РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2008, том 44, № 5

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 681.51

ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫЕ СИСТЕМЫ: УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ (ОБЗОР) *

О. Я. Шпилевая[1], **К. Ю. Котов**[2]

[1]*Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск*
E-mail: shpilev@ait.cs.nstu.ru
[2]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск*

Представлен краткий обзор публикаций по методам исследования и синтеза переключаемых систем. Приведены часто используемые математические модели таких систем. Основное внимание уделено вопросу устойчивости систем при произвольных и ограниченных переключающих сигналах. Показана связь переключаемых и нечетких систем. Рассмотрены некоторые подходы к синтезу переключающихся регуляторов и наблюдателей состояния.

Введение. В последние десятилетия значительное внимание уделяется описанию различных процессов моделями переключаемых систем. Это объясняется тем, что многие системы состоят из подсистем, переключающихся в зависимости от разных факторов внешней среды. Некоторые из таких систем обсуждаются в [1–3].

Наиболее полно реальные процессы описываются нелинейными моделями, например нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейные характеристики могут быть аппроксимированы кусочно-линейными функциями. Следовательно, нелинейные системы с заданной степенью приближения можно представить в виде совокупности переключаемых по определенным законам линейных систем. Это позволяет рассматривать нелинейные динамические системы как вид переключаемых или логико-динамических систем.

Другой класс переключаемых систем характеризуется переключающимся управлением. Методы управления, основанные на переключении регуляторов, широко применяются в адаптивных робастных системах [4–9]. Это позволяет обеспечить устойчивость замкнутой системы и улучшить пере-

---

* Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (Комплексный интеграционный проект 1.4).

ходные характеристики [9–11]. Важность этих методов управления обусловлена существованием систем, которые не могут быть асимптотически стабилизируемы единственным непрерывным законом управления, реализованным по обратной связи [12]. Таким образом, переключаемые системы появляются в двух случаях: во-первых, когда существуют резкие изменения в структуре или параметрах динамической системы, возникающие из-за отказов или ремонтов, изменений в окружающей среде или подсистемах, и, во-вторых, когда в непрерывных системах используется переключающийся регулятор [13]. Переключаемые системы широко применяются при управлении механическими и автомобильными системами, курсом и движением воздушного транспорта, технологическими процессами в переключающихся преобразователях мощности, в интеллектуальных системах управления автомобильным транспортом, роботами и т. д. Такие системы используются в качестве моделей в теории вычислительных систем и систем управления.

В предлагаемом обзоре рассмотрены особенности математического описания переключаемых систем, приведены некоторые результаты исследования их устойчивости и проектирования.

1. Модели переключаемых систем. В теории управления хорошо известна идея переключений. Переключения используются для обеспечения устойчивости систем при робастном и адаптивном управлениях [5, 6, 13]. В [14, 15] переключение между несколькими адаптивными моделями применено для улучшения переходного процесса в адаптивной системе управления с точки зрения устойчивости. Популярность переключаемых систем объясняется тем, что таким образом может моделироваться любая нелинейная система. Переключаемая система, динамика которой изменяется при переходе от одной линейной модели к другой, аппроксимирует динамику нелинейной системы. Регуляторы, рассчитанные для линеаризованных моделей, в совокупности составляют переключающийся регулятор для нелинейной системы.

Приведем несколько наиболее часто встречающихся в литературе определений термина «переключаемая система». В [13] переключаемыми называются системы, динамические характеристики и/или управляющие воздействия которых изменяются (или переключаются) по определенному правилу. В [16] под переключаемой системой понимают гибридную динамическую систему, состоящую из семейства непрерывных по времени подсистем и правила, которое «руководит» переключениями между этими подсистемами. Таким образом, переключаемые системы можно рассматривать как частный случай гибридных систем. Присутствие в переключаемых системах динамической и логической частей объясняет другое название этого класса – логико-динамические системы. В [17, 18] дано его определение: реальные объекты и технологические процессы с многоцелевым характером функционирования называются логико-динамическими. Система называется интервальной логико-динамической, если описывающие ее соотношения содержат аналитические, логические и интервальные зависимости. В работе [13] рассмотрена связь переключаемых систем с нечеткими и специальным классом хаотических систем.

1.1. *Переключаемые системы как модели технических систем.* Сложные системы (летательные аппараты, транспортные системы и т. д.) имеют несколько рабочих этапов, каждый из которых должен выполняться с заданной точностью. Например, основное уравнение модели трансмиссии автомобиля изменяется при определенных значениях скорости. Система кондиционирования воздуха изменяет свою динамику на заданной температуре, переходя от охлаждения к нагреву и наоборот. Многие современные устройства содержат логические элементы, выполняющие функцию принятия решения даже в простейших цепях управления (например, вложенные системы) [19]. На каждом рабочем этапе определяется модель системы, в соответствии с которой вырабатывается управляющее воздействие. Следовательно, в таких системах и модель объекта, использованная для проектирования, и сам регулятор изменяются или переключаются в зависимости от рабочего этапа.

Специфика рассматриваемой задачи определяет разные подходы к моделированию переключаемых систем. Приведем некоторые из них [13].

Пример 1. Столкновение. Рассмотрим вертикальное и горизонтальное движение шара массой m в помещении, где ускорение силы тяжести равно g. Пусть x и y – горизонтальное и вертикальное положение шара, а v_x и v_y – соответствующие проекции вектора скорости. В этом случае динамика задается уравнениями:

$$\dot{x} = \mathrm{v}_x, \quad \dot{\mathrm{v}}_x = 0, \quad \dot{y} = \mathrm{v}_y, \quad \dot{\mathrm{v}}_y = -mg.$$

При ударе об одну из границ $\{(x, y) \mid y = 0 \text{ или } y = d_{\text{в}}\}$ переменная v_y немедленно принимает значение $-\rho \mathrm{v}_y$, где $\rho \in [0, 1]$. Аналогично при столкновении с другой границей $\{(x, y) \mid x = 0 \text{ или } x = d_{\text{ш}}\}$ переменная v_x принимает значение $-\rho \mathrm{v}_x$. Здесь непрерывное состояние x изменяется «скачком» при попадании в заданную пограничную область пространства состояний [19].

Пример 2. Неголономный интегратор. Рассмотрим неголономный интегратор с динамикой

$$\dot{x} = g(x)u(x), \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Re_i$, $i = 1, \ldots, 4,$ – некоторые области в $\mathbb{R}^3$. В каждой области $\Re_i$ сигнал управления $u(x)$ изменяется следующим образом: $u = u_i(x)$, где $x \in \Re_i$. Набор управляющих воздействий $(u_i(x))$, стабилизирующих систему, определен в работе [20].

Пример 3. Трансмиссия автомобиля. Рассмотрим упрощенную модель системы трансмиссии [17]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = [-a(x_2/\mathrm{v}) + u],$$

где x_1 – скорость движения автомобиля относительно поверхности; x_2 – число оборотов в минуту вала двигателя; $\{u \in [0,1]\}$ – положение дроссельной заслонки; $\mathrm{v} \in \{1, 2, 3, 4\}$ – положение переключателя передачи. Функция a является положительной для положительного аргумента.

Изменение динамики систем в примерах 1 и 3 может моделироваться как изменение параметра системы, а в примере 2 – как изменения алгоритмов управления, зависящих от вектора состояний. Существуют и другие виды переключаемых систем [19]. С двойственной природой переключений связаны основные проблемы моделирования, а именно модель переключаемой системы должна быть достаточно общей, чтобы охватить большое разнообразие физических явлений, и, кроме того, структурно достаточной, чтобы представлять собой работоспособную модель [21].

1.2. *Математические модели.* Начнем с описания линейных переключаемых систем. Часто используемая общая модель [13] задается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = A_i x; \quad i^+ = s(x, i), \tag{1}$$

где $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $x \in \mathbb{R}^n$; s: $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I} = \{1, \dots, N\}$. Здесь $s(\cdot)$ – функция, которая определяет момент изменения значения i, являющегося индексом рабочего состояния системы. Система из примера 1 может быть представлена уравнениями (1), в которых отсутствует сигнал управления u.

Дискретный аналог модели (1) приведен в [16]. Модель задана уравнением вида

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k), \tag{2}$$

где σ – функция от неотрицательных целых чисел конечного индексного множества P.

Продолжая представление класса линейных моделей, рассмотрим вариант, в котором учтены изменения элементов матрицы замкнутой системы, порожденные переключениями управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad u = K_i x, \quad i^+ = s(x, i), \tag{1a}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $x \in \mathbb{R}^n$; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $u \in \mathbb{R}^m$. Сравнивая (1а) с уравнениями (1), видим, что $A_i = A + BK_i$ и $u = u_i(x)$ и что они зависят от функции $s(\cdot)$. В общей форме модель (1а) можно привести к виду

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u; \quad u = u_i(x), \quad i^+ = s(x, i), \tag{3}$$

где $f(\cdot)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$; $g(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $u \in \mathbb{R}^m$. Данную модель можно использовать для записи системы, рассмотренной в примере 2. Допустим, что функция $s(\cdot)$ в (3) передает управление i-му регулятору, когда состояние x находится в области, определенной $\Re_i$. Тогда сигнал управления может быть описан уравнениями

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) S_i(x), \quad S_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Re_i, \\ 0, & x \notin \Re_i, \end{cases}$$

где $S_i(x)$ – характеристическая функция для множества точек из области $\Re_i$. Динамическую систему из примера 3 можно представить следующими уравнениями:

$$\dot{x} = f(x, p), \quad p^+ = s(x, p),$$

где p – вектор параметров, который эквивалентен v – переменной, описывающей положение переключателя скоростей.

В [16] приведена другая модель нелинейной переключаемой системы:

$$\dot{x} = f_\sigma(x). \tag{4}$$

Система (4) состоит из подсистем вида $\dot{x} = f_\rho(x)$, где $\sigma: [0, \infty) \to \mathrm{P}$ является кусочно-постоянной функцией времени, называемой сигналом переключения (P – индексное множество); $\{f_\rho : \rho \in \mathrm{P}\}$ – семейство достаточно регулярных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, которые параметризованы множеством P. В особых случаях значение σ в данный момент времени может зависеть от t или $x(t)$, или от того и другого либо может генерироваться с использованием более сложных подходов, таких как гибридная обратная связь с памятью в контуре. Предполагается, что в моменты переключений состояние системы (4) изменяется плавно, т. е. решение $x(\cdot)$ всюду непрерывно. Заметим, что в концепции обобщенного решения требуются бесконечно быстрые переключения (дребезг, работа в вибрационном режиме), которые в данном случае не рассматриваются. Множество P является компактным (часто ограниченным) подмножеством конечномерного линейного векторного пространства.

1.3. *Связь переключаемых систем с гибридными и нечеткими системами*. В работе [22] приведено основное различие между переключаемыми и гибридными системами. Гибридные системы определяются как системы, в которых правило переключений зависит от предыдущих моделей, в то время как в переключаемых системах выполняется проверка некоторых условий в текущий момент времени и не учитываются предыдущие свойства системы. Однако есть исследования, где данное различие не учитывается, например [21].

Иногда невозможно описать систему обыкновенными дифференциальными уравнениями, но можно получить неформализованное описание поведения системы, основанное на опыте человека-оператора. В этом случае используются нечеткие модели. Описание состоит из множества правил вида «если…, то», представляющих отношения между входом и выходом системы. Нечеткие системы могут быть заданы в виде совокупности линеаризованных подсистем, каждой из которых ставятся в соответствие функции принадлежностей. Известно, что если некоторый элемент полностью обладает определенным свойством, то значение его функции принадлежности равно 1, а если свойство отсутствует, то значение функции принадлежности – 0. Основной задачей проектирования переключающихся регуляторов является установление границы решения, которому соответствует значение функции принадлежности 0,5. Переключаемая система, поставленная в соответствие нечеткой системе, будет иметь дребезг в переменных состояния или сигнале управления, т. е. выходной сигнал переключаемой системы не будет точно совпадать с соответствующим сигналом нечеткой системы. В свою очередь, нечеткая система может быть спроектирована таким образом, что ее выходной сигнал будет точно совпадать с выходным сигналом исходной переключаемой системы при соответствующем выборе функций принадлежности.

В [20] показано, что переключения могут быть использованы для стабилизации неголономного интегратора, но при этом в сигнале управления присутствует дребезг. Наоборот, в нечетких системах достигается сглаживание переменных состояния. В [13] рассмотрена связь между переключаемыми и нечеткими системами, исследовано подобие обеих систем в рамках определенных допущений и предложены методы преобразования переключаемых систем в нечеткие. Установлено, что правила переключения в системах связаны с функциями принадлежности нечетких систем.

Приведем пример перехода от системы одного вида к другому. Переключаемой системе (1) можно поставить в соответствие нечеткую модель, описываемую уравнением

$$x(k+1) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l (x(k)) A_l x(k),$$

где $A_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $x(k) \in \mathbb{R}^n$; $l = 1, \ldots, r$; $\alpha_l(x(k))$ – базисные функции, заданные уравнением

$$\alpha_l(x(k)) = \frac{\mu_{P_l}(x(k))}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_{P_i}(x(k))}, \quad \mu_{P_l}(x(k)) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{F_i^l}(x(k)).$$

В [13] также приведено сравнение систем с нечетким и переключающимся регуляторами на примере динамической системы

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где $f(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$; $g(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$; $u \in \mathbb{R}^m$. Кроме того, анализируются замкнутые системы без управляющего воздействия в явном виде. Модель для переключающегося регулятора задана уравнением

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} u_{SS_i}(x) S_i(x), \quad S_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Re_i, \\ 0, & x \notin \Re_i, \end{cases} \tag{5}$$

где $S_i(x)$ – характеристическая функция; $u_{SS_i}(x)$ – соответствующий регулятор для множества точек в области $\Re_i \subset \mathbb{R}^n$; r – общее число областей. Нечеткая система типа Такаги – Сугено, в которой база правил имеет утверждения «если…, то», выбрана в виде

$$\Im_j: \text{IF } (x_1 \text{ is } F_{1,j}) \text{ AND} \ldots \text{AND } (x_n \text{ is } F_{n,j}) \text{ THEN } u = u_{FLS_j}(x),$$

где $F_{i,j}$ – лингвистические выражения, определенные нечетким множеством $\mu_{F_{i,j}}(\cdot)$: $\widetilde{\Re}_{i,j} \to \mathbb{R}$; $u_{FLS_j}(x)$ – выход нечеткого регулятора в соответствии с правилом $\Im_j$; $\widetilde{\Re}_{i,j} \subset \mathbb{R}$. Если нечеткие множества являются нормальными, постоянными и полными, то для полной базы правил сумма результатов функций принадлежностей в части условий (предпосылок) равна 1. Согласно этому условию при использовании умножения для оператора вывода, сложения для агрегирования правил, центра тяжести для дефазификации вычисленных нечетких множеств выход нечеткого регулятора можно описать следующим выражением:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{r} u_{FLS_j}(x) \mu_{\Im_j}(x), \quad \mu_{\Im_j}(x) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{F_{k,j}}(x_j), \tag{6}$$

где r – число правил в базе; $\mu_{\Im_j}(x)$ – функция принадлежности, определяющая разделенное пространство состояний для $\widetilde{\Re}_j = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{\Re}_{i,\,j}$, которое является декартовым произведением. При сравнении моделей (5) и (6) наблюдается различие между характеристической функцией и функцией принадлежности, определяющими области переключения. В переключаемых системах переход от текущего состояния к следующему происходит скачкообразно, в то время как в нечетких системах этот переход сглажен. Кроме того, можно заключить, что при соответствующем выборе функций принадлежностей нечеткие системы могут быть приведены к переключаемым и наоборот. В [13] предложены два подхода для перехода от одного вида систем к другому. В одном из подходов применяется функция, ограничивающая области переключений, а в другом – преобразование, упрощающее анализ, выполняемый для получения требуемой функции принадлежности. Также показано, что при вырождении функции принадлежности выходы переключаемой и соответствующей нечеткой систем точно совпадают.

Благодаря подобию моделей в теории нечетких систем существует ряд условий устойчивости, которые получены путем распространения в нечеткую область результатов, справедливых для переключаемых систем.

2. Устойчивость переключаемых систем. 2.1. *Проблемы в исследовании устойчивости переключаемых систем.* При исследовании устойчивости переключаемых систем выделяются три задачи [16]. *Первая задача* состоит в определении условий, гарантирующих устойчивость системы для любого переключающего сигнала. Актуальность этой задачи можно показать на следующем примере.

Предположим, что объект управляется совокупностью регуляторов одного семейства, каждый из которых спроектирован для определенной задачи. Человек-оператор, находящийся на верхнем уровне принимает решение, через какой регулятор замкнуть цепь управления в каждый момент времени. Устойчивость переключаемой системы гарантируется обычно удержанием каждого регулятора в контуре управления в течение достаточно долгого времени, обеспечивающего затухание переходного процесса. Однако современные системы, управляемые контроллерами, допускают очень быстрые темпы переключений, которые порождают необходимость проверять устойчивость переключаемой системы при произвольных быстрых сигналах переключения.

Пусть подсистемы имеют общую точку равновесия в начале координат, $f_\rho(0)=0,\ \rho\in \mathrm{P}$. Необходимым условием (асимптотической) устойчивости при произвольном переключении является асимптотическая устойчивость всех отдельных подсистем. Действительно, если ρ-я система неустойчива, то переключаемая система будет неустойчивой при $\sigma(t)\equiv\rho$. Но устойчивости всех отдельных подсистем недостаточно. В общем случае рассматриваемая задача не является тривиальной в том смысле, что возможна неустойчивость из-за переключений асимптотически устойчивых подсистем. Возникает вопрос, какая из систем будет асимптотически устойчивой для определенных полезных классов сигналов переключения. Это приводит к следующей задаче.

Вторая задача состоит в определении классов сигналов переключения, при которых система (4) асимптотически устойчива. Часто не обосновано исключение постоянных сигналов переключения, имеющих вид $\sigma(t) \equiv \rho$. Если предположить, что все отдельные подсистемы асимптотически устойчивы, то устойчивость гарантируется при достаточно медленных переключениях.

Третья задача заключается в конструировании сигнала переключения, который обеспечивает устойчивость системы (4). Эта задача имеет смысл, если ни одна из подсистем асимптотически неустойчива. Кроме того, данная задача является больше задачей синтеза, чем задачей устойчивости, но при этом все три задачи тесно связаны.

2.2. *Устойчивость систем при произвольном переключении*. 2.2.1. *Анализ устойчивости методом функций Ляпунова.* В большинстве работ, имеющих отношение к переключаемым системам, для исследования устойчивости используется концепция общей функции Ляпунова [15]. До сих пор неизвестны необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование общей функции Ляпунова, и, как замечено в [21], данная задача может оказаться неразрешимой. Поэтому в настоящее время многие работы в этой области направлены на особые случаи, исследование которых приводит к специфическим стратегиям переключений, стабилизирующим системы.

Рассмотрим систему, динамические свойства которой описываются уравнениями (1). Устойчивость переключаемой системы зависит не только от векторных полей $A_i x$, но и от индекса последовательности. Так как случай, в котором отсутствуют переключения, также является допустимым, каждая матрица A_i должна быть устойчивой. Заметим, что могут существовать устойчивые матрицы A_1 и A_2 такие, что при некоторой последовательности переключений полная система окажется неустойчивой. Возможно и обратное, когда для неустойчивых матриц A_1 и A_2 существует определенная стратегия переключений, при которой полная система оказывается устойчивой [20]. Следовательно, задача состоит в разработке математического аппарата исследования устойчивости переключаемых систем при произвольной последовательности переключений. В [13] приведена теорема устойчивости Ляпунова для линейной стационарной системы (LTI – Linear Time Invariant).

Теорема 1. Для устойчивости линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение Ляпунова

$$A^T P + PA = -Q \tag{7}$$

имело единственное решение в виде симметричной положительно-определенной матрицы P для любой симметричной положительно-определенной матрицы Q.

Следующая лемма дает достаточные условия устойчивости переключаемой системы, заданной уравнением (1), при произвольных переключениях [13].

Лемма. Переключаемая система (1) экспоненциально устойчива, если существует положительно-определенная матрица P такая, что $V(x) = x^T P x$ есть общая квадратичная функция Ляпунова для всех A_i, т. е. для некоторых положительно-определенных матриц Q_i

$$A_i^T P + PA_i = -Q_i.$$

Таким образом, если найти общую положительно-определенную матрицу для заданного множества матриц $\{A_1, \ldots, A_N\}$, то можно доказать устойчивость переключаемой системы. Определение такой матрицы P для функции Ляпунова является основной темой многих исследований [15, 23, 24]. Следующие теоремы устанавливают некоторые ограничения на множество $\{A_1, \ldots, A_N\}$ для доказательства устойчивости переключаемых систем на основе леммы.

В [15] рассмотрена устойчивость переключаемой системы, заданной уравнениями (1). Предполагается, что элементы множества $\{A_1, \ldots, A_N\}$, определяющие переключаемую систему, попарно коммутируют.

Теорема 2. Рассмотрим переключаемую систему (1) с $\{A_1, \ldots, A_N\}$, где все элементы множества, т. е. матрицы A_i, асимптотически устойчивы и попарно коммутируют. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Система экспоненциально устойчива для любой произвольной последовательности переключений между элементами $A = \{A_1, \ldots, A_N\}$.

2. Если дана симметричная положительно-определенная матрица P_0 и последовательность $P_1, \ldots, P_N$ является единственным положительно-определенным решением уравнения

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -P_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{8}$$

то функция $V(x) = x^T P_N x$ будет общей функцией Ляпунова для каждой индивидуальной системы $\dot{x} = A_i x$, $i = 1, \ldots, N$, и, следовательно, функцией Ляпунова для переключаемой системы (1).

3. Для заданной матрицы P_0 матрицы $\{A_1, \ldots, A_N\}$ могут использоваться в уравнении (8) в любом порядке так, чтобы получить некоторое решение P_N.

4. Матрица P_N может выбираться также в интегральной форме:

$$P_N = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A_N^T t_N} \ldots \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{A_2^T t_2} \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{A_1^T t_1} P_0 \mathrm{e}^{A_1 t_1} dt_1 \right] \mathrm{e}^{A_2 t_2} dt_2 \right] \ldots \mathrm{e}^{A_N t_N} dt_N,$$

где перестановки матриц $\{A_1, \ldots, A_N\}$ могут быть любыми, как в утверждении 3.

Если для переключаемых систем невозможно найти общую функцию Ляпунова, то прибегают к использованию свойств допустимых сигналов переключения. При исследовании устойчивости таких переключаемых систем используются множественные (или составные) функции Ляпунова [13, 16]. Идея способа состоит в следующем. Рассмотрим систему (1) для $N = 2$. Пусть $V_1(x) = x^T P_1 x$ и $V_2(x) = x^T P_2 x$ являются ляпунова-подобными функциями для систем $\dot{x} = A_1 x$ и $\dot{x} = A_2 x$ соответственно, уменьшающимися вдоль траекторий в некоторой области. Допустим, что в момент времени $t = 0$ активна динамика системы с матрицей коэффициентов A_1. В момент времени, равный $\tau_{A_1,1}$ с, происходит переключение системы и ее свойства описываются матрицей A_2. Если время ожидания обратного переключения в A_1 обозначить через $\tau_{A_2,1}$ с, то получим последовательность временных интервалов между переключениями

$$\tau = \{\tau_{A_1,1}, \tau_{A_2,1}, \tau_{A_1,2}, \tau_{A_2,2}, \ldots\}.$$

Введем обозначение $t_j = t_{j-1} + \tau_{A_1, j} + \tau_{A_2, j}$, где $t_0 = 0$. Если для любого j справедливы неравенства

$$V_1(t_{j-1} + \tau_{A_1, j} + \tau_{A_2, j}) < V_1(t_{j-1}), \quad V_2(t_j + \tau_{A_1, j+1}) < V_2(t_j - \tau_{A_2, j}),$$

то система будет асимптотически устойчивой, так как существует тенденция уменьшения исследуемой функции. Эта идея может быть распространена на случай $N > 2$. Существует ряд исследований данной проблемы. Например, в работе [22] использованы множественные функции Ляпунова для анализа устойчивости по Ляпунову.

Получены теоремы, определяющие условия устойчивости для частных случаев переключаемых систем, например для треугольных матриц коэффициентов системы [23].

Теорема 3. Если существует невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такая, что $\widetilde{A}_i = TA_iT^{-1}$, $i = 1, \dots, N$, есть верхняя треугольная матрица, то существует положительно-определенная матрица P, удовлетворяющая (9).

Системы с симметризованными матрицами A_i обладают следующими свойствами:

Теорема 4. Пусть устойчивые матрицы $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются симметризованными, т. е. существует преобразование подобия, в результате которого каждая A_i является подобной симметричной матрицей. Тогда система (1) экспоненциально устойчива при произвольных переключениях [21].

Теорема 5. Пусть для устойчивых матриц $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует невырожденная матрица T такая, что

$$TA_iT^{-1} = S_i + E_i, \quad S_i = S_i^T, \quad \|E_i\| < \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0.$$

Если ε достаточно мало, то переключаемая система (1) экспоненциально устойчива [19].

Теорема 6. Пусть $N = 2$ и $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, тогда A_1, A_2 имеют общую квадратичную функцию Ляпунова, если и только если матрицы $\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$ и $\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2^{-1}$ устойчивы для всех $\alpha \in [0, 1]$. Доказательство теоремы приведено в [25].

Экспоненциальная устойчивость и существование квадратичной общей функции Ляпунова являются свойствами робастности в том смысле, что они сохраняются при достаточно малых возмущениях параметров системы. Что касается возмущений верхней треугольной матрицы, то можно получить точные границы, которым должны удовлетворять элементы, лежащие ниже диагонали, с тем чтобы квадратичная общая функция Ляпунова для невозмущенной системы оставалась общей функцией Ляпунова для возмущенной системы.

2.2.2. *Обратные теоремы Ляпунова*. Существование общей функции Ляпунова предполагает асимптотическую устойчивость переключаемой системы единообразно для всего набора сигналов переключения. Обратная теорема Ляпунова для дифференциальных включений доказана в [26]. Для нелинейных систем обратная теорема сформулирована в [1], а в работе [16] эти результаты интерпретированы следующим образом:

Теорема 7. Если переключаемая система $\dot{x} = A_\sigma x$ равномерно экспоненциально устойчива, то семейство линейных систем $\dot{x} = A_p x,\ p \in P$, имеет строго выпуклую, однородную (второго порядка) общую функцию Ляпунова квазиквадратичной формы $V(x) = x^T L(x) x$, где $L(x) = L^T(x) = L(\tau x)$ для всех ненулевых $x \in R^n$ и всех $\tau \neq 0$.

Конструирование таких функций Ляпунова выполняется так же, как и классических функций, используемых для доказательства стандартных обратных теорем Ляпунова; кроме того, они должны описывать верхнюю границу обычных выражений вида

$$V_1(x) := \int_0^T \left|\varphi_1(s,x)\right|^2 ds,$$

$$V_i(x) := \int_0^T V_{i-1}(\varphi_i(s,x))\, ds, \quad i = 2, \ldots, m,$$

над всеми индексами $\rho \in \mathrm{P}$. В [21] также показано, что можно найти общую функцию Ляпунова, принимающую кусочно-квадратичную форму $V(x) = \max\limits_{1 \le i \le k} \left\langle l_i, x \right\rangle^2$, где $l_i,\ i = 1, \ldots, k$, являются постоянными векторами.

Квадратичная общая функция существует не всегда. Можно привести линейную систему второго порядка, которая не имеет квадратичной общей функции Ляпунова, хотя переключаемая система равномерно экспоненциально устойчива. Таким образом, условия существования квадратичной общей функции Ляпунова (например, условие теоремы 3) не могут быть необходимыми условиями асимптотической устойчивости. Заметим, что теорема 7 не распространяется на класс нелинейных переключаемых систем.

Теорема 8. Если переключаемая система (4) глобально равномерно асимптотически устойчива и локально равномерно экспоненциально устойчива, то семейство вида $\dot{x} = f_\rho(x),\ \rho \in \mathrm{P}$, имеет общую функцию Ляпунова.

2.2.3. *Связь между асимптотической устойчивостью переключаемой системы и свойствами соответствующей алгебры Ли.* Связь между асимптотической устойчивостью переключаемой линейной системы и свойствами соответствующей алгебры Ли детально обсуждалась впервые в [16]. Рассмотрена дискретная модель системы (2). Предполагается [16], что если алгебра Ли $\{L_p:\ p \in P\}_{LA}$ является нильпотентной, то система (2) асимптотически устойчива при любом сигнале переключения σ и доказано это предположение для частного случая, где $P = \{1,2\}$ и скобки Ли третьего порядка обращаются в нуль: $[L_1,\ [L_1, L_2]] = [L_2,\ [L_1, L_2]] = 0.$ Установлено, что если алгебра Ли $\{A_p:\ p \in P\}_{LA}$ разрешима, то семейство

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in P,$$

где матрицы A_p полагаются устойчивыми и множество $\{A_p:\ p \in P\}$ является компактом в $\mathbb{R}^{n \times n}$, имеет квадратичную общую функцию Ляпунова. Доказательство дано в предположении, что матрицы разрешимой алгебры Ли могут быть одновременно взяты в верхней треугольной форме и что семейство линейных систем с устойчивыми верхними треугольными матрицами имеет квадратичную общую функцию Ляпунова.

Теорема 9. Если $\{A_p: \ p \in P\}_{LA}$ – компактное множество устойчивых матриц и алгебра Ли $\{A_p: \ p \in P\}_{LA}$ разрешима, то линейная переключаемая система $\dot{x} = A_\sigma x$ глобально равномерно экспоненциально устойчива [16].

Однако заметим, что, несмотря на нетривиальность задачи определения базиса, в котором все матрицы примут треугольную форму, или на предположение о существовании такого базиса, ли-алгебраическое условие, определенное теоремой 9, формулируется в терминах исходных данных и всегда может быть проверено за конечное число шагов, если P – конечное множество.

Эти результаты имеют приложение к нелинейным переключаемым системам [16] вида

$$\dot{x} = f_\rho(x), \quad \rho \in \mathrm{P}. \tag{9}$$

Наряду с семейством (9) рассмотрим соответствующее семейство линеаризованных систем

$$\dot{x} = F_p x, \quad p \in P,$$

где $F_p = \dfrac{\partial f_p}{\partial x}(0)$. Пусть F_p устойчивы, P – компактное множество и $\dfrac{\partial f_p}{\partial x}(x)$ непрерывно зависит от p. Непосредственное использование теоремы 9 и первого метода Ляпунова дает следующий результат.

Следствие. Если алгебра Ли $\{F_p: \ p \in P\}_{LA}$ является разрешимой, то система (9) локально равномерно экспоненциально устойчива.

Это свидетельствует о том, что оценка $\|x(t)\| \le c\mathrm{e}^{-\mu t}\|x(0)\| \ \forall t \ge 0$ справедлива для всех траекторий, начинающихся в некоторой окрестности относительно начала координат.

Важной задачей дальнейших исследований является изучение соответствия структуры алгебры Ли, сгенерированной нелинейными векторными полями, свойству устойчивости переключаемой системы (9). Когда недостаточно выполнение критерия линеаризации системы, то, учитывая члены более высокого порядка, можно получить условия глобальной или, по крайней мере, локальной устойчивости исходной нелинейной переключаемой системы. Следует также заметить, что ли-алгебраические условия, приведенные в теореме 9, не обеспечивают свойство робастности рассмотренной переключаемой системы.

2.2.4. *Устойчивость систем при медленных переключениях.* Переключаемая система может стать неустойчивой при определенных сигналах переключения, даже если все отдельные подсистемы асимптотически устойчивы. Таким образом, для достижения устойчивости переключаемой системы необходимо сузить класс возможных сигналов переключения, сделав, например, интервалы между моментами последовательных переключений достаточно большими. Такое допущение о медленных переключениях существенно упрощает анализ устойчивости и часто встречается в литературе по переключающему управлению [16]. При анализе устойчивости медленно переключаемых систем полезен инструмент множественных функций Ляпунова.

Простейший способ точного определения медленного переключения состоит во введении числа $\tau > 0$ и ограничении класса допустимых сигналов переключения такими сигналами, у которых интервал между любыми двумя последовательными моментами переключения был не меньше, чем τ. Число τ иногда называется временем выдержки (dwell time), потому что σ задерживается на каждом значении в течение, по крайней мере, τ единиц времени. Хорошо известно [16], что линейные системы в семействе $\dot{x} = A_p x,\ p \in P$, асимптотически устойчивы, линейная переключаемая система $\dot{x} = A_\sigma x$ глобально экспоненциально устойчива, если время выдержки τ достаточно велико. Действительно, требуемая нижняя граница τ может быть однозначно вычислена из параметров отдельных подсистем.

Менее известно, что при соответствующих допущениях достаточно большое время выдержки также гарантирует асимптотическую устойчивость переключаемой системы в нелинейном случае. Возможно, лучший способ доказать наиболее общие результаты этого утверждения состоит в использовании множественных функций Ляпунова. Полагаем [16], что все системы в семействе $\dot{x} = f_p(x),\ p \in P$, глобально экспоненциально устойчивы. Тогда для каждого $p \in P$ существует функция Ляпунова V_p, которая для некоторых положительных констант a_p, b_p и c_p удовлетворяет условиям:

$$a_p |x|^2 \le V_p(x) \le b_p |x|^2, \tag{10}$$

$$\nabla V_p(x) f_p(x) \le -c_p |x|^2. \tag{11}$$

Комбинация (10) и (11) дает результат

$$\nabla V_p(x) f_p(x) \le -\lambda_p V_p(x), \qquad p \in P,$$

где $\lambda_p = c_p / b_p$. Это значит, что $V_p(x(t_0 + \tau)) \le \mathrm{e}^{-\lambda_p \tau} V_p(x(t_0))$ при условии $\sigma(t) = p$ для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

3. Методы управления переключаемыми системами. В литературе достаточно хорошо представлено решение задачи синтеза регуляторов для линейных стационарных систем. Регуляторы, рассчитанные для каждой линейной системы, в совокупности составляющие нелинейную модель, образуют переключающийся регулятор, улучшающий характеристики рассматриваемой системы [13, 5]. Развивая теорию переключаемых систем, некоторые авторы изучили вопросы оптимального управления этим классом систем [27–29].

В работе [13] предлагается процедура синтеза регулятора, особенностью которой является задание динамических свойств для замкнутой системы. Предполагается существование желаемого поведения системы в виде фазового портрета. Синтезируется регулятор, при котором динамика замкнутой системы порождает фазовый портрет, в некотором смысле близкий к заданному виду. В задаче много неизвестных. Как правило, для их определения недостаточно имеющихся в распоряжении уравнений. Учет физических ограничений и ряд предположений позволяют преодолеть эти трудности. Рассмотрена система

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u(x), \tag{12}$$

где $f(\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$; $g\colon \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^n$ и $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – управляющий вход. Далее полагается, что точкой равновесия системы (12) является $x = 0$ при $u(x) = 0$. Для заданного вектора функций $d(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ требуется найти сигнал управления $u(x)$, который приближает динамику замкнутой системы к динамике $\dot{x} = d(x)$, или, более определенно, фазовый портрет системы (12) должен приближаться к фазовому портрету, который соответствует желаемой динамике. Однако при каком-то $x \in \mathbb{R}^n$ и произвольном $d(x)$ уравнение $f(x) + g(x)u(x) = d(x)$ может не иметь точного решения по $u(x)$. Потому, как правило, выполняется аппроксимация заданного $d(x)$. Один из способов определения $u(x)$ состоит в минимизации нормы разницы между $d(x)$ и $f(x) + g(x)u(x)$. При этом ни скорость системы, ни фаза точно не совпадают с желаемыми значениями. Другой способ состоит в приближении эволюции движения системы к заданному многообразию настолько, насколько это допускают физические ограничения. Но для достижения нулевой фазовой разницы с учетом существующих условий приходится «жертвовать» скоростью системы. Предложенные в [13] методы стабилизации имеют общие характеристики. Все методы состоят из нескольких стадий. Сигналы управления, вычисленные на каждой стадии, гарантируют уменьшение норм определенного множества состояний. В одном из предложенных методов для стабилизации определенного класса нелинейных систем используется специально разработанная стратегия переключений. На каждой стадии сигнал управления находится из условия стабилизации некоторого подмножества состояний, в то время как другие состояния ограничены. В другом методе норма полного вектора состояний, так же как нормы некоторых выбранных состояний, уменьшается благодаря соответствующему подбору управляющего входа. Описаны два метода определения этих выбранных состояний: либо состояние находится последовательным способом, либо на каждой стадии выбирается состояние, имеющее наивысшую норму.

Разработка стратегий и выбор областей переключений на основе собственных динамических свойств системы приведены в [20]. В [30] рассмотрена переключаемая линейная система с неустойчивыми индивидуальными матрицами. Детально разработан подход, применяющий множественную функцию Ляпунова вместе с временной выдержкой переключений для исследования связи задачи стабилизации линейной системы, использующей конечную гибридную обратную связь по выходу, с задачей определения стабилизирующей последовательности переключений для линейной системы с неустойчивыми индивидуальными матрицами.

В работах [10, 31, 32] представлено решение задачи стабилизации при постоянном наблюдении за переключениями. В [33] показано, что состояние некоторой нелинейной системы может быть ограниченным при произвольных начальных условиях и ограниченных возмущениях, если контроллеры обеспечивают устойчивость по состоянию при ограниченном входном сигнале ISS (Input-to-state stability). Это достигается с помощью переключающегося супервизорного управления переключениями. Причем логика переключения имеет масштабно-свободный (scale-independent) гистерезис. Имеется в виду, что ширина характеристики не является постоянной величиной, так как зависит от параметра генератора управляющих сигналов, значения которого принадлежат некоторой ограниченной области. В этой же работе введено понятие среднего времени выдержки (average dwell-time).

Задача L_2-коэффициентного управления переключаемыми системами на основе выходного динамического компенсатора решена в [34]. Предложено сначала синтезировать специальный динамический компенсатор по выходным переменным, затем рассчитать компенсатор-регулятор с обратной связью по состоянию, который гарантирует L_2-коэффициент передачи в замкнутой системе. При этом реализуется робастное управление системами с L_2-коэффициентом. В [35] выполнен синтез пропорционально-интегрального наблюдателя (ПИ-наблюдателя) для систем при произвольных последовательностях переключений. Разработаны два эквивалентных условия, которые гарантируют отслеживание ПИ-наблюдателями сигнала состояния. На основе этих условий выполнен синтез регулятора с обратной связью по переменным состояния, оцениваемым ПИ-наблюдателем. С помощью регулятора по состоянию стабилизируется замкнутая система, обладающая свойством робастности относительно ограниченных возмущений.

Заключение. Одна из главных проблем в теории переключаемых динамических систем – это определение условий устойчивости, используемых при проектировании регуляторов. Задача определения условий устойчивости достаточно полно изучена для класса линейных переключаемых систем, в которых локальная устойчивость одновременно является глобальной. Кроме устойчивости по Ляпунову для динамических систем разработан другой вид устойчивости – лагранжева. В переключаемых системах лагранжева устойчивость пока всесторонне не изучена. Основные подходы к исследованию устойчивости переключаемых систем, – это методы Ляпунова и отображение Пуанкаре с преобладанием подхода Ляпунова. В теории Ляпунова существуют два основных направления: либо используется функция Ляпунова, либо переформулируется определение устойчивости в смысле Ляпунова и затем доказывается устойчивость с применением подобной методологии к системам с линейным или нелинейным управлением. Если выбирается подход функций Ляпунова, то применяют множественные функции или общую функцию Ляпунова. В ряде публикаций рассмотрены вопросы робастной стабилизации переключаемых систем и подавления возмущений в них. Для некоторых классов переключаемых систем с учетом их специфики разработаны пропорциональные и пропорционально-интегральные наблюдатели. Результаты по устойчивости и синтезу регуляторов для нелинейных переключаемых систем получены при существенных ограничениях на их характеристики и сигналы переключения, что делает область применения значительно более узкой по сравнению с аналогичными результатами для линейных переключаемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dayawansa W. P., Martin C. F.** A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. **44**. P. 751.

2. **Wicks M. A., Peleties P., DeCarlo R. A.** Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems // European Journ. Control. 1998. **4**. P. 140.

3. **Zefran M., Burdick J. W.** Design of switching controllers for systems with changing dynamics // Proc. of the 37th Conf. on Decision and Control. 1998. P. 2113.

4. **Fu M., Barmish B. R.** Adaptive stabilization of linear systems via switching control // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. **AC-31**, N 12. P. 109.

5. **Емельянов С. В., Коровин С. К.** Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997.

6. **Уткин В. И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.

7. **Anderson B. D., Brinsmead T., Liberzon D. et al.** Multiple model adaptive control with safe switching // Intern. Journ. Adapt. Control Signal Process. 2001. P. 445.
8. **Hespanha J. P., Liberzon D., Morse A. S.** Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching // Systems & Control Lett. 2003. **49**. P. 49.
9. **Narendra K. S., Balakrishnan J.** Adaptive control using multiple models // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. **42**. P. 171.
10. **Morse A. S.** Supervisory control of families of linear set-point controllers. Pt. 1: Exact matching // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. **41**. P. 1413.
11. **Kulkarni S. R., Ramadge P. J.** Model and controller selection policies based on prediction errors // Ibid. P. 1594.
12. **Brockett R. W.** Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory. Boston: Birkhauser, 1983. P. 181.
13. **Akgül M.** Analysis and design of switching and fuzzy systems // PhD Thesis. Bilkent University, 2002.
14. **Morse A. S., Mayne D. Q., Goodwin G. C.** Application of hysteresis switching in parameter adaptive control // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. **37**. P. 1343.
15. **Narendra K. S., Balakrishnan J.** A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting a-matrices // Trans. Automat. Control. 1994. **39**. P. 2469.
16. **Liberzon D., Morse S.** Basic problems in stability and design of switched system // IEEE Control System Magazine. 1999. P. 1.
17. **Какичев Л. Г., Солодовников В. В., Федотов А. И.** Современное состояние и методы математического описания одного класса логико-динамических систем // Автоматическое управление и вычислительная техника. М.: Машиностроение, 1978. Вып. 12. С. 127.
18. **Жук К. Д., Тимченко А. А.** Автоматизированное проектирование логико-динамических систем. Киев: Наук. думка, 1981.
19. **Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. K.** A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory // Trans. Automat. Control. 1998. **43**. P. 31.
20. **Hespanha J. P., Morse A. S.** Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching // Automatica. 1995. **35**. P. 385.
21. **Solak E.** Observability and observers for nonlinear and switching systems // PhD Thesis. Bilkent University, 2001.
22. **Branicky M. S.** Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // Trans. Automat. Control. 1998. **43**. P. 475.
23. **Shorten R. N., Narendra K. S.** On the stability and existence of common Lyapunov functions for stable linear switching systems // Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control. 1998. P. 3723.
24. **Ooba T., Funahashi Y.** On a common quadratic Lyapunov function for widely distant systems // Trans. Automat. Control. 1997. **42**. P. 1697.
25. **Shorten R. N., Narendra K. S.** Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems // Proc. of the American Control Conf. 1999. P. 1410.
26. **Molchanov A. P., Pyatnitskii E. S.** Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory // Systems & Control Lett. 1989. **13**. P. 59.
27. **Savkin A. V., Peterson I. R., Skafidas E. et al.** Hybrid dynamical systems: Robust control synthesis problems // System Control Lett. 1996. N 29. P. 81.

28. **Branicky M. S.** Stability of switched and hybrid systems // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. 1994. P. 3498.

29. **Skafidas E., Evans R. J., Savkin A. V. et al.** Stability results for switched controller systems // Automatica. 1999. **35**. P. 553.

30. **Liberzon D.** Stabilizing a linear system with finite-state hybrid output feedback // Proc. of the 7th Mediterranean Conf. on Control and Automation. 1999.

31. **Morse A. S.** Supervisory control of families of linear set-point controllers. Pt. 2: Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. **42**. P. 1500.

32. **Hespanha J. P., Liberzon D., Morse A. S.** Logic-based switching control of a nonholonomic system with parametric modelling uncertainty // System Control Lett. 1999. **38**. P. 167.

33. **Vu L., Chatterjee D., Liberzon D.** Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control // Automatica. 2007. **43**, N 4. P. 639.

34. **Liu X.-L., Duan G.-R.** L_2 synthesis for switched systems using output dynamic compensator // Proc. of the IASTED Intern. Conf. "Automation, Control, and Information Technology" (ACIT'2005). Anaheim – Calgary – Zurich: ACTA Press, 2005. P. 231.

35. **Liu X.-L., Duan G.-R.** Robust H_∞ output dynamic compensator for switched systems // Ibid. P. 237.

Поступила в редакцию 21 декабря 2007 г.