Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2008, том 44, № 5

УДК 681.52; 510.6

АППРОКСИМАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

О. В. Стукач

Томский политехнический университет, г. Томск
E-mail: tomsk@ieee.org

Обоснована методика аппроксимации физических процессов на основе дифференциально-тейлоровского преобразования. Осуществлен переход от степенного базиса к базисам ортогональных многочленов Чебышева. Показано, что сходимость ряда существенно увеличивается при переходе к разложению по многочленам Чебышева первого рода и смещенным многочленам Чебышева. Сформулирован алгоритм вычисления дискрет дифференциального спектра. Отмечено, что в чебышевских базисах величина дискрет спектра постоянно уменьшается с увеличением их номера. В этом случае можно остановить вычисление дискрет по достижении их величины требуемого малого значения, что нельзя сделать в степенном базисе. На численных примерах показано преимущество предложенной методики.

Введение. При имитационном моделировании, когда одна часть уравнения системы реализуется некоторыми блоками моделей, а другая представлена реально работающими устройствами, возникает задача аналитической и аппаратной аппроксимации реальных непрерывных сигналов. Проблема аппроксимации в последнее время становится исключительно важной в связи с необходимостью повышения качества процессов управления. Известно множество подходов к решению этой проблемы. Наиболее часто в качестве базиса применяются системы функций, ортогональные на интервале аппроксимации (тригонометрические функции, полиномы Чебышева, Лежандра и др.). Преимуществом аппроксимации ортогональными функциями является независимость компонент аппроксимирующего спектра от количества используемых членов ряда. В качестве базисных функций могут быть взяты и степенные полиномы. Часто применяются полиномиальные методы и методы в частотной области, так как построение полиномиальной модели довольно естественно во многих ситуациях. Кроме того, полиномиальные модели благодаря известным алгебраическим свойствам полиномов считаются более легкими в использовании, чем непосредственное решение уравнений.

Полиномиальные методы являются важными в теории систем управления. В задачах математического моделирования, когда решение уравнений на заданном интервале изменения независимого переменного может быть эффективно представлено степенными рядами Тейлора, нашло применение дифференциально-тейлоровское преобразование [1]

$$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \overset{\cdot}{\longleftrightarrow} x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \tag{1}$$

где слева от символа $\overset{\cdot}{\longleftrightarrow}$ стоит прямое преобразование оригинала $x(t)$ в изображение $X(k)$ – дискреты дифференциального спектра, а справа – обратное преобразование $X(k)$ в $x(t)$; k – дискретный аргумент; t – время; H – некоторая постоянная.

Для восстановления функции $x(t)$ по результатам измерений $x(t_1)$, $x(t_2),\ldots,x(t_n)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$x_i(t)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{t_i}{H}\right)^k X(k), \quad i=\overline{1,n},\ t_1=0,\ t_n=H, \tag{2}$$

из которой определяются дискреты $X(k)$.

Недостаток дифференциального преобразования заключается в том, что в процессе восстановления оригинала по формуле (1) возникает необходимость возведения переменной t в высокие степени. Система (2) становится плохо обусловленной, и ошибка вычислений при операциях с числами большой или малой размерности становится недопустимой. Величина дискрет быстро возрастает с увеличением k, и это увеличение тем значительнее, чем больше значение k. Таким образом, возникает проблема переполнения разрядной сетки при компьютерном расчете дискрет. С одной стороны, для более точных вычислений требуется нахождение большого количества дискрет, а с другой – для реальных дифференциальных уравнений при расчете дискрет с большим номером k неизбежно появляются ошибки вычислений.

Цель данной работы – создание методики аппроксимации путем перехода от уравнения (1) к дифференциально-чебышевскому базису, что позволяет объединить преимущества ортогональных и полиномиальных систем функций для решения поставленной задачи.

Связь дифференциально-тейлоровского и дифференциально-чебышевского преобразований. Среди всех полиномиальных базисов наилучшими свойствами сходимости обладают многочлены Чебышева первого рода [2]:

$$T_i(t)=\cos(i\arccos t), \quad -1\le t\le 1;$$

$$T_0(t)=1,\ \ T_1(t)=t,\ \ T_2(t)=2t^2-1,\ \ T_3(t)=4t^3-3t,\ldots.$$

Они обеспечивают наилучшую аппроксимацию в смысле минимаксной нормы [3]. Переход (1) к чебышевскому базису можно осуществить последовательной заменой составляющих $t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ ряда Тейлора, сходящегося на интервале [–1; 1], многочленами Чебышева $T_i(t)$:

$$1 = T_0(t), \quad t = T_1(t),$$
$$t^2 = 0{,}5[T_0(t) + T_2(t)], \quad t^3 = 0{,}25[3T_1(t) + T_3(t)], \ldots .$$

Формула перехода в базис ортогональных полиномов Чебышева первого рода получена в работе [2] и может быть записана в виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\{(n+i)/2\}} \frac{X(2k-i)\rho(i)(2k-i)!T_i(t)}{2^{2k-i-1} H^{2k-i} k!(k-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i T_i(t), \tag{3}$$

где

$$\rho(i) = \begin{cases} 1/2, & i = 0, \\ 1, & i \neq 0; \end{cases}$$

n – номер старшего многочлена Чебышева; $\{\cdot\}$ – целая часть числа.

Из разложения (3) следует, что последние два коэффициента чебышевского базиса зависят только от одного соответствующего коэффициента степенного базиса. Таким образом, для вычисления двух дискрет чебышевского базиса формулу (3) можно преобразовать к следующему виду:

$$C_m = \frac{X(m)}{2^{m-1} H^m}; \qquad C_{m-1} = \frac{X(m-1)}{2^{m-2} H^{m-1}}. \tag{4}$$

Чем больше учитываемых дискрет, тем значительнее будет уменьшение их величины в чебышевском базисе относительно степенного, причем отношение двух последних дискрет всегда будет в $2H$ раз больше, чем в степенном базисе. На рис. 1 изображен дифференциально-тейлоровский спектр экспоненты e^{-t} (график $X(k)$) в сравнении с коэффициентами разложения в базисе полиномов Чебышева первого рода (график C_i). Видно, что дифференциальный спектр в базисе полиномов Чебышева первого рода убывает быстрее, чем дифференциально-тейлоровский спектр. Причем чебышевский спектр убывает монотонно с первой дискреты. Это значит, что в процессе расчетов всегда можно определить номер дискреты, начиная с которой вес отброшенных членов ряда не будет увеличивать погрешность.

Численные расчеты показывают, что переход в базис Чебышева позволяет сократить исходный степенной ряд в среднем в 1,8 раза при незначительном увеличении погрешности.

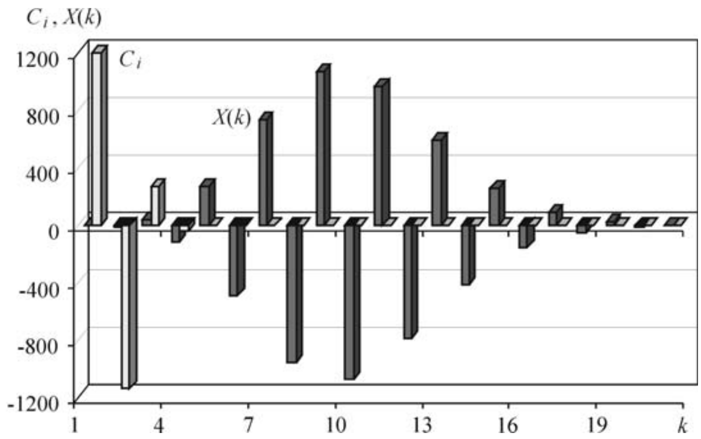

Рис. 1. Дифференциальный $X(k)$ и дифференциально-чебышевский C_i спектры функции e^{-t} при $H = 9$

В качестве примера рассмотрим функцию

$$x_0(t) = \ln(1+t) \approx \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1}\, t^i \big/ i = x_1(t), \tag{5}$$

для которой с помощью формулы (3) получаем разложение

$$x_2(t) = -0{,}396T_0(t) + 1{,}375T_1(t) - 0{,}453T_2(t) + 0{,}146T_3(t) -$$

$$- 0{,}062T_4(t) + 0{,}013T_5(t) - 0{,}005T_6(t). \tag{6}$$

В разложении (5) отбрасывание последнего слагаемого приводит к ошибке $\varepsilon = 0{,}17$, а в разложении (6) отбрасывание трех последних слагаемых – к ошибке $\varepsilon = 0{,}09$. Построим для сравнения две зависимости, которые представляют собой полиномы третьей степени:

$$x_3(t) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1}\, t^i \big/ i, \tag{7}$$

$$x_4(t) = 0{,}057 + 0{,}937\,t - 0{,}906t^2 + 0{,}584t^3. \tag{8}$$

Первый полином (7) образован из исходного (5) отбрасыванием членов выше третьего порядка, а второй (8) представляет собой полином также третьей степени, но полученный с помощью перехода к базису разложения по многочленам Чебышева первого рода.

Из зависимостей, построенных по формулам (7) и (8), наглядно видно, что при одинаковом порядке полиномов аппроксимация функции $x_0(t)$ точнее в случае использования чебышевского базиса (рис. 2). В этом случае мак-

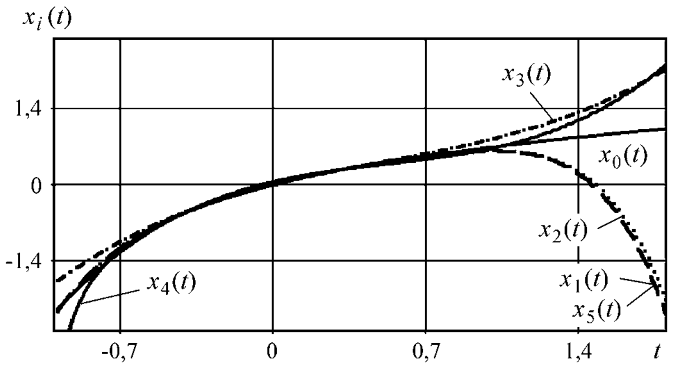

Рис. 2. Аппроксимация функции $\ln(1+t)$

симальное отклонение $x_4(t)$ от аппроксимируемой функции $x_0(t)$ имеет меньшее значение. Обратим внимание также на то, что погрешность начинает резко увеличиваться при приближении аргумента t к краям интервала ортогонализации [–1; 1] полиномов Чебышева.

Вышеизложенную методику перехода к чебышевскому базису можно применить, в частности, в случае если имеется некоторый полином, являющийся аппроксимацией неизвестной функции, и требуется понизить порядок этого полинома. Такая ситуация может возникнуть при экспериментальных исследованиях, результатом которых будут значения, являющиеся отсчетами какого-либо процесса.

Дифференциально-чебышевские преобразования со смещенными полиномами Чебышева. Исследуем точность вычисления дискрет в базисе смещенных полиномов Чебышева [3]. Значения полиномов $S_i(t)$ вычисляются по формуле

$$S_i(t) = i\sum_{j=0}^{i}\left[\frac{(-1)^j\,(2i-j-1)!}{j!\,(2i-2j)!}(4t)^{i-j}\right]. \tag{9}$$

Первые шесть смещенных многочленов Чебышева имеют следующий вид:

$$S_0(t)=1,$$

$$S_1(t)=2t-1,$$

$$S_2(t)=8t^2-8t+1,$$

$$S_3(t)=32t^3-48t^2+18t-1,$$

$$S_4(t)=128t^4-256t^3+160t^2-32t+1,$$

$$S_5(t)=512t^5-1280t^4+1120t^3-400t^2+50t-1,$$

$$S_6(t)=2048t^6-6144t^5+6912t^4-3584t^3+840t^2-72t+1.$$

Отсюда последовательно находятся степени относительного аргумента $\Theta = t/H$ как линейные комбинации многочленов Чебышева:

$$1 = S_0(\Theta),$$
$$\Theta = [S_0(\Theta) + S_1(\Theta)]/2,$$
$$\Theta^2 = [3S_0(\Theta) + 4S_1(\Theta) + S_2(\Theta)]/8,$$
$$\Theta^3 = [10S_0(\Theta) + 15S_1(\Theta) + 6S_2(\Theta) + S_3(\Theta)]/32,$$
$$\Theta^4 = [35S_0(\Theta) + 56S_1(\Theta) + 28S_2(\Theta) + 8S_3(\Theta) + S_4(\Theta)]/128, \ldots .$$

Обозначая коэффициенты данных зависимостей через C_i, можно записать

$$\Theta^k = \sum_{i=0}^{k} C_i S_i(\Theta),$$

где

$$C_i = \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{X(k)\rho(i)}{2^{2k-1}} \frac{(2k)!}{(k+i)!(k-i)!} \right). \tag{10}$$

Из выражения (10) оригинал $x(t)$, имеющий дифференциальный спектр $X(k)$, теперь может быть представлен в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i S_i(t). \tag{11}$$

Таким образом, связь коэффициентов разложения в степенном базисе и коэффициентов разложения C_i в базисе смещенных многочленов Чебышева $\{S_i(t)\}$ представляет собой формулы (9)–(11).

Преимущество разложения по смещенным многочленам Чебышева в смысле сходимости ряда перед разложением по многочленам Чебышева первого рода связано с тем, что в записи смещенных многочленов присутствуют все степени t, а в записи многочленов первого рода – только либо четные, либо нечетные степени, т. е. в первом случае коррекции подвергаются все члены полученного степенного ряда, а во втором – лишь половина. Покажем это на примере той же функции $\ln(1+t)$ при $n = 6$. Произведя разложение по смещенным полиномам Чебышева, получим

$$x_5(t) = 0{,}34S_0(t) + 0{,}314S_1(t) - 0{,}048S_2(t) - 5{,}53 \cdot 10^{-3} S_3(t) -$$

$$-3{,}42 \cdot 10^{-3} S_4(t) - 5{,}86 \cdot 10^{-4} S_5(t) - 8{,}14 \cdot 10^{-5} S_6(t).$$

При сравнении полученной зависимости с выражением (8) видно, что величина коэффициентов разложения по смещенным многочленам Чебышева убывает значительно быстрее, что свидетельствует о более высокой скорости сходимости ряда.

В формуле перехода к коэффициентам разложения в чебышевском базисе (3) значение H присутствует, в то время как в формуле (10) значение масштабной постоянной не учитывается. Получается, что коэффициенты разложения по многочленам Чебышева первого рода зависят от H, а коэффициенты разложения по смещенным многочленам Чебышева при изменении H постоянны. Значение H учитывается при подстановке выражений многочленов для получения решения в виде степенного ряда, т. е. на самом последнем этапе.

Если вычислить по формуле (10) последний коэффициент разложения в чебышевском базисе, то он будет зависеть только от одного коэффициента разложения в степенном базисе. Тогда для вычисления последнего коэффициента разложения по смещенным многочленам Чебышева формула (10) преобразуется к виду

$$C_n = X(n) \big/ 2^{2n-1}. \tag{12}$$

При сравнении формул (12) и (4) для последнего коэффициента разложения по многочленам Чебышева первого рода видно, что величина последней дискреты в базисе многочленов Чебышева первого рода будет всегда в 2^n раз больше, чем величина последней дискреты в базисе смещенных многочленов Чебышева, так как

$$\frac{X(n)}{2^{n-1}}\,\frac{2^{2n-1}}{X(n)} = 2^n.$$

Итак, лучшая аппроксимация функции получается при отбрасывании членов ряда не в степенном базисе, а в базисах ортогональных многочленов. При отбрасывании члена ряда максимального порядка в степенном базисе остальное выражение не изменяется, в то время как во втором случае за счет специфики базисов ортогональных многочленов происходит коррекция коэффициентов степенного ряда, образующегося путем подстановки соответствующих базисных многочленов, т. е. с понижением степени функции автоматически корректируются коэффициенты с меньшими степенями.

Проблема целесообразности перехода дифференциального преобразования к другим полиномиальным базисам. К настоящему времени исследовано большое количество полиномиальных базисов. Однако вопрос об их использовании в методе дифференциального преобразования до сих пор остается открытым. Общий принцип перехода к другим базисам разработан в [4] на примерах базисов Чебышева, Лаггера, Лежандра, Дирихле и т. д. Но далеко не любая базисная функция может привести к возрастанию скорости сходимости ряда Тейлора или упрощению восстановления временной функции. По этой причине большинство ортогональных функций в дифференциальном преобразовании для численных расчетов применять нельзя, например переход к базисам многочленов Лаггера.

Для перехода в базис полиномов Лаггера

$$\hat{T}_i(t) = \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{i\,!}{k\,!} \right)^2 \frac{(-1)^k}{(i-k)!}\, t^k$$

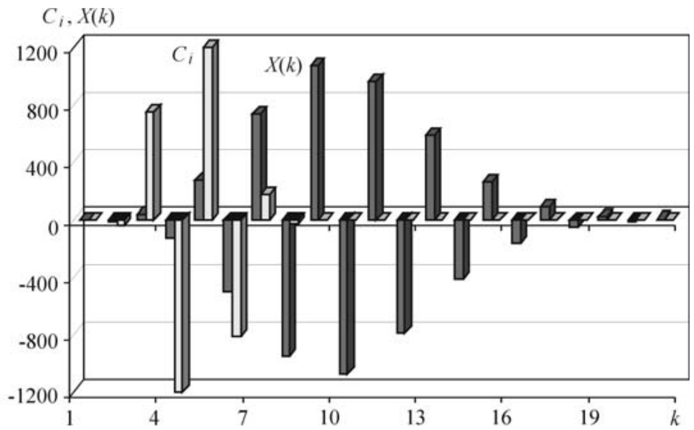

Рис. 3. Дифференциальный спектр $X(k)$ функции e^{-t} при $H = 9$ и коэффициенты C_i для базиса Лаггера

необходимо заранее иметь определенное количество дискрет дифференциального спектра, так как для вычисления каждого коэффициента C_i используется максимальное число дискрет исходного базиса – производится аппроксимация заранее известного сигнала [4]

$$C_i = \sum_{k=0}^{m} X(k) \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j (k+j)!}{(j!)^2 (i-j)!}, \tag{13}$$

где m – максимальное известное число дискрет дифференциального спектра.

При вычислении коэффициентов C_i по формуле (13) из-за наличия больших факториалов накапливается ошибка, которая, как показывает практика, не позволяет получить дискреты выше 11–13 порядков с приемлемой погрешностью. Дифференциально-тейлоровский спектр экспоненты e^{-t} в сравнении с коэффициентами разложения в базисе Лаггера изображен на рис. 3. Несмотря на то что скорость убывания дискрет намного выше, чем в дифференциальном спектре, величина дискрет начинает убывать только после четвертой. Это приводит к большим погрешностям восстановления исходной функции в начале интервала аппроксимации.

Таким образом, переход в базис ортогональных полиномов Лаггера не дает особых преимуществ вследствие вычисления всех дискрет дифференциального спектра и большой погрешности расчета первых членов разложения.

Этот пример убеждает в необходимости проведения дальнейших исследований проблемы перехода к различным базисам с обязательной оценкой погрешности получаемого дифференциального преобразования.

Заключение. В представленной работе показано, что решение задачи аппроксимации с помощью перехода к чебышевским полиномиальным базисам достаточно эффективно, поскольку это приводит к увеличению сходимости ряда, в виде которого получается решение. Разложение по смещенным многочленам Чебышева наиболее предпочтительно. В чебышевских базисах можно оценивать точность полученной функции, последовательно вычисляя дискреты, так как величина чебышевских дискрет постоянно уменьшается с увеличением их номера. Показано, что с помощью перехода к чебышевским полиномиальным базисам появляется возможность расчета систем больших порядков, решение которых обычным способом затруднительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г. Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Киев: Наук. думка, 1986.
2. **Пухов Г. Е., Королев Ю. В.** Формализация перехода к чебышевскому базису в дифференциально-тейлоровских преобразованиях // Электронное моделирование. 1998. **10**, № 3. С. 89.
3. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Мир, 1976.
4. **Дифференциальные** спектры и модели /Под ред. Г. Е. Пухова. Киев: Наук. думка, 1990.

Поступила в редакцию 25 сентября 2007 г.