

УДК 004.922/923

О ГРУППЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ПЕРСПЕКТИВ

А. М. Ковалев

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41
E-mail: amkov@ngs.ru*

Рассматривается группа нелинейных перспектив для отображения трехмерных визуальных сцен на эллиптических поверхностях и во внутренней области сфероидов. Преобразование сцен выполняется на основе патентованного способа изображения предметов со сжатием пространства и последующей проекцией на сферу.

Ключевые слова: отображение визуальных сцен, сжатие пространства, сфероид, нелинейные перспективы.

В работе [1] рассмотрен способ изображения предметов в перцептивной перспективе [2]*. Его применение обеспечивает естественное зрительное восприятие без искажений масштабного соотношения предметов и глубины пространства. На основе описанного способа предложено перцептивное трехмерное отображение, которое образует группу линейных перспектив, содержащую аксонометрическую, перцептивную, ренессансную, широкоугольную и обратную перспективы. В линейных перспективах расстояния до предметов определяются вдоль главной оси зрения, которая перпендикулярна картинной плоскости. Практика показывает, что допустимое отклонение луча зрения от перпендикуляра составляет $15\text{--}20^\circ$, и это связано с тем, что проекции, пропорциональные косинусу указанных углов, искажаются сравнительно слабо. Поэтому в линейных перспективах углы при вершине пирамиды видимости обычно не превышают $30 \times 40^\circ$. Известно, что угловые размеры пространства, наблюдаемого условно неподвижным глазом, составляют $\approx 120 \times 150^\circ$, или $1,75\pi$ стерadians. Движение глаз и головы значительно увеличивает просматриваемое пространство [4]. Таким образом, изображение на картинной плоскости не способно обеспечить широкое поле зрения глаз с учетом их движения.

Цель предлагаемой работы — исследование многовариантной системы сфероидальных перспектив, или группы нелинейных перспектив, в которых расстояния определяются вдоль радиальных лучей зрения, для решения проблемы широкоугольных изображений.

Способ изображения предметов (варианты). Заявленный в двух вариантах способ подробно исследован при изображении предметов на картинной плоскости [1]. Рассмотрим два варианта применения способа при проекции предметов на картинную сферу.

По первому варианту (рис. 1, а) способ изображения предметов состоит в центральной проекции точек пространства предметов, например точки P , пучком лучей 1 на картинную сферу K радиуса r_0 , например в точку R . Для этого в пространстве предметов на заданном расстоянии z_0 от центра проекции O и перпендикулярно главному лучу 2 пучка 1 устанавливается вспомогательная плоскость Π (\mathcal{Z}). Каждую точку пространства предметов, например P , сдвигают по перпендикуляру PQ к плоскости \mathcal{Z} до расстояния QP' , которое устанавливают равным произведению величины исходного расстояния QP точки P от вспомогательной плоскости и коэффициента сжатия пространства α в упомянутой

*Способ включен в список Роспатента «100 лучших изобретений России» № 79 [3].

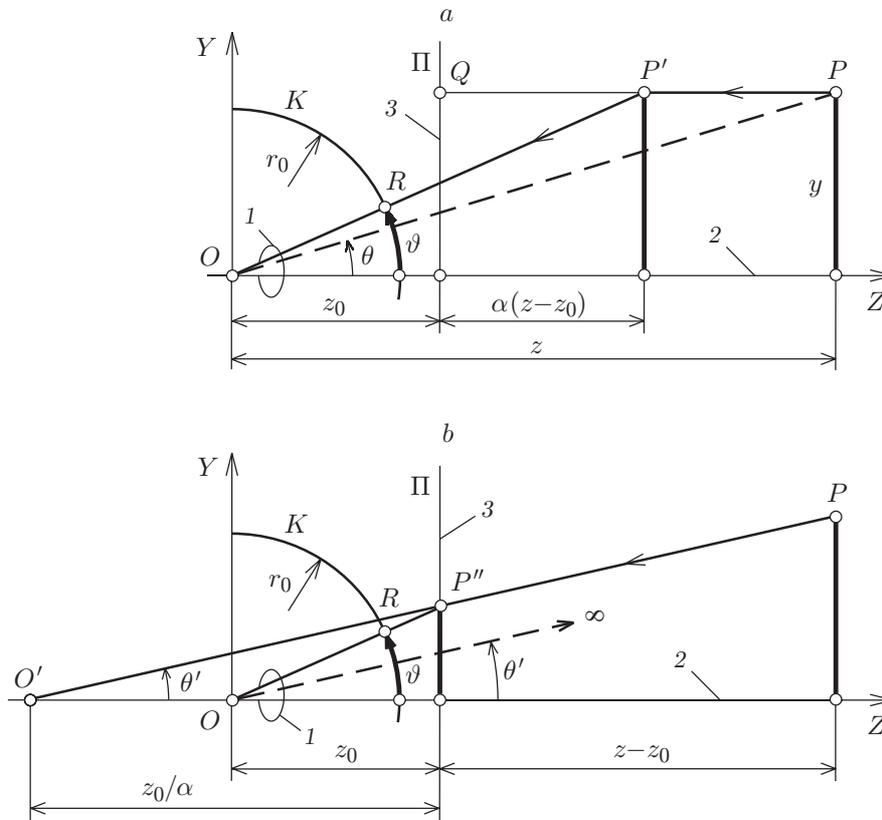


Рис. 1

точке P . После сдвига точки P в положение P' производят центральную проекцию точки лучом OP' пучка 1 на картинную сферу K в точку R .

По второму варианту (рис. 1, b) при прочих равных условиях, описанных выше, каждую точку пространства предметов, например P , перемещают на плоскость 3 по лучу $O'P$, проходящему через виртуальный центр проекции O' . Центр O' располагают на линии главного луча 2 на расстоянии от плоскости 3, равном частному от деления величины расстояния z_0 на коэффициент сжатия пространства α в упомянутой точке P . После перемещения точки P в положение P'' производят центральную проекцию точки лучом OP'' пучка 1 на картинную сферу K в точку R .

В работах [1, 2] показано, что изображения предметов, построенные двумя вариантами способа, являются конгруэнтными, т. е. совпадающими друг с другом всеми точками. Другой вывод сделан о том, что результаты исследования одного из вариантов способа в равной мере справедливы и для другого варианта.

Изображение на сфере. Зададим прямоугольную и сферическую (полярную) системы координат. Пусть начало систем координат O совпадает с оптическим центром глаза и центром проекции. Положительная полуось Z ($OZ+$) совпадает с главным лучом проекции. Координатная плоскость XOZ всегда горизонтальна. Ось OY представляет собой местную вертикаль. Система координат XYZ — левая. Точка P задается с помощью координат (x, y, z) .

В качестве сферической системы выберем двухмеридиональную систему координат. Координатными поверхностями являются сфера и две полуплоскости. Полярный радиус сферы $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ задает расстояние до той же точки P . Двугранный угол θ между горизонтальной полуплоскостью $XOZ+$ и полуплоскостью, содержащей точку P и ось

OX , задает меридиан возвышения точки. При этом $\operatorname{tg} \theta = y/z$. Двугранный угол φ между вертикальной полуплоскостью $YOZ+$ и полуплоскостью, содержащей точку P и ось OY , задает азимутальный меридиан точки. При этом $\operatorname{tg} \varphi = x/z$.

Пусть заданы точки $P(x, y, z) \equiv P(r, \theta, \varphi)$ и $R(x_R, y_R, z_R) \equiv R(r_R, \theta_R, \varphi_R)$ (см. рис. 1, а). Коэффициент сжатия пространства в точке P равен α . В этом случае проекция точки на сферу K в декартовой системе координат имеет вид

$$R = P' \frac{r_0}{|P'|} = P' f(x, y, z), \quad P' \equiv [x, y, \alpha z + (1 - \alpha)z_0],$$

$$|P'| = \sqrt{x^2 + y^2 + [\alpha z + (1 - \alpha)z_0]^2}, \quad (1)$$

где P' — радиус-вектор сдвинутой точки P ; $f(x, y, z) = r_0/|P'|$ — функция преобразования. В сферической системе

$$r_R = r_0, \quad \operatorname{tg} \theta_R = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{\alpha z + (1 - \alpha)z_0},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_R = \operatorname{tg} \phi = \frac{x}{\alpha z + (1 - \alpha)z_0}. \quad (2)$$

Можно заметить (см. рис. 1), что предложенный способ предусматривает угловое увеличение предметов:

$$W(z) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{z}{\alpha z + (1 - \alpha)z_0}. \quad (3)$$

При $\alpha = 1$ увеличение $W(z) = 1$, и мы имеем дело с обычной сферической перспективой, подобной ренессансной и исследованной в [4]. При $\alpha < 1$ увеличение зависит от соотношения z и z_0 . При $W(z = z_0) = 1$ предметы в плоскости Π не испытывают увеличения. В ближней зоне ($z < z_0$) увеличение $W(z < z_0) < 1$, т. е. предметы уменьшаются в размерах по сравнению с обычной сферической перспективой. В дальней зоне ($z > z_0$) увеличение $W(z > z_0) > 1$. Максимум увеличения достигается при $z \rightarrow \infty$. Из (3) следует, что $W(\infty) = 1/\alpha$. Поэтому на бесконечности

$$\operatorname{tg} \theta(\infty) = \alpha \operatorname{tg} \vartheta, \quad \operatorname{tg} \varphi(\infty) = \alpha \operatorname{tg} \phi, \quad (4)$$

где $\theta(\infty)$, $\varphi(\infty)$ — реальное возвышение и азимут бесконечно удаленной точки, а ϑ , ϕ — воспринимаемое возвышение и азимут этой точки соответственно.

Все точки, лежащие на луче $O'P$ (см. рис. 1, б), проецируются в точку R на сфере K и воспринимаются под углом возвышения ϑ . Очевидно, что $\operatorname{tg} \theta' = \alpha \operatorname{tg} \vartheta$. Сравнивая полученное с (4), можно убедиться, что $\theta' = \theta(\infty)$. Таким образом, при заданном возвышении ϑ и азимуте ϕ реальное возвышение $\theta(\infty) = \theta'$ и азимут $\varphi(\infty) = \phi'$ определяются угловыми координатами луча $O'P$. Этот луч и параллельный ему луч, исходящий из центра проекции O , пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Бисекция небосвода. Человеку свойственна переоценка воспринимаемых угловых величин, и это следует из экспериментов по бисекции небосвода от зенита до горизонта, или «деления неба пополам», описанного в [5, р. 104]. Наблюдения, связанные с попытками определить форму небосвода, имеют долгую историю. Если воспринимаемый небосвод — это четверть сферы, то при делении пополам угол возвышения должен быть равен 45° . В

Параметры	День		Сумерки	Ночь	
	облачно	ясно		ясно	с Луной
$\vartheta = 45^\circ$					
$\theta(\infty)$, град	21–30	23–34	32	27–37	30–40
α	0,38–0,58	0,42–0,67	0,625	0,51–0,75	0,58–0,84
$\alpha_{\text{ср}}$	0,48	0,55	0,625	0,63	0,7
$W(\infty)_{\text{ср}}$	2,08	1,82	1,60	1,58	1,40

нашем понимании это угол ϑ . В 1728 г. Smith измерил реальный угол бисекции и нашел, что он равен 23° . Это угол $\theta(\infty)$. В [5] опубликована таблица, в которой сведены значения углов $\theta(\infty)$ по данным четырех исследований (1890–1943 годы). Для $\vartheta = 45^\circ$ из (4) коэффициент сжатия пространства $\alpha = \text{tg } \theta(\infty)$. В представленной таблице отражены данные из [5], дополненные расчетными величинами α и увеличением $W(\infty) = 1/\alpha$.

Таким образом, видимое увеличение предметов зависит от времени суток и метеоусловий, а среднее значение коэффициента сжатия $\alpha \approx 0,5\text{--}0,7$.

Перцептивное отображение. Проекция (1), (2) формирует двумерное изображение на сфере. Рассмотрим преобразование, которое переводит трехмерное пространство предметов в трехмерное пространство изображений. Перспективную проекцию $R(x_R, y_R, z_R)$ точки $P(x, y, z)$ получают на картинной сфере K вышерассмотренными способами. Точка R (рис. 2) определяет абсциссу $x_S = x_R$ и ординату $y_S = y_R$ некой точки $S(x_S, y_S, z_S)$ в пространстве изображений. Аппликата z_S этой точки находится из условия, что глазом O точка S видна под такими же углами θ и ϕ , как и точка P . Из подобных треугольников ORS и $OP'P$ следует проективное преобразование точки в декартовой системе координат:

$$S = Pf(x, y, z), \quad (5)$$

где $f(x, y, z) = r_0/|P'|$ — функция преобразования из (1). Сферические координаты точек $S(r_S, \theta_S, \varphi_S)$ и $P(r, \theta, \varphi)$ связаны выражениями

$$r_S = rf(x, y, z), \quad \theta_S = \theta, \quad \varphi_S = \varphi. \quad (6)$$

Полученное трехмерное пространство изображений предметов ограничено. Определим предельную поверхность. Из (6) расстояние

$$r_S = r_0 \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + [\alpha z + (1 - \alpha)z_0]^2}}. \quad (7)$$

Пусть $x^2 + y^2 = u^2$, $x_S^2 + y_S^2 = u_S^2$, $u/r = u_S/r_S = \sin \gamma$ и $z/r = z_S/r_S = \cos \gamma$. Устремим $z \rightarrow \infty$, не меняя γ . Тогда $S(x_S, y_S, z_S) \rightarrow S_L(x_{SL}, y_{SL}, z_{SL})$, $u_S \rightarrow u_{SL}$, $r_S \rightarrow r_{SL}$. Точка S_L лежит на предельной поверхности. Преобразуем (7):

$$r_S^2 = r_0^2 \frac{(x^2 + y^2)/z^2 + 1}{(x^2 + y^2)/z^2 + [\alpha + (1 - \alpha)z_0/z]^2} = r_0^2 \frac{\text{tg}^2 \gamma + 1}{\text{tg}^2 \gamma + [\alpha + (1 - \alpha)z_0/z]^2}.$$

При $z \rightarrow \infty$ $r_S^2 \rightarrow r_{SL}^2$:

$$r_{SL}^2 = r_0^2 \frac{\text{tg}^2 \gamma + 1}{\text{tg}^2 \gamma + \alpha^2} = \frac{r_0^2}{\sin^2 \gamma + \alpha^2 \cos^2 \gamma}. \quad (8)$$

$x^2 + y^2 = u^2$ в последнее выражение и раскрывая его, получим уравнение второго порядка

$$u^2 + \alpha^2 z^2 + 2\alpha(1 - \alpha)z_0 z + (1 - \alpha)^2 z_0^2 - r_0^2 = 0. \tag{11}$$

Малый дискриминант этого уравнения $\delta = \alpha^2$ положительный. Значит, кривая представляет собой эллипс. Координаты центра следующие: $u_C = 0$, $z_C = -z_0(1 - \alpha)/\alpha = -d$, т. е. центр эллипса лежит на оси Z в виртуальном центре проекции O' (см. рис. 1, *b*). Переместим эллипс (11) в центр O' и выполним обратную подстановку. Тогда получим поверхность, точно-инвариантную для заданного отображения, в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{(z + d)^2}{(r_0/\alpha)^2} = 1. \tag{12}$$

Это эллипсоид вращения такой же, как и предельная поверхность (9), но смещенный в виртуальный центр проекции O' . В наблюдаемом полупространстве изображений с положительной координатой z точно-инвариантная поверхность существует только тогда, когда $r_0 > (1 - \alpha)z_0$.

Пространство изображений. На рис. 3 показана глобальная структура анизотропного пространства изображений в меридиональных сечениях $\varphi = 0$ (рис. 3, *a*) и $\theta = 0$ (рис. 3, *b*) для $\alpha = 0,5$, $r_0 = 3$ м, $z_0 = d = 6$ м. Изображения линий построены по формулам (5), (6). Наблюдатель стоит на земной поверхности 1, которая в плоском сечении представляется дугой эллипса. Евклидовы окружности 2 с радиусами $r = 1,5, 6$ и 24 м — это эллипсы со сдвинутыми по оси Z центрами. Евклидовы вертикали 3 — это эллипсы, центры которых совпадают с началом координат O . Евклидовы горизонталы 4 (к ним также относится Земля 1) — это дуги эллипсов с удаленными от начала координат центрами. Луна 5 и другие объекты космоса располагаются на предельной поверхности 6, или сфероиде (9). Размеры Луны, пропорциональные по закону Эммерта радиальному расстоянию до предельной поверхности r_{SL} , увеличиваются на горизонте в $1/\alpha$ раз [8].

На рис. 3, *b* в плоскости XOZ показаны для сравнения две модели пространства в области эллипса Гильберта 6 (жирные и точечные линии) и в области круга Клейна 7 (тонкие и штриховые линии). Модель Клейна описана в [6, 7]. В ней проективное

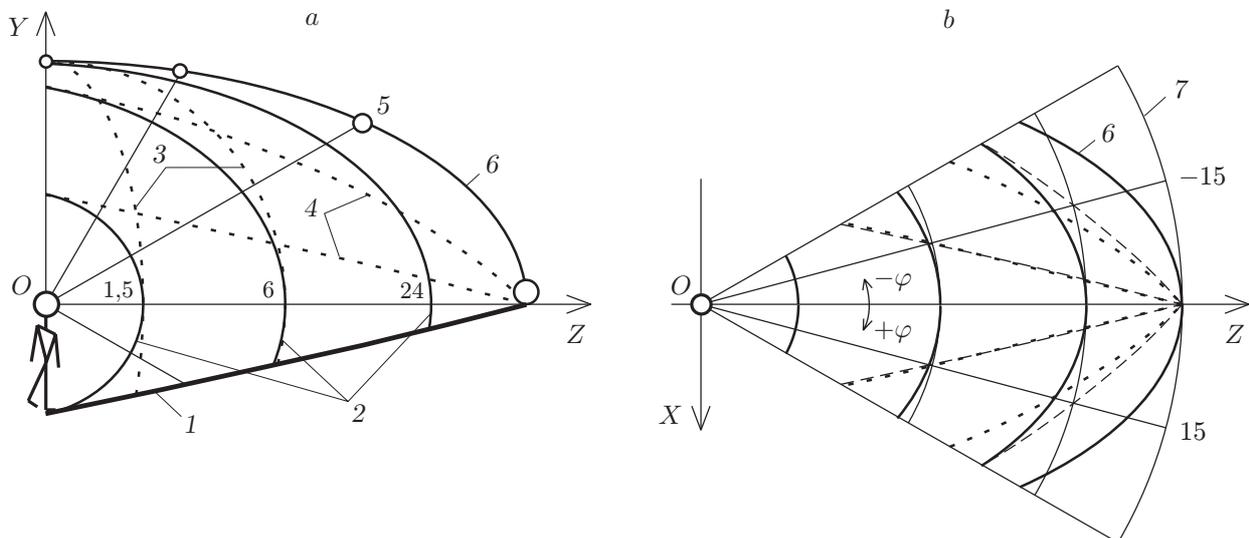


Рис. 3

дробно-линейное преобразование осуществляется вдоль любого радиального направления. В рассматриваемой модели, как показано выше, такое преобразование выполняется только вдоль оси OZ . Тем не менее в пределах азимутального угла $\varphi = \pm (15-20^\circ)$ изображения практически совпадают. Ясно, что при повороте зрительной оси на угол $\varphi > |15-20^\circ|$ потребуется коррекция модели.

Возникшая проблема может быть решена двумя способами.

1. Как известно, большие повороты глаз ($15 < \varphi < 60^\circ$) сопровождаются поворотами головы [4]. Поэтому необходимо и достаточно отслеживать азимутальное положение головы наблюдателя, или полуоси OZ , и пересчитывать пространство изображений по формулам (5), (6) для каждого нового положения полуоси в плоскости горизонта. Внутреннюю область сфероид (9) можно рассматривать как текущее зрительное поле или фрагмент визуального пространства. При движении головы и глаз из таких фрагментов в сознании складывается полный пространственный образ среды. Заметим, что текущее зрительное поле может иметь телесный угол 2π стерadians и обеспечивать центральное и периферийное поля зрения.

2. Каждая точка пространства предметов $P(x, y, z)$ в соответствии с патентованным способом изображения преобразуется в своей меридиональной полуплоскости $\varphi = \arctg(x/z)$. Пространство предметов с коэффициентом α сжимается к цилиндру с вертикальными образующими и направляющей окружностью в плоскости XOZ с центром O и радиусом z_0 . Очевидно, что при этом функция преобразования из (1) примет вид

$$f'(x, y, z) = \frac{r_0}{\sqrt{y^2 + [\alpha\sqrt{x^2 + z^2} + (1 - \alpha)z_0]^2}}, \quad (13)$$

а предельная поверхность пространства изображений из (9) — вид

$$\frac{y^2}{r_0^2} + \frac{x^2 + z^2}{(r_0/\alpha)^2} = 1. \quad (14)$$

Это эллипсоид вращения, или сфероид, сжатый вдоль оси OY . Во всех меридиональных сечениях φ получим изображения, подобные рис. 3, а, а в горизонтальной плоскости XOZ и сечениях, параллельных этой плоскости, — модель Клейна гиперболической плоскости Лобачевского. Предлагаемым методом можно заполнить всю внутреннюю область сфероид (14) с телесным углом зрения 4π стерadians.

Заключение. В данной работе представлен патентованный способ изображения предметов с угловым увеличением на сферической поверхности. Приведена оценка коэффициента сжатия пространства на базе опытных данных по зрительной бисекции небосвода. На основе описанного метода предложено перцептивное трехмерное отображение, позволяющее при равномерном сжатии пространства создать группу нелинейных перспектив, содержащую подгруппу двумерных эллиптических перспектив и подгруппу трехмерных сфероидальных перспектив. Описаны некоторые свойства таких перспектив. Показана структура анизотропного визуального пространства с гильбертовой проективной метрикой и гиперболической геометрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев А. М. Об одном способе изображения предметов и группе линейных перспектив // Автометрия. 2009. 45, № 2. С. 36–44.
2. Пат. 2241258 РФ. Способ изображения предметов (варианты) /А. М. Ковалев. Оpubл. 27.11.2004, Бюл. № 33.

3. http://www.fips.ru/ruptoru/Regions/best100_list_07.htm
4. **Ковалев А. М.** Виртуальное пространство в сферической перспективе // Оптический журнал. 1999. **66**, № 6. С. 131.
5. **Indow T.** The global structure of visual space // Advanced Series of Mathematical Psychology. Singapore: World Scientific Publishing. 2004. Vol. 1.
6. **Ковалев А. М.** О моделях визуального пространства // Оптика и спектроскопия. 2006. **100**, № 1. С. 134–141.
7. **Ковалев А. М.** Описание визуального пространства в моделях Клейна и Пуанкаре // Автометрия. 2006. **42**, № 4. С. 57–66.
8. **Ковалев А. М.** Об анизотропной модели визуального пространства // Автометрия. 2006. **42**, № 6. С. 53–62.
9. **Буземан Г., Келли П.** Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

Поступила в редакцию 12 сентября 2008 г.
