{\Delta\omega_2^2}{90},$$

$$G_1(\omega_{1i}, \omega_{2j}) = \frac{dG(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{d\omega_{1i}}, \quad G_2(\omega_{1i}, \omega_{2j}) = \frac{dG(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{d\omega_{2j}},$$

где $N_{1F} \times N_{2F}$ – число отсчетов спектра исходного изображения, находящихся в окне пропускания фильтра НЧ; σ_F и σ_{F-1} – среднеквадратичные значения измеряемого изображения в окне и вне окна пропускания фильтра; $\sigma_{\varepsilon F}$ – среднеквадратичное значение аддитивной помехи в окне пропускания фильтра; $\omega_{1F} < \omega_{1m}$ и $\omega_{2F} < \omega_{2m}$ – полосы пропускания ФНЧ по координатам.

Для оценки модуля производных от частотной характеристики аппаратной функции (аналоговой части) системы регистрации по частотам можно использовать выражения

$$\left|\frac{1}{G(\omega_{1i},\omega_{2j})}\frac{dG(\omega_{1i},\omega_{2j})}{d\omega_{1i}}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\ln\left|G(\omega_{1i},\omega_{2j})\right|}{d\omega_{1i}}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi(\omega_{1i},\omega_{2j})}{d\omega_{1i}}\right)^2}; \quad (15)$$

$$\left|\frac{1}{G(\omega_{1i},\omega_{2j})}\frac{dG(\omega_{1i},\omega_{2j})}{d\omega_{2j}}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\ln\left|G(\omega_{1i},\omega_{2j})\right|}{d\omega_{2j}}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi(\omega_{1i},\omega_{2j})}{d\omega_{2j}}\right)^2},$$

где $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ) аппаратной части оптической системы.

Первое слагаемое в оценке погрешности (14) учитывает вклад от неравномерности частотной характеристики аппаратной части оптической системы и является оценкой методической погрешности. Данная погрешность возникает в силу того, что при восстановлении можно пользоваться только отсчетами функции $G(\omega_{1i},\omega_{2j})$ на двумерной сетке частот, а спектр зарегистрированного изображения $S_\Psi(\omega_1,\omega_2)$ определяется всеми значениями непрерывной функции $G(\omega_1,\omega_2)$. Из выражения (15) видно, что неравномерность логарифмической амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и неравномерность ФЧХ аппаратной части оптической системы вносят одинаковый вклад в погрешность восстановления.

Второе слагаемое учитывает погрешность, вызванную низкочастотной фильтрацией, необходимой для обеспечения устойчивости алгоритма восстановления.

Третье слагаемое учитывает вклад в погрешность дискретизации сигнала. Для временных реализаций, полученных с передискретизацией сигнала, этим слагаемым можно пренебречь.

Четвертое слагаемое учитывает влияние аддитивной помехи на погрешность восстановления сигнала. Из выражения (15) также видно, что для устойчивости восстановления крутизна ФНЧ, обеспечивающая асимптотику частотной характеристики фильтра, должна удовлетворять условию $\left|F(\omega_1,\omega_2)\right| / \left|G(\omega_1,\omega_2)\right| \to 0$ при $\omega_1 \to \infty$ и $\omega_2 \to \infty$.

При наличии в частотной характеристике $G(\omega_1,\omega_2)$ нулей в области пропускания ФНЧ рассматриваемый алгоритм восстановления будет работать устойчиво. Суммирование в (12) при этом нужно проводить только в области частот, в которых $G(\omega_1,\omega_2)$ не обращается в нуль, но изображение при этом восстанавливается неоднозначно [3]. Для однозначного восстановления изображения в указанной ситуации необходима дополнительная информация, позволяющая отобрать «истинное» изображение среди всех возможных [3].

Правая часть в выражении (14) – это оценка суммарной погрешности восстановления изображения по всему окну пропускания, но бывает важно знать оценку нормированной погрешности восстановления, приходящуюся на один отсчет (пиксель). Разделив (14) на число отсчетов и среднеквадратичное значение изображения во всей области частот, получим оценку относительной погрешности восстановления

$$\gamma_F + \gamma_\varepsilon \le \sum_{i=0}^{N_{1F}-1} \sum_{j=0}^{N_{2F}-1} \frac{\sigma_F}{\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_{F-1}^2}} \frac{M(\omega_{1i}, \omega_{2j})}{N_1 N_2} +$$

$$+ \frac{\sigma_{F-1}}{3\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_{F-1}^2}} \left(1 - \frac{N_{1F}}{N_1}\right)\left(1 - \frac{N_{2F}}{N_2}\right) + \tag{16}$$

$$+ \frac{\pi^2}{30} \frac{1}{N_1 N_2} + \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \frac{S_N}{N_1 N_2} \frac{\left|F(\omega_{1i}, \omega_{2j})\right|}{\left|G(\omega_{1i}, \omega_{2j})\right|} \frac{1}{3};$$

$$S_N = \sigma_{\varepsilon F} \Big/ \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_{F-1}^2},$$

где S_N – отношение сигнал/шум.

Для устойчивого восстановления изображения в условиях отсутствия информации о характере поведения энергетических спектров изображения и шума невозможно построить оптимальный ФНЧ (стабилизирующий множитель), можно только использовать метод регуляризации со стабилизаторами вида ω^{2p} [2, 3] или метод инверсной фильтрации с ограничением полосы частот [3]. При использовании второго метода стоит проблема определения частот среза ФНЧ. Частоты среза стабилизирующего множителя можно оценить робастным методом из условия, что погрешность восстановления, вызванная фильтрацией выходного сигнала, равна сумме погрешностей, вызванных наличием шума в полосе пропускания ФНЧ и дискретизацией. Согласно (16) имеем

$$\frac{\sigma_{F-1}}{\sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_{F-1}^2}} \left(1 - \frac{\omega_{1F}}{\omega_{1m}}\right)\left(1 - \frac{\omega_{2F}}{\omega_{2m}}\right) = S_N \frac{\omega_{1F}}{\omega_{1m}} \frac{\omega_{2F}}{\omega_{2m}} \frac{1}{G_0} + \frac{\pi^2}{10} \frac{\Delta\omega_1}{\omega_{1m}} \frac{\Delta\omega_2}{\omega_{2m}}, \tag{17}$$

где G_0 – значение коэффициента передачи аппаратной части оптической системы в области плато АЧХ.

Заключение. В представленной работе рассмотрены алгоритм и точность восстановления изображения с использованием двумерного БПФ. Точность восстановления изображения определяется скоростью изменения логарифмической АЧХ и ФЧХ аналоговой части оптической системы регистрации в полосе пропускания цифрового ФНЧ (регуляризирующего сомножителя), величиной разрешения по частоте при БПФ и величиной аддитивной помехи. Предложено соотношение, позволяющее оценить величины частот среза цифрового двумерного ФНЧ по координатам при восстановлении изображения методом инверсной фильтрации с ограничением полосы частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Яне Б.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
3. **Василенко Г. И., Тараторин А. М.** Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
4. **Леньков С. В.** Восстановление сигналов по результатам динамических измерений цифровыми регистраторами // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 51.
5. **Леньков С. В.** Измерение амплитуды синусоидального сигнала ускорения в системе вибродиагностики с помощью БФП и сигнатурного спектрального анализа // Датчики и системы. 2004. № 12. С. 12.

Поступила в редакцию 17 декабря 2007 г.